

مركز دراسات الوحدة العربية

سلسلة تاريخ العلوم العربية (٥)

الجبر والهندسة في القرن الثاني عشر

مؤلفات شرف الدين الطوسي

الدكتور رشدي راشد

الدكتور رشدي راشد

- مدير مركز تاريخ العلوم العربية والعصر الوسيط.
- مدير أبحاث في المركز الوطني للبحث العلمي - باريس.
- أستاذ في جامعة طوكيو.
- مدير تحرير مجلة العلوم والفلسفة العربية (جامعة كامبريدج).
- عضو الأكاديمية الدولية لتاريخ العلوم.
- عضو مراسل في مجمع اللغة العربية في القاهرة.
- عضو أكاديمية علوم العالم الثالث.
- ساهم في مؤلفات عدة بالفرنسية والعربية حول تاريخ الرياضيات والعلوم منها: **عناصر تاريخ العلوم؛ الباهر في الجبر للسموأل؛ الرياضيات والمجتمع؛ صناعة الجبر عند ديوفانطس؛ أبحاث في تاريخ الرياضيات؛ دراسات عن ابن سينا؛ الأعمال الرياضية لشرف الدين الطوسي في الجبر والهندسة في القرن الثاني عشر؛ العلوم في عهد الثورة الفرنسية؛ تاريخ الرياضيات العربية بين الجبر والحساب؛ علم الهندسة والمناظر في القرن الرابع الهجري (ابن سهل - القوهي - ابن الهيثم)**، وأشرف على **موسوعة تاريخ العلوم العربية** (ثلاثة أجزاء).
- نشرت له عشرات المقالات العلمية بالفرنسية والانكليزية والعربية والروسية في دوريات عالمية.

الثمن: ٩

أو

مركز دراسات الوحدة العربية

بناية «سادات تاور» شارع ليون
ص.ب: ٦٠٠١ - ١١٣ - بيروت - لبنان
تلفون: ٨٦٩١٦٤ - ٨٠١٥٨٢ - ٨٠١٥٨٧
برقياً: «مرعربي» - بيروت
فاكس: ٨٦٥٥٤٨ (٩٦١١)
e-mail: info@caus.org.lb
Web Site: http://www.caus.org.lb

الجبر والهندسة

في القرن الثاني عشر

مؤلفات شرف الدين الطوسي



مركز دراسات الوحدة العربية

سلسلة تاريخ العلوم العربية (٥)

الجبر والهندسة

في القرن الثاني عشر

مؤلفات شرف الدين الطوسي

الدكتور رشدي راشد

ترجمة: الدكتور نقولا فارس

الفهرسة أثناء النشر - إعداد مركز دراسات الوحدة العربية

راشد، رشدي
الجبر والهندسة في القرن الثاني عشر: مؤلفات شرف الدين الطوسي/ رشدي راشد؛ ترجمة نقولا فارس.
٧١٨ ص. - (سلسلة تاريخ العلوم العربية؛ ٥)
ببليوغرافية: ص ٧٠٩ - ٧١٢.
يشتمل على فهرس.
١. الهندسة (رياضيات). ٢. الطوسي، شرف الدين. أ. فارس، نقولا (مترجم). ب. العنوان. ج. السلسلة.
620.004

عنوان الكتاب بالفرنسية

Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī
Œuvres mathématiques
Algèbre et géométrie au XII^e siècle

مركز دراسات الوحدة العربية

بناية «سادات تاور» شارع ليون ص.ب.: ٦٠٠١ - ١١٣ - بيروت - لبنان
تلفون: ٨٦٩١٦٤ - ٨٠١٥٨٢ - ٨٠١٥٨٧
برقياً: «مرعربي» - بيروت
فاكس: ٨٦٥٥٤٨ (٩٦١١)
e-mail: info@caus.org.lb
Web Site: http://www.caus.org.lb

الطبعة الأولى
بيروت، تشرين الثاني/ نوفمبر ١٩٩٨

المحتويات

القسم الثاني

كلمة المترجم(*)

١ ـ موجز عن محتوى الكتاب

هذا الكتاب **المؤلّفات الرياضية لشرف الدين الطوسي ـ الجبر والهندسة في القرن الثاني عشر** يدل عنوانه على محتواه. يحقق فيه رشدي راشد الأعمال الرياضية لشرف الدين الطوسي (ما وصل منها إلى عصرنا) ويشرحها باللغة الرياضية المفهومة حالياً، ويُعلّق عليها تفصيلاً. وأهم هذه الأعمال هي رسالة الطوسي المسمّاة «المعادلات» التي يشير رشدي راشد إلى أن الكتاب «مخصص لها»(١) ويشرح الأسباب التي جعلتها تمتنع على التحقيق والدراسة من قبل. ينطلق رشدي راشد من هذا التحقيق لكي يضع الرسالة في المكان الذي يعود إليها ضمن المسار الذي يُمثّل تطور الجبر عبر الزمن. وهناك أمران قد تُفيد الإشارة إليهما في تلمّس محتوى هذا الكتاب:

أ ـ يقدّم رشدي راشد دراسة مُعمقة لرياضيات شرف الدين الطوسي، للدوافع التي قادته إلى طرقه الهندسية ـ التحليلية، لوسائله الجبرية المتطورة (التبديل الأفيني للمجهول) ولاستدعائه الوسائل والمفاهيم التحليلية (حصر الجذور ـ النهاية العظمى لبعض التعابير الجبرية)؛ كما يقدّم تحليلاً لطرق شرف الدين الطوسي العددية في الحساب التقريبي للجذور حيث تعود وتظهر المفاهيم التحليلية الموضعية.

ب ـ يقدم الكاتب رسماً للمنحى الهندسي لتطور الجبر بدءاً بالخوارزمي والماهاني والخازن والبيروني وأبي نصر بن عراق. . . ، ويتوقف عند القمة في تطوّر هذا المنحى، التي تُشكلها الأعمال الجبرية لعمر الخيّام التي سبق وأن خصص لها كتاباً نجد فيه تحقيقاً لنصوصها مع دراسة وتعليق(٢). ثم يعرض لوسائل الطوسي الهندسية التي يرتكز

(*) كتبت هذه الكلمة لدى انتهاء الترجمة عام ١٩٩٣، لذا نجد في الهوامش تدقيقاً في بعض ما ورد فيها من توقعات.

(١) الفاتحة، النص الفرنسي، ص IX، هي غير مترجمة.

(٢) عمر الخيّام، **رسائل الخيام الجبرية**، حققها وترجمها وقدم لها رشدي راشد وأحمد جبار، مصادر ودراسات في تاريخ الرياضيات العربية؛ ٣ (حلب: معهد التراث العلمي العربي، ١٩٨١).

فيها إلى ما بدأه الخيّام والتي تتميز عن وسائل الخيّام بكونها تستخدم مفاهيم تحليلية، استدعتها عند الطوسي مسألة وجود الجذور لبعض المعادلات المدروسة.

وقد سبق لرشدي راشد أن قدّم للمنحى الحسابي لتطوّر الجبر في مؤلّفه الضخم **تاريخ الرياضيات العربية: بين الجبر والحساب**(٣). والآن وبإصداره هذا الكتاب الذي يرسم المنحى الهندسي لتطوّر هذا العلم، يكون رشدي راشد قد أنجز الدراسة العامة لتطوّر الجبر العربي.

٢ - الأهمية العلمية للكتاب

عندما يقول أستاذ من منزلة رشدي راشد إن «رسالة» شرف الدين الطوسي هي «أهم ما كُتِب في الجبر وأصعبه»، فهذا يعني أنها كذلك. واستعمال هاتين الصفتين بالمطلق لا بدّ من أن يُثير دهشة القارىء للوهلة الأولى. فهو يعرف حق المعرفة أنّ العرب هم الذين وضعوا علم الجبر وشيّدوه لبنة لبنة، خلال فترة لم تنقطع، ناهزت الستة قرون، منذ الخوارزمي حتى القلصادي، مروراً بأبي كامل والكرجي والخيّام وعلى مساحة بقعة من هذه الكرة امتدّت من سمرقند إلى غرناطة مروراً ببغداد والقاهرة. لذلك، فإن هذا الكلام الذي يستهلّ به رشدي راشد كتابه يرتدي أهمية خاصة. إنّه يقتضي وضع هذا الكتاب في مكان مميّز من المكتبة العربية كما يستتبع نهجاً خاصاً في قراءته.

إن كلمة «أصعبه» لا تعني، على ما نعتقد، صعوبة قراءة هذا الكتاب، بقدر ما تشير إلى تلك التي رافقت عملية تحقيق نص الطوسي الأصلي وفهمه وتدقيقه والتعليق عليه. ولقد شرح ر. راشد بالتفصيل، في المقدمة، الصعوبات التي لم تكن ذات طابع تأريخي تقني فقط، بل أيضاً ذات طابع علمي - لغوي(٤) مشيراً إلى أنها ضاعفت، مرات عدة، المدّة التي توقّع تحقيق النص وشرْحَهُ خلالها. لكن، وبعد هذا التحقيق المرفق بالتعليقات والشرح، لم تعد هناك صعوبة كبيرة في قراءة الكتاب. لذلك، فكلمة «أصعبه» لا ينبغي أن تثني همّة من تدفعه إلى القراءة أهميّةُ الكتاب أو أهمية الموضوع.

---

(٣) Roshdi Rashed, *Entre arithmétique et algèbre, recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, collection sciences et philosophie arabes (Paris: Les Belles lettres, 1984),

نقله إلى العربية حسين زين الدين، انظر رشدي راشد، **تاريخ الرياضيات العربية: بين الجبر والحساب**، ترجمة حسين زين الدين، سلسلة تاريخ العلوم عند العرب؛ ١ (بيروت: مركز دراسات الوحدة العربية، ١٩٨٩).

(٤) نسبة إلى السلبية الناجمة من غياب اللغة الرمزية، ونسبة إلى اضطرار الطوسي لإدخال تعابير رياضية جديدة. انظر: «الفاتحة،» ص ١٥ من هذا الكتاب، و«المقدمة»، ص ٧٩، سادساً: الترجمة الفرنسية.

إلا أن تأكيدنا على انتفاء الصعوبة في قراءة الكتاب يستدعي التنبيه إلى أن هذه القراءة لن تكون نزهة تشبه تلك التي نقوم بها عبر كتاب في العموميّات، يصف الوقائع ويسردها تبعاً لترتيب زمني أو منطقي معيّن. إن الصعوبة الباقية في الكتاب «شرعية» أو «طبيعية»، بمعنى أنّها من نوع تلك التي تعترض قرّاء الكتب الرياضية حيث تتوجب اليقظة الدائمة والمتابعة البطيئة الدقيقة. لكن، لا بدّ من الإشارة أيضاً، إلى أنّ المقدمة وبعض فقرات الكتاب، كتلك المتعلّقة بالحساب العددي أو بالتحليل الرياضي، تتطلّب مستوىً أعلى بكثير من مستوى الدراسة الثانوية.

إنّ أهمية «المقدّمة» تكمن في كونها دراسة تناولت جميع جوانب رسالة الطوسي وفي كونها ثمرة السنوات التي قضاها ر. راشد لإنجاز الكتاب تحقيقاً وتدقيقاً. ولئن بدت هذه الدراسة صعبة فلأنها محبوكة مكثفة، نعتقد أن الكاتب تجنّب فيها المزيد من الشرح والإسهاب. كما نعتقد أنّها وُضِعت على هذه الصورة، كدليل يساعد القارئ على تكوين فكرة شاملة عن النص، وتلخيص لعمل الطوسي والتعليق عليه بصورة عامة، ووضعه في إطاره ذي البعدين التاريخي والرياضي. فلا بد من أن يعود القارىء إلى قراءة «المقدمة» بعد أن ينتهي من قراءة الكتاب. ولا بد من العودة إليها من حين إلى آخر خلال قراءة بقيّة الكتاب. إن التعليقات التفصيلية التي يقدّمها الكاتب ضمن كل فقرة من فقرات النص داخل الكتاب، تشكّل شروحات أساسية لا بدّ منها للمضي قدماً في فهم النص. إلا أنها لا يمكن أن تحلّ في أيّ حال محلّ هذه المقدّمة التي ستبقى، بتقديرنا، مرجعاً أساسياً لطلاب تاريخ الرياضيات.

ولئن استطعنا التعليق على كلمة «الأصعب» التي يصف بها رشدي راشد عمل الطوسي، فلن نعلّق على كلمة «الأهم». ذلك لأن الشرح الذي يورده الكاتب بشأن الأهمية التاريخية والرياضية لعمل الطوسي لا يترك، في رأينا، المجال لأي تعليق على هذه النقطة في عمومياتها. إنّما سنسمح لنفسنا بأن نؤكّد بعض ما ورد في المقدّمة عن المحتوى الرياضي لعمل الطوسي.

إن الأهمية العلمية لهذا العمل تكمن في شموليته. فالمسألة جبرية في الأساس، وهي حلّ معادلات الدرجة الثالثة. والحلّ يقتضي إعطاء القيمة الفعليّة للجذور؛ فإذا بالطوسي يتعدّى إطار الجبر ليعمل ضمن حقل الحلول العددية. كما أنّ مسألة تِبيان وجود الجذور، قادته، على خطى الخيّام، إلى العمل في ميدان دراسة القطوع المخروطية ومعادلاتها ونقاط التقائها، فإذا به ينتقل إلى الهندسة و«الهندسة التحليلية». أمّا دراسة المعادلات «التي يقع فيها المستحيل» أي التي قد لا يكون لها أي جذر (حقيقي موجب)، فقادته إلى التطرّق إلى موضوع أساسي في ميدان التحليل الرياضي هو موضوع النهاية القصوى لدالّة بمتغيّر واحد.

ولئن صحّ أن الطوسي لم يتخطّ الخيّام إلا قليلاً في مجال صياغة معادلات

المنحنيات، ولئن صحّ أن صياغته لمعادلات المنحنيات كانت جزءاً من مشروع بَدَلَ أن تكون مشروعاً قائماً بحدّ ذاته كما هي الحال في رياضيات القرن السابع عشر؛ ولئن صحّ أيضاً أنّ الطوسي عالج قضية النهاية العظمى كفقرة من فصل، بينما كانت فصلاً مستقلاً عند فيرما (Fermat (١٦٠١ ـ ١٦٦٥))، إلا أن هذا لا ينفي، بل يؤكدُ، أنّ الطوسي، كان قد عَمد في نهاية القرن الثاني عشر، إلى طرح ومعالجة مواضيع كان المؤرِّخون يُرجعون الفضل في بدء معالجتها إلى رياضيّي القرن السابع عشر. إن إظهار هذا الواقع يشكِّل ـ على ما نعتقد ـ إحدى أهمّ فقرات «مقدّمة» رشدي راشد حول رسالة الطوسي.

ولا شك في أنّ كلاًّ من الاتجاهات العريضة الثلاثة المتمثلة في الهندسة التحليلية والتحليل الرياضي والحساب العددي، التي تفرعت مِن مسألة جبرية، سيقود القارىء إلى مسائل تفصيلية لن تكون دون إثارة فضوله أو دفعه إلى طرح أسئلة قد يقتضي الجواب عليها بحثاً في العمق، في كتاب الطوسي نفسه أو خارجه. فالكتاب جديد صدر للمرة الأولى سنة ١٩٨٦، باللغة الفرنسية. ومؤلّفه الذي كانت له أسبقية وضع شرف الدين الطوسي في المكان الذي يستحقه بين كبار الأسماء الرياضية عبر التاريخ، يعلم ولا شك، أنّ ما كتبه عن أعمال هذا الرياضي، وإن كان الأساس، فهو ليس نهاية المطاف. إن ما كتبه عن الطوسي لا بد من أن يشكّل بداية نقاش خاص برياضيات القرن الثاني عشر وجذور «عصر النهضة» الأوروبي، بدأ مع صدور الكتاب وقد يستمر عشرات السنين. ونذكر، على سبيل المثال، دراسة مهمة يعدّها الأستاذ كريستيان هوزيل حول الطرق العددية في رسالة الطوسي[٥]، كما نذكر أن الظروف سمحت لنا، بناء على فكرة من رشدي راشد نفسه، بالمساهمة في مناقشة أحد هذه المواضيع التفصيلية التي سبق له أن درسها. هذا الموضوع الذي نأمل بنشره في مجال آخر[٦]، يتعلّق برصد الطرق والتقنيات التي سمحت للطوسي بالتوصّل إلى تعبير المشتق لدالّة حدودية وباستخدام هذا التعبير بشكل منهجي في احتساب النهاية العظمى لهذه الدالّة. نسوق هذين المثلين لنؤكد أنه، لا بدّ من أن يجد القارىء المتعمّق في الكتاب مادة أو أكثر للدراسة والبحث، تساهم في إغناء هذا الموضوع سواء على الصعيد الرياضي أو على الصعيد التاريخي.

---

(٥) نشر المقال بالفعل في مجلة: *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 5, no. 2 (September 1995), pp. 219 - 237.

(٦) نشر المقال المشار إليه بالفعل عام ١٩٩٥ قبل نشر الترجمة العربية لكتاب رشدي راشد. انظر: المصدر نفسه، ص ٢٣٩ ـ ٢٦٢.

٣ ـ ترجمة المؤلفات التي تعالج التراث العلمي العربي: الحيثيات والدوافع

وبعد، لا بدّ لنا من كلمة نبدأها بما ينبغي أن تنتهي به وهو اعتذار مسبق، نتوجه به أوّلاً إلى القارىء العربي حول بعض الاصطلاحات الرياضية التي قد تتمايز بين بلد وآخر. وكنا، ونحن نقوم بالترجمة، نفكر في وقع كل كلمة على القارىء، منطلقين من تجربة جديدة لنا في الكتابة الرياضية باللغة العربية؛ لكننا كنا نأمل التعويض عن هذا النقص بالمزيد من التدقيق في معاني الجمل العلمية. وفي مجال المعاني، لا بد من أن نعلن، هنا، أسفنا إلى رشدي راشد الذي يصوغ (بالفرنسية) أفكارَهُ ذات الطابع النظري في جُمل مكثفة محبوكة، لم نُوفَّق غالباً في نقل معناها من دون القضاء على تماسكها أو إخراجها بشكل يكاد يشوهها.

ولقد سبقنا إلى ترجمة رشدي راشد الزميل حسين زين الدين الذي نقل إلى العربية كتاب **تاريخ الرياضيات العربية: بين الجبر والحساب**(٧) الذي وُفِّق إلى ترجمته في عمل نعتقد أنّه جميل وشاق فعلاً. وهنا لا بدّ مِنَ التعبير عن اعتقادنا بأنّه كما صحّ القول بأن عمل الطوسي هو «أهم ما كتب في العربية في الجبر وأصعبه»، فإنّه يصحّ بأن **تاريخ الرياضيات العربية: بين الجبر والحساب** هو أهم ما كُتب في التاريخ العامّ للرياضيات العربية... وأصعبه أيضاً. نسوق هذا الكلام لنشير إلى تأثير هذا الكتاب في الأوساط المعنية بموضوعه. ونذكر على سبيل المثال أثره في التوجّه الحالي لإحدى المجموعات الجامعية التي أطلّت من خلاله على أعمال مؤلّفه وأعمال فريق البحث الذي يرئسه في «المركز الوطني للبحث العلمي» في فرنسا. والمجموعة الجامعية المذكورة تضم بالأساس، أساتذة من الجامعة اللبنانية وزملاء لهم في جامعات فرنسية، آلت على نفسها مرحلياً أن تساهم في ترجمة النتاج العلمي ـ التاريخي لفريق البحث هذا. وهي تسعى لأن تتوسع وتتعاون مع كل من يهمه العمل في هذا الاتجاه. لذلك يمكن اعتبار ترجمة الكتاب الذي بين أيدينا إحدى مساهمات هذه المجموعة. كما كانت إحدى مساهمات هذه المجموعة، ترجمة الزميلين شكر الله الشالوحي (الجامعة اللبنانية) وعبد الكريم علاّف (جامعة كومبياني ـ فرنسا) لكتاب رشدي راشد: **علم الهندسة والمناظر في القرن الرابع الهجري (ابن سهل ـ القوهي ـ ابن الهيثم)**(٨). إلا أننا نعتقد أنّ

---

(٧) انظر الهامش رقم (٣) أعلاه.

(٨) Roshdi Rashed, *Géométrie et dioptrique au Xèmes - XIèmes siècles. Ibn Sahl-Al-Qūhī et Ibn al-Haytham* (Paris: Les Belles lettres, 1992),

نشرت الترجمة العربية بالفعل، انظر: رشدي راشد، **علم الهندسة والمناظر في القرن الرابع الهجري (ابن سهل ـ القوهي ـ ابن الهيثم)**، ترجمة شكر الله الشالوحي، مراجعة عبد الكريم العلاف، سلسلة تاريخ العلوم عند العرب؛ ٣ (بيروت: مركز دراسات الوحدة العربية، ١٩٩٦).

المشروع الأهمّ لهذه المجموعة، هو عملها في ترجمة الموسوعة في تاريخ العلوم العربية التي أدار نشرها رشدي راشد وشارك في كتابتها مع عدد من مؤرخي العلوم يتوزعون على عدّة مراكز تعليم جامعي وبحث عبر أوروبا وامريكا(٩).

إن اتجاه مجموعتنا إلى ترجمة مثل هذه الأعمال يعزّزه الاقتناع بضرورة أن تنتقل إلى العربية صورة علمية دقيقة عن إنجازات أسلافِنا. ذلك أننا نلاحظ في هذا المجال نوعين من الكتابات شديدي الضرر على الحقيقة العلميّة وعلى قضية إظهار الصفحات المشرقة من تاريخنا.

النوع الأول هو سردٌ أشْبَه بسرد المغامرات عن إنجازات هؤلاء، فيه الكثير من المبالغة وتنقصه الدقة غالباً. إن سرداً من هذا النوع يشوّه الحقائق ويُعَرِّض الثقة، حتى بالصحيح منها للاهتزاز.

أما **النوع الثاني** من الكتابات التاريخية والذي نجده ـ للأسف ـ في مراجع غربية واسعة الانتشار، مشهود بمكانتها العلمية، فيهمل الإسهامات العربية جهلاً أو تجاهلاً. إنّه، في أفضل الحالات، يُصوِّر العصر العربي كجسرٍ انتقلت عبره العلوم اليونانية إلى الغرب الذي انطلق منها وطوّرها ابتداءً من «عصر النهضة»(١٠)؛ وفي أسوأ الحالات يصوِّر العصر العربي عصر ركود(١١)، غفا خلاله العلم اليوناني ولم يصحُ إلا في «عصر النهضة» حيث استلمه الأوروبيون.

وفيما نحن نقوم بما نعتقد أنّه لزام علينا في مجال إحياء تراثنا العلمي، نتوخى، من جهة أخرى، المساهمة في إرساء اللغة العلمية العربية وتطويرها. وحبّذا لو كان بإمكاننا استعادة التعابير والمفردات العلمية العربية الأصلية واستخدامها؛ والعربية غنية بالمصطلحات العلمية؛ فلقد كانت لغة العلم في عالم امتد من حدود الصين إلى اسبانيا. وباطلاعنا (المتأخر) على عدد من النصوص الرياضية القديمة تبيّن لنا أن المفردات القديمة هي إجمالاً شديدة الدلالة على المعاني والمفاهيم المقصودة. ولا بد من أن يأتي ذلك اليوم الذي تعود فيه للظهور لتحل محل مفردات وتعابير مستحدثة، مترجمة إجمالاً، أقل ارتباطاً بالمفاهيم التي تدل عليها. فنكون قد حصلنا، إضافة إلى

---

(٩) صدرت هذه الموسوعة بالفعل بالإنكليزية عام ١٩٩٦ عن دار «روتلدج»، كما صدرت بالفرنسية عن دار «سوي» (Seuil) ـ باريس، أواخر عام ١٩٩٧ وبالعربية عن «مركز دراسات الوحدة العربية» ـ بيروت، في أواخر عام ١٩٩٧.

(١٠) انظر مثلاً: N. Bourbaki, *Notes historiques* (Paris: Hermann, [s.d.]), et J. Dieudonné, *Pour l'honneur de l'esprit humain* (Paris: Hachette, 1987).

(١١) انظر مثلاً: Pierre Edouard Marchal, *Histoire de la géométrie*, que sais-je?, 2ème éd. (Paris: Presses universitaires de France, 1948).

الأناقة والدقة في التعبير على استمرارية في اللغة وعلى استعادة اللغة العربية لإحدى أهم صفاتها، كلغة للعلم. إن واقع تعليم العلوم باللغات الأجنبية في لبنان مظهر من مظاهر الأزمة التربوية ـ الاجتماعية التي يعانيها وطننا العربي. وهذا الواقع الذي لسنا هنا بصدد الحديث عن أسبابه أو إبداء الرأي بمعالجته، يترك أثره السلبي من دون شك في مشاريعنا في الترجمة. لكن، مهما كانت درجة نجاح هذه المشاريع أو فشلها، فإن ما يشفع فيها أن دوافعها علميّة بحتة. لذلك، فإن كل قارئ مدعو ـ مشكوراً ـ لكي يكتب لنا ما من شأنه أن يساعدنا على تصحيح الأخطاء أو تنقيح المعاني. وقد نصل إلى ما نرجوه من تنفيذ هذه المشاريع عندما نستطيع أن نحث القارىء على النقد البنّاء، وعلى الجود بما لا نستطيع في هذا المجال.

وفي الختام لا بد لي من أن أنوه بجهود أخي الأستاذ حبيب فارس الذي تعهد منذ البداية قراءة الترجمة وتنقيحها لغوياً، في ظروف كانت الكتابة العلمية بالعربية بالنسبة لي عملاً صعباً للغاية.

ريمس، نيسان/ أبريل ١٩٩٣

نقولا فارس
قسم الرياضيات ـ كلية العلوم في الجامعة اللبنانية
قسم الرياضيات ـ في جامعة ريمس ـ فرنسا
عضو فريق الدراسة والبحث في التراث العلمي العربي
(فريق علمي استشاري لدى المجلس الوطني
للبحوث العلمية) ـ لبنان.

فاتحة

حين كشفت لأول مرة، منذ أكثر من خمسة عشر عاماً، عن أهمية ما يتضمنه كتاب **المعادلات** لشرف الدين الطوسي، كنت قد نهجت له نهجاً مُستتباً ظننت أني قادر على أن أمشي فيه حتى أنتهي من تحقيق هذا الكتاب وتفسيره والتأريخ له في بضع سنين. وقدّر غير ما قدَّرت، فسرعان ما عرفت أن عمل الطوسي هذا هو أهم ما كتب في العربية في الجبر وأصعبه منالاً. ففيه يعرض الطوسي لما ورثه ممن سبقه في نظرية المعادلات الجبرية ليزيده إحكاماً ويقيناً، وفيه أيضاً يأخذ سبل من خلفهم ليبلغ بها نهايتها، وفيه كذلك يأتي الطوسي بما لم يأت به من ورثهم. ولهذا كله تشعبت الطرق إلى تحقيق الكتاب وتفسيره، فكان عليّ قبل المبادرة إلى هذا العمل تحقيق آثار عمر الخيّام التي منها بدأ الطوسي وعليها بنى، حتى لا أثقل نص الطوسي بالإشارات والتعليقات. وكان عليّ أيضاً معرفة سبل الرياضيين العرب قبل الطوسي لتبصر ما قدمه من جديد. وزاد الأمر صعوبة ما بلغه الطوسي نفسه من جهة، وما أصاب كتابه على أيدي المفسرين والنساخ من جهة أخرى. فالطِوسي ـ كما سنرى ـ لم يصل إلى منهج روفيني ـ هورنر في الحل العددي للمعادلات الجبرية فحسب، بل حاول صياغة نظرية كاملة لتبرير هذا المنهج نفسه. وصاغ هذه النظرية باللغة الطبيعية دون اللجوء إلى لغة رمزية. فصار حقاً عليّ واجباً أن أدرك ما قصده الطوسي ـ ولم يكن واضحاً ـ وأن أُبين ما وقع فيه من أخطاء، وكانت خافية مستترة. ولم يكن ذلك بالأمر السهل، إذ تطلّب كثيراً من الجهد والوقت. وسنرى أيضاً، أن الطوسي قد شارف في كتابه هذا، ومن خلال بحوثه الجبرية، بدايات التحليل الرياضي، وانتهى إلى مفاهيم ونتائج، جزم المؤرخون من قبل أنها من بنات أفكار رياضيي القرن السابع عشر. وصاغ الطوسي هنا هذه المفاهيم وتلك النتائج باللغة الطبيعية أيضاً صياغة من يلمح من بعيدٍ عالماً جديداً لم تطأه بعد قدماه. فصار لزاماً عليّ الكشف عما حواه هذا الكتاب من ذلك النظر الرياضي الجديد، سالكاً في هذا الطريق الذي يؤمنني من كل ريب، فلا أحمّل الطوسي ما لا يطيق ولا أعزو إليه جديداً بلا حجة وبرهان. وهذا أيضاً لم يكن من الأمور المتيسرة.

أما نص كتاب الطوسي نفسه في المعادلات فلم يكن يُعرف أنه له ـ حين بدأت عملي هذا ـ إلا في مخطوطة متأخرة النسخ، من أواخر القرن الثامن عشر، كثيرة

الأخطاء. ولما كانت نتائج الطوسي الرياضية قد عزيت ـ كما قلت ـ إلى رياضيين متأخرين، أحجمت عن نشر النص المحقق خوفاً من تضمنه لمفاهيم رياضية أدخلت فيه فيما بعد، وتلاشت هذه العقبة عندما وُفقت لاكتشاف النموذج الذي نقلت منه هذه المخطوطة المتأخرة. فهذا النموذج هو مخطوطة من القرن السابع الهجري نسبت إلى مجهول، حتى عثوري عليها وتأصيلي لها.

وبعد زوال تلك العقبات أصبح ممكناً الإقدام على تحقيق هذا النص تحقيقاً متأنياً، وبذل كل ما أستطيعه من جهود لتفسيره وشرحه والتأريخ له. ومما دفعني إلى مواصلة الجهد والمثابرة عليه، ما يتضمنه كتاب الطوسي من نتائج، وما يحتويه من مناهج، وما يلزمنا به من إعادة التأريخ لبعض فصول الرياضيات.

فسنرى من بين نتائجه: منهج روفيني ـ هورنر، كما سبق أن ذكرنا. وكذلك المشتق لكثيرة الحدود واستعماله له في تحديد النهايات العظمى وحسابها، وأيضاً مميز معادلة الدرجة الثالثة واستعماله له في مناقشة وجود الحل. وباختصار، سنرى في كتاب الطوسي نتائج تُعزى حتى يومنا هذا إلى رياضيي القرن السابع عشر على الأقل، وفصولاً مما سميّ فيما بعد بالهندسة التحليلية.

فإخراج كتاب الطوسي يرفع اللثام عن وجه هام من وجوه الرياضيات العربية لا زال مجهولاً، ويهيىء لنا ما لم يكن ممكناً من قبل، أعني رؤية تاريخية لمن سبق الطوسي ولا سيما الخيام. فلقد ظن مؤرخو الرياضيات العربية أن النظرية الهندسية للمعادلات الجبرية التي صاغها الخيام لأول مرة توقفت بعده حتى القرن السابع عشر، وتحكمت فيهم فكرتان: **الأولى** أن عمل الخيام لم يؤثر قط في تاريخ العلوم الجبرية، **والثانية** أن علينا انتظار «هندسة» ديكارت لكي نجد جديداً في هذا الميدان. وهكذا يبدو الخيام في وهم المؤرخين كنقطة مفردة أو كواحة في صحراء. وسيبدد هذا الوهم ما انتهى إليه الطوسي وهو من خلفاء الخيام.

لهذا صار حقاً واجباً تحقيق هذا الكتاب، والتأريخ له، ونقله إلى إحدى اللغات الأوروبية والتقديم له بما يلزمه من دراسة وتحليل، حتى يتسنى لقارىء العربية التعرف على هذا التراث بصورة لائقة، وحتى يستطيع المؤرخون إعادة كتابة تاريخ الرياضيات بحسب ما تقتضيه المعايير العلمية من أمانة وموضوعية.

تصدير

أولاً: شرف الدين الطوسي ومؤلفاته

هو شرف الدين المظفر (أو أبو المظفر) بن محمد بن المظفر الطوسي. أما مولده وحياته ومماته فلم يقع إلينا الكثير من الروايات في ذلك، ولم تسعفنا كتب الطبقات والمؤلفين إلا بشذرات متفرقة، أما شيوخه في العلوم والفلسفة والرياضيات بخاصة فلا نعرفهم البتة.

فمن نسبته نعرف أنه من طوس بخراسان، ومن القليل الذي نعرفه من سيرته تردُّده على طوس نفسها واحتفاظه بجزء من كتبه فيها. ومما ورد عنه نعرف أيضاً أنه أقام في الموصل وحلب ودمشق ومرّ بهمذان. فيروي القفطي أن أبا الفضل بن يامين المتوفى سنة أربع وستمائة هجرية (١٢٠٧م): «قرأ على شرف الطوسي عند وروده إلى حلب، وكان الشرف مع إحكامه لعلم الرياضة يحكم أشياء أخر من أصول الحكمة»[1]. وكذلك يحدثنا ابن أبي أصيبعة عند كلامه على أبي الفضل الحارثي المتوفى ٥٩٩هـ ـ ١٢٠٢م قائلاً: «وكان قد ورد إلى دمشق ذلك الوقت الشرف الطوسي، وكان فاضلاً في الهندسة والعلوم الرياضية، ليس في زمانه مثله، فاجتمع به، وقرأ عليه، وأخذ عنه شيئاً كثيراً من معارفه»[2].

ومن ابن أبي أصيبعة نعرف أيضاً أن الطوسي أقام بالموصل، فهو يقول: «ولما كان شرف الدين الطوسي بمدينة الموصل، وكان أوحد زمانه في الحكمة والعلوم الرياضية وغيرها، سافر ابن الحاجب والحكيم موفق الدين بن عبد العزيز إليه ليجتمعا به، ويشتغلا

(١) أبو الحسن علي بن يوسف القفطي، تاريخ الحكماء، وهو مختصر الزوزني المسمّى بالمنتخبات الملتقطات من كتاب أخبار العلماء بأخبار الحكماء، تحقيق يوليوس ليبرت (ليبتزج: [ديتريخ]، ١٩٠٣)، ص ٤٢٦.

(٢) أبو العباس أحمد بن أبي أصيبعة، عيون الأنباء في طبقات الأطباء، شرح وتحقيق نزار رضا (بيروت: دار مكتبة الحياة، ١٩٦٥)، ص ٦٧٠.

عليه، فوجداه قد توجه إلى مدينة طوس»[٣]. ويروي ابن خلكان[٤] عن أبي البركات المبارك بن المستوفي صاحب **تاريخ إربل** أن كمال الدين بن يونس العالم المشهور كان من تلاميذ الطوسي، وقد حل عليه **أصول** إقليدس و**المجسطي** لبطلميوس.

وفي هذا الصدد نقرأ لتاج الدين السبكي في **طبقات الشافعية** ما يلي: «ورأيت بخط الشيخ كمال الدين بن يونس على الجزء الأول من إقليدس إصلاح ثابت بن قرة، ما نصه: «قرأت على الشيخ الإمام العالم الزاهد الورع شرف الدين فخر العلماء تاج الحكماء أبي المظفر أدام الله أيامه، بعد عَودِه من طوس هذا الجزء، وكنت حَلَلْتُه عليه نفسي مع كتاب المجسطي، وشيء من المخروطات، واستنجزتُه ما كان وَعَدنا به من كتاب «الشكوك»، فأحضره واستنسخته، وكتبه: موسى بن يونس بن محمد ابن منعه، في تاريخه، هذا صورة خطه، وتاريخ الكتاب المشار إليه، تاسع عشر ربيع الأول سنة ست وسبعين وخمسمائة هجرية»[٥].

وبالنظر في الروايات السابقة يتضح لنا أن تلاميذ الطوسي المذكورين هم من أبناء النصف الثاني من القرن السادس الهجري (الموافق للنصف الثاني من القرن الثاني عشر الميلادي على وجه التقريب). وقد تُوفوا جميعاً في أواخر القرن السادس أو أوائل القرن السابع. ويُستثنى منهم كمال الدين بن يونس الذي كان أصغر تلاميذ الطوسي سناً وأكثرهم شهرة.

وينتهي بنا حديث كمال الدين بن يونس إلى أن الطوسي أقام بالموصل قبل التاسع عشر من ربيع الأول سنة ٥٧٦هـ، أي ١٢ آب/أغسطس سنة ١١٨٠م. وكان ابن يونس نفسه في الخامسة والعشرين من عمره على أكثر تقدير، مما يفسر لنا قراءته على الطوسي أوائل العلوم الرياضية، أي ما كان على الباحث الشاب أن يتقنه. ومن حديث ابن يونس نعرف أيضاً أن الطوسي قد أقام بالموصل أكثر من مرة وأنه كان يتنقل بينها وبين طوس.

ومقابلة الروايات السابقة بعضها ببعض، على الرغم من قلتها، تبين أن الطوسي كان رياضياً ذائع الصيت في العقد الثامن من القرن السادس، يقصده الطلاب ويرحلون إليه. ولم يعمل الطوسي في الرياضيات من جبر وحساب فقط ولكنه كان من أصحاب علم الهيئة، وربما نحا نحو الفلاسفة.

---

(٣) المصدر نفسه، ص ٦٥٩.

(٤) شمس الدين أبو العباس أحمد بن خلكان، **وفيات الأعيان وأنباء أبناء الزمان**، حققه إحسان عباس، ٨ج (بيروت: [د.ن.]، ١٩٧٧)، ج٥، ص ٣١٤، وج٦، ص ٥٢ ـ ٥٣.

(٥) تاج الدين أبو النصر عبد الوهاب بن علي السبكي، **طبقات الشافعية الكبرى**، تحقيق محمود محمد الطناحي وعبد الفتاح محمد الحلو (القاهرة: [د.ن.، د.ت.])، ج٨، ص ٣٨٦.

هذا كل ما نعرفه عن الطوسي، وهو قليل. فبعد العقد الثامن من القرن السادس تختفي آثاره من كتب المؤرخين القدماء. ولم يزد المحدثون على القدماء شيئاً، إلا وهماً وقعوا وأوقعوا الآخرين فيه[٦]، ألا وهو أن الطوسي كان على قيد الحياة سنة ست وستمائة للهجرة (١٢٠٩م) ويرجع هذا الوهم إلى خطأ ارتكبه أحد النساخ[٧]. فأخبار الطوسي كلها ترجع إلى ما قبل نهاية القرن السادس، فهو إذاً من أبناء النصف الثاني من هذا القرن، بلغ أوج نشاطه وشهرته في العقد الثامن منه.

ففي هذه الفترة على وجه التقريب ألف الطوسي ما نعرفه من كتبه ورسائله، وهي في الرياضيات، باستثناء رسالته المشهورة في الأسطرلاب الخطي أو ما سُمي «بعصا الطوسي». وأهم ما ألف الطوسي في الرياضيات: رسالة «في المعادلات»، ورسالة «في الخطين اللذين يقربان ولا يلتقيان» وأخيراً رسالة في «عمل مسألة هندسية». ولنأت على هذه الرسائل تباعاً، ولنبدأ برسالته «في المعادلات»:

لم تذكر كتب المؤلفين والطبقات هذه الرسالة كما لم تذكر رسائل الطوسي الأخرى، ولم يُشر إليها إلا في مؤلفات الرياضيين وكتبهم، ففي رسالة **نور الدلالة في علم الجبر والمقابلة** للخلاطي نقرأ ما يلي: «والمسائل الجبرية تنتهي إلى خمسة وعشرين بمعادلة الكعاب وهو ما أظهره أستاذ أستاذي شرف الدين الطوسي نور الله ضريحه، إلا أنه لم يذكر فيه من الفروع والمسائل التي تقع في تلك الأصول شيئاً»[٨]. ووصف الخلاطي هذا يرسم معالم كتاب الطوسي في المعادلات كما سنرى من بعد. أما النص الثاني الذي يشير مؤلفه فيه إلى الطوسي فهو رسالة **نصاب الحبر في حساب الجبر** لإسماعيل المارديني المعروف بابن فلوس، ويقول فيه بعد الكلام على معادلات الدرجة الأولى والثانية: «وفي التحقيق إن مسائل الجبر لا تتناهى ولا تنحصر في هذه الست على ما ذكره الطوسي رحمه الله»[٩]. ثم بعد أن عدد معادلات الدرجة الثالثة وزادها على المعادلات الأول يكتب: «فهذه خمس وعشرون بعضها يمكن إخراجه بتلك الست

---

(٦) وقع في هذا الوهم كل من أرّخ للطوسي.

(٧) بعث الطوسي من همذان برسالة إلى شمس الدين أمير الأمراء النظامية، وهي الرسالة التي ننشرها هنا محققة: «في عمل مسألة هندسية». ولقد ذكر الطوسي في أول الرسالة السنة التي حررها فيها. ولكن سقط العقد والسنة ولم يبق إلا القرن، فنقرأ: «ببلد همذان سنة [...] وخمسمائة هجرية» (انظر نص الرسالة). وأخطأ ناسخ مخطوطة ليدن عندما نقل عن الأصل فقرأ «سنة»: «ستة»، وحتى تتسق العبارة لديه كتب «ستمائة» بدل «خمسمائة». فأصبحت العبارة: «ببلد همذان سنة ست وستمائة هجرية» وردد هذا بعده المؤرخون.

(٨) الخلاطي، **نور الدلالة في علم الجبر والمقابلة** (مخطوطة دنشكاه، جامعة طهران، رقم ٤٤٠٩)، ص٢.

(٩) شمس الدين الماريني، **نصاب الحَبر في حساب الجبر** (استنبول، مخطوطة فيض الله، ١٣٦٦)، ص ١٣.

المشهورة، والتي لا يمكن إخراجها بها لا بد فيها من طريقة عمر الخيام المستخرجة من مقالات ديوفنطس أو طريقة الجدول التي وضعها الإمام شرف الدين المظفر بن محمد الطوسي، وتُخرجها عليه»[١٠].

وينقل لنا ابن الهائم أيضاً ما قاله تاج الدين التبريزي في هذا الصدد عند كلامه على معادلات الدرجة الثالثة: «فلا يمكن استخراجها إلا بالبراهين الهندسية كما ذكره عمر الخيام، أو بالطريق المُجَدْوَل كما ذكره شرف الدين المظفر بن محمد الطوسي»[١١].

وهذه الروايات كلها تثبت من وجه أن كتاب الطوسي كان معروفاً لدى رياضيي القرن السابع وكان في متناول أيديهم وأن «طريقة الجدول»، والمقصود بها الحل العددي للمعادلات بمنهج روفيني ـ هورنر، تنسب إلى الطوسي نفسه، الذي لجأ إليها في هذا الكتاب، من وجه آخر.

ونعود إلى هذه الرسالة كما هي بين أيدينا الآن. ويبدو لأول وهلة عند النظر فيما نملكه من مخطوطات لها أن هذه الرسالة لم تصل إلينا بتحرير الطوسي نفسه ولكن بعد أن «لخصها» مجهول، على زعمه، كما يقول في الفقرة الأولى من الرسالة.

وإنه لأمرٌ خطير إن صح قول هذا المجهول بحذافيره، فالسؤال إذاً هو ما مدى هذا التلخيص وهل أمكن المجهول ذلك؟

حرر الطوسي رسالة أخرى سنتكلم عليها فيما بعد «في الخطين اللذين يقربان ولا يلتقيان»، وهو مما عالجه في رسالته هذه. ومن ثمة، فمقارنة النصين هامة لتوضيح مدى هذا التلخيص. وهذه المقارنة تثبت بما لا ريب فيه أنهما يتضمنان الأشكال نفسها الرياضية بل الجمل والتعابير نفسها في أغلب الأحيان. وهذا الدليل يثبت لنا أن الناقل المجهول لم يمكنه إلا أن يتبع الطوسي عند كلامه على الأشكال الرياضية وبراهينها، ويقوم بنقله. وكيف يمكن غير ذلك؟

والنظر المتفحص لبنية الرسالة نفسها وتتابع فصولها من مقدمات احتاج الطوسي إليها فيما بعد، حول معادلات القطوع المخروطية وعملها، وتصنيف للمعادلات وحلّ كل واحدة منها، ينتهي بنا إلى أن هذا المجهول لم يمكنه تلخيص أو تهذيب شيء من هذا. فمقارنة أجزاء الرسالة بعضها ببعض تبين تبييناً واضحاً أن ذلك المجهول لم يكن أمامه إلا نقل ما كتبه الطوسي، ولكن ربما حذف فاتحةً لرسالة الطوسي شرح فيها هذا

---

(١٠) المصدر نفسه، ص ١٤.

(١١) أبو العباس شهاب الدين أحمد بن الهائم، **الممتع في شرح المقنع في علم الجبر والمقابلة**، (استنبول، مخطوطة شهيد علي باشا، رقم ٢٠٧٦).

الأخير مقصده وسبيله. ويحملنا على هذا الاعتقاد بداية الطوسي بالأشكال الرياضية رأساً دون التمهيد لذلك، ولا سيما أن رسالته هذه من مطولات الجبر العربي إن لم يكن الرياضيات العربية بأجمعها. ومما لا شك فيه أنه حذف الجداول التي أقامها الطوسي للحل العددي للمعادلات، مما جعل فهم الرسالة ممتنعاً على الباحثين. فالطوسي لم يتوان في كل معادلة عن إقامة الجداول العددية، وشرح عمل الجداول المناسبة للمعادلات، إلا أنه من الصعوبة بمكان تصوّر ذلك العمل بعد حذف «المجهول» لتلك الجداول. صحيح أن هذا الحذف لم يغيّر كثيراً في حقيقة النص وجوهره، إلا أنه ضاعف من صعوبة فهمه وتحقيقه.

ومما تجدر الإشارة إليه أن نقل هذا المجهول لرسالة الطوسي تم في فترة مبكرة، أعني قبل نهاية القرن السابع الهجري ـ الثالث عشر الميلادي ـ على أكثر تقدير، فهذا التاريخ هو تاريخ إحدى مخطوطات الرسالة التي نقلت هي نفسها عن سابقة لها.

لم يعرف حتى عهد قريب لرسالة الطوسي إلا مخطوطة واحدة محفوظة بخزانة المكتب الهندي بلندن، تم نسخها في أواخر القرن الثامن عشر الميلادي. ومنذ سنوات عثرتُ على مخطوطة أخرى محفوظة بخزانة مكتبة خدابخش بالهند ضاعت منها ورقاتها الأولى ولم يُعرف أنها للطوسي فنسبت إلى مؤلف مجهول، وهكذا ذكرت في سجلات المكتبة. وبمقارنة هذه المخطوطة مع الأخرى، تبين أنها النموذج الذي نقلت عنه مخطوطة لندن. وأخيراً عثرت باحثة إيطالية في فينيسيا على ثماني ورقات من رسالة الطوسي ـ توقف الناسخ بعدها عن الكتابة ـ وهي تمثل خمس الرسالة على وجه التقريب. هذا كل ما نعرفه عن مخطوطات رسالة الطوسي. ولنتكلم الآن على هذه المخطوطات:

١ ـ **المخطوطة الأولى**، وهي نسخة خدابخش ـ پاتنا ـ ورقمها مجموعة ٢٩٢٨، وأشرت إليها بالحرف «ب» وهي أقدم مخطوطة لرسالة الطوسي، كما سبق أن ذكرت، وتاريخ نسخها هو السابع من رمضان عام سبعمائة وستة وتسعين للهجرة، الموافق للتاسع والعشرين من حزيران عام ألف ومائتين وسبعة وتسعين للميلاد، ولا نعرف من ناسخها ولا مكان كتابتها، وهي ضمن مجموعة من رسائل رياضية أخرى.

أما المخطوطة نفسها فعليها آثار رطوبة طمست كثيراً من سطورها وتفسر لنا سبب ضياع الورقات الأولى قبل ترميمها، وهو حوالى ربع المخطوطة. وأما الباقي ـ وهو ستٌ وعشرون ورقة ـ فحفظ ثلاثة أرباع النص. وقد كتب على كل ورقة تعدادها بالأرقام، إلا أنه عند الترميم على ما يبدو ـ بدلت الورقة الأولى بالثانية، وظلت الأخريات على حالها. وكتبت هذه الأرقام بعد ضياع الورقات الأولى.

وبما أن ناسخ مخطوطة لندن نقل هذه الأوراق من «ب» وذلك في سنة ١١٩٨هـ ـ ١٧٨٤م فمن البيّن أن هذه الأوراق قد فقدت بعد هذا التاريخ. وكل ورقة من هذه

طولها ٢١,٩ سنتيمتراً وعرضها ١٣,٢ سنتيمتراً، وتتضمن ثلاثين سطراً كل منها يحتوي على خمس وعشرين كلمة تقريباً. والأوراق كلها من نوع واحد كتب فيها النص بحبر أسود إلا العناوين والرسوم وعلامات انتهاء الفقرات فبحبر أحمر.

وأما خط المخطوطة فهو نستعليق. وليس في هوامشها شيء بغير خط ناسخها، بل ألحق بخطه، استدراكاً لِما سها عنه خلال كتابته في مواضع يسيرة. فلقد أضاف في سبعة مواضع إما كلمة أو عبارة، مبيناً بالعلامة المعروفة مكان السهو والاستدراك. ويدل هذا على أن الناسخ عارض ما نقله بالنموذج المنقول منه، وهذا ما يقوله هو نفسه في آخر المخطوطة: «قوبل وصحح بقدر الوسع». أما الأصل الذي نقل عنه فلا نعرف عنه شيئاً.

وتتّبع أخطاء المخطوطة، لغويةً كانت أو رياضية، وبخاصة ما ينقصها من كلمات وعبارات لاستقامة المعنى، يبين لنا أنها نسخت بعناية وعورضت بالأصل الذي نقلت عنه دون لَحَق اختلط بالنص المنقول. وينقصها كثير من الكلمات والعبارات، موروثة من النسخة التي نقلت عنها كما يتضح عند النظر في كل منها.

٢ ـ **المخطوطة الثانية** وهي نسخة المكتب الهندي، بلندن، مجموعة لوث ٧٦٧ وأشرت إليها بحرف «ل»، وتضم هذه المجموعة رسائل هامة لثابت بن قرة وحفيده إبراهيم بن سنان، والقوهي، وابن الهيثم، ونصير الدين الطوسي، ومن ثم حظِيتْ باهتمام المؤرخين منذ نهاية القرن الماضي وبداية هذا القرن كما تبينه سجلات المكتبة نفسها. فمن الثابت إذاً أن صمت المؤرخين إزاء رسالة الطوسي لم يكن عن جهل بها، ولكن لما قابلهم من صعاب لإدراك أهميتها وفهم فحواها. ونسخة رسالة الطوسي تقع ما بين الورقة ٣٥ ـ وجه، والورقة ١٧٩ ـ وجه.

أما تاريخ نسخ هذه المجموعة فيمكن تقديره بدقة. فلقد كتب الناسخ تاريخ انتهائه من أول رسالة منها أو معارضتها بالأصل، وهو ١٤ شوال سنة ١١٩٨هـ الموافق ٣١ آب/أغسطس ١٧٨٤م، ومن ثم يمكن أن نفترض أنه أتم رسالة الطوسي في السنة نفسها أو في الشهور الأولى من السنة التالية على أكثر تقدير.

أما المخطوطة نفسها فقد كتبت على ورق مصقول ناعم حنّائي اللون من نوع واحد. ولقد كتب على كل ورقة تعدادها بالأرقام، وذلك بحروف الطباعة، مما يبين أن هذا من عمل المكتبة نفسها. وتجليد المجموعة يرجع إلى القرن الثامن عشر عند كتابتها، وهو في جلد بني عليه زخرفة بماء الذهب. ورسم الناسخ في كل صفحة من صفحات المخطوطة ـ وطولها ٢٢,٩ سنتيمتراً وعرضها ١٣,٨ سنتيمتراً ـ مستطيلاً بماء الذهب طوله ١٦,٦ سنتيمتراً وعرضه ٨,٩ سنتيمتراً ـ كتب داخله النص، وتضم كل صفحة ١٢ سطراً، يحتوي كل منها على ١٦ كلمة تقريباً. وكتب الناسخ النص بحبر أسود وترك بعض العناوين وعلامات انتهاء الفقرات ليكتبها بالحمرة عند انتهاء النسخ، ولكنه أهمل ذلك.

ورسم الأشكال الهندسية بالحمرة في ورقتين ألحقهما بآخر المخطوطة.

وبمقارنة هذه المخطوطة بالمخطوطات التالية من المكتب الهندي لوث ٧٤٣، ٧٤٤، ٧٤٥ ـ والأولى تحتوي على بعض المتوسطات من تحرير نصير الدين الطوسي وكذلك ٧٤٤، بينما تحتوي ٧٤٥ على تحرير نصير الدين الطوسي **لمخروطات** أبلونيوس ـ يتضح لنا بما لا يدع مجالاً للشك أنها من كتابة الناسخ نفسه، وربما في فترات متقاربة. فقد نسخ على سبيل المثال مخطوطة لوث ٧٤٥ في ٢١ رمضان ١١٩٨، أي قبل ٢٣ يوماً من بدئه بالمخطوطة التي تحتوي رسالة الطوسي. ونوجز كلامنا هنا فنقول: يبدو أن هذه المخطوطات نسخت في الهند في تلك الفترة، وأن الناسخ من أصحاب المهنة لا من طالبي العلم. وكتبها، كالأخريات، بخط نستعليق مع الحرص على الزخرفة والتجميل. وإذا اقتصرنا على نسخة رسالة الطوسي فلن نجد في هوامشها إلا أربعة مواضع كتب فيها مستدركاً لما سها عنه مع الإشارة إلى مكان السهو في النص بالعلامة المعروفة. ونظن أن تلك الاستدراكات تمت في أثناء النسخ لا خلال معارضة ما كتب بالنص الأصل. والدليل على هذا هو عدد الكلمات والعبارات التي سها عنها الناسخ عند نقله من النموذج.

وبالمقارنة بين النسختين «ب» و«ل» انتهينا إلى ما يلي:

ـ كل الكلمات وكل العبارات التي تنقص المخطوطة «ب» لاستقامة المعنى تنقص المخطوطة «ل».

ـ كل الكلمات والعبارات التي تنقص المخطوطة «ل» فقط حتى يستقيم المعنى لا تنقص «ب».

ـ كل الأخطاء التي نقابلها في «ب» نجدها أيضاً في «ل»، مهما كان نوعها.

ـ ونقيض هذا ليس صحيحاً، فهناك عدد كبير من الأخطاء في «ل» لا نجدها في «ب» وهي أخطاء ترجع بلا ريب إلى ناسخ «ل».

كل هذا وغيره يدل دلالة واضحة على أن ناسخ «ل» لم يكن أمامه إلا مخطوطة «ب»، فهي النموذج الذي عنه نقل.

٣ ـ **مخطوطة مدينة البندقية:** شرقيات ١١٩٠٧، Codice CCXXIX مكتبة مرشيانا وأشير إليها بالحرف «ف».

وهي من مجموعة الأستاذ إميليو تزا. وقد عثرت على هذه المخطوطة الباحثة الإيطالية الآنسة جيوزيبينا فرانشيني (Giuseppina Franchini) وتفضلت مشكورة بإرسال صورة لنا من هذه المخطوطة. وتحتوي هذه المجموعة على ترجمة فارسية لكتاب بهسكرا الهندي **ليلافاتي** إلى الفارسية، ثم مقدمة تحرير **مخروطات** أبلونيوس ليحي بن

الشكر المغربي الأندلسي، وقسم من رسالة الطوسي. ونقرأ في القسم الداخلي من الغلاف في أعلى الصفحة ما يلي:

«The Lilavati trans. in Pers. by Fayd, Calcutta 1827»

والمخطوطة تحتوي على ١٢٦ صفحة، منها خمس بيضاء، كل منها طولها ٤٦,٥ سنتيمتراً وعرضها ٢٩,٥ سنتيمتراً. أما رسالة الطوسي فهي في القسم العربي وكتب على كل ورقة منها تعدادها بالأرقام، وهي بين ورقة ١ ـ ظهر، وورقة ٨ ـ ظهر، وعدد سطور كل صفحة يتراوح بين ١٨ ـ ٢٦ سطراً في الورقات الأولى ثم يقرب من الستة والعشرين في الأخرى، ويضم كل سطر ٢٠ كلمة تقريباً.

ولقد كتبت هذه النسخة بحبر أسود. أما خط المخطوطة فهو أيضاً نستعليق ومن الواضح أن ناسخها لم يواصل النسخ لسبب ما، ولم يعارض ما نسخه بالأصل، ولا نجد في هوامشها أي لَحَق سواء من الناسخ أو من غيره.

ولم يمكننا مقارنة هذه المخطوطة بمخطوطة «ب» لضياع هذا الجزء من «ب». ومقارنتها مع «ل» تبين لنا بوضوح أن المخطوطتين مستقلتان. ويكفي أن نذكر هنا أن «ل» ينقصها فقرة كاملة، ١٢ سطراً تقريباً، نجدها في «ف» ـ انظر ص ٢٢، هذا عدا فقرتين أخريَيْن قصيرتين، الأولى سطران والثانية سطر واحد ـ انظر ص ٢٨ وص ٤٢، زد على هذا أنها تنقص عن «ف» أربع كلمات وست عبارات (من كلمتين على الأقل). أما «ف» فهي أيضاً تنقص عن «ل» خمس كلمات. ثم إن المقارنة بين المخطوطتين تبين أيضاً أخطاء مشتركة كثيرة، منها تكرار عبارة «ضعف المطلوب» في المخطوطتين (انظر ص ٢٦ سطر ١٨) أو كتابة «الجذور» بدلاً من «الجذر» (انظر ص ٢٩ سطر ١٦)، وأيضاً كتابة بغير «يصير» في «ف» «ويصر» في «ل» (انظر ص ٤٠ سطر ١٨) أو «ننقل»: «ننقله» (انظر ص ٤٥ سطر ١٨).

وبعد النظر في المخطوطتين والمقارنة بينهما يبدو لنا ـ لكثرة الأخطاء المشتركة، ولما قلناه قبل هذا ـ أن لهما الأصل نفسه ، وهذا يعني أن مخطوطة «ف» قد نقلت عن مخطوطة «ب» نفسها، وهذا هو الأرجح، ومهما كان الأمر فمخطوطة «ف» أفضل من «ل». ففي هذه الأخيرة كما ذكرنا تنقص فقرة كاملة طويلة وفقرتين قصيرتين بينما لا تنقص «ف» ـ بالنسبة إلى «ل» ـ أية فقرة. وهذا ضمان للنص المحقق.

ومن ثم قام تحقيق الخمس الأوّل من رسالة الطوسي معتمداً على «ف» و«ل»، والثلثين الأخيرين منها معتمداً على النموذج نفسه، أي على مخطوطة «ب»، وما تبقى ـ وهو جزآن من خمسة عشر جزءاً ـ اعتمد تحقيقه على «ل» فقط.

أما الآن فلا مناص من الحديث عن اسم رسالة الطوسي، الذي لم تذكره الكتب والتراجم من قبل، واكتفت بالإشارة إلى ما تعالجه تلك الرسالة من موضوعات، مثل

«المعادلات» و«طريقة الجدول». ولهذا كان أمامنا أن نختار بين تسمية الكتاب بموضوعه العام والوقوف مثلاً على «رسالة في الجبر والمقابلة» متابعين في هذا تسمية الخيام لرسالته، أو الأخذ بما اختاره ذلك المجهول الذي نقل الرسالة وهو «المعادلات»، فهو يقول «وسميته بالمعادلات»، وكان هو الاسم الذي سميت به الرسالة. فناسخ «ب» يكتب عند انتهائه من الرسالة: «تم الكتاب الموسوم بالمعادلات». ولهذا آثرنا هذا الاسم الذي ربما يكون من «المجهول»، ولكنه يعبّر تعبيراً صحيحاً عن فحوى الكتاب ومضمونه، بل يعبّر عن تلك الخطوة النظرية التي انتهت بانبثاق فصل جديد بين الجبر والهندسة، اسمه «المعادلات الجبرية».

وبعد أن فرغنا من صفة مخطوطات الرسالة، بقي أن نصف نسخ مؤلفات الطوسي الرياضية الأخرى. فالأولى هي «في الخطين اللذين يقربان ولا يلتقيان». ولا نعرف لهذه الرسالة إلا مخطوطة واحدة متضمنة في مجموعة من رسالتين، هذه ورسالة أخرى هي شرح «لتذكرة» نصير الدين الطوسي، وهو مخطوطة آيا صوفيا رقم ٢٦٤٦ باستانبول. ومن نهاية الرسالة الأولى ـ وهي التذكرة ـ نعرف أن الناسخ هو محمد بن مصطفى بن موسى الإيانلوغي المشهور بالصوفي وكتبها في أوائل جمادى الأول سنة ٨٢٩هـ، أي في نهاية شهر آذار/ مارس أو بداية شهر نيسان/ أبريل سنة ١٤٢٦م. وتقع نسخة رسالة الطوسي هذه في آخر ورقة من ورقات المخطوطة ـ الورقة ٧١ ـ وهي من الورق نفسه وبالخط نفسه، وهو خط نستعليق. وطول كل ورقة ٢٧,٦ سنتيمتراً وعرضها ١٨,٥ سنتيمتراً، أما النص فطوله ٢٤,٩ سنتيمتراً وعرضه ١٣,٢ سنتيمتراً وكل صفحة تحتوي على ٣١ سطراً، وكل سطر على ١٩ كلمة تقريباً. وكتب بحبر أسود إلا الأشكال الهندسية فرسمت بحبر أحمر. وليس هناك لحقٌ بالهوامش، وإن كان الناسخ قد عارض الرسالة الأولى من المجموعة ـ وهي رسالة نصير الدين ـ بالأصل، فليس هناك ما يدل على أنه قام بهذا في رسالة شرف الدين. وهذه المجموعة من وقف السلطان محمود خان. وسأشير إليها بالحرف «أ». أما الرسالة الثانية من رسائل الطوسي الرياضية، فهي رسالة بعث بها إلى مراسل له يُدعى شمس الدين. وهناك مخطوطتان لهذه الرسالة، الأولى في مجموعة رقم سميث ـ شرقيات ٤٥ بجامعة كولومبيا بنيويورك بين الصفحتين ٢٩ و٣٥، والأخرى في مجموعة رقم شرقيات ١٤ بليدن بين صفحات ٣٢٣ وجه ـ ٣٢٦ وجه. ولقد بيّنا أن هذه المخطوطة الأخيرة ما هي إلا نسخة عن المخطوطة الأولى، كتبت في القرن السابع عشر، ووصفنا حينئذ المخطوطتين بالتفصيل[١٢]. ولهذا سنأخذ عند التحقيق بالمخطوطة الأولى فقط، والتي سنشير إليها بالحرف «ك».

---

(١٢) انظر: عمر الخيام، **رسائل الخيام الجبرية**، حققها وترجمها وقدم لها رشدي راشد وأحمد جبّار، مصادر ودراسات في تاريخ الرياضيات العربية؛ ٣ (حلب: معهد التراث العلمي العربي، ١٩٨١)، ص يط ـ كا.

ثانياً: شرف الدين الطوسي ونظرية المعادلات

تُعد دراسة نظرية المعادلات الجبرية من أكثر فصول الرياضيات الكلاسيكية أهمية. لم يفت هذا جمهرة مؤرخي الرياضيات، وهذا ما حثهم على الرجوع إلى الماضي السحيق لاكتشاف بذور هذه النظرية. وعسر علينا كتابة ذلك التاريخ هنا، إذ أن هذا يرجع إلى التأريخ للجبر نفسه مما يحتاج إلى كتاب آخر قائم بذاته. ويكفي ـ لما نحن فيه ـ أن نذكّر بأن أول من صاغ نظرية لمعادلات الدرجة الأولى والدرجة الثانية هو محمد بن موسى الخوارزمي في كتابه المشهور **المختصر في حساب الجبر والمقابلة**. ولا يعني هذا أنه لم يكن قبل الخوارزمي أبحاث في المعادلات. فمن المعروف أن البابليين قد عالجوا خمسة وعشرين قرناً قبل الخوارزمي مسائل من الدرجة الأولى والثانية، ومن المعروف أيضاً أن كتاب **الأصول** لإقليدس يحتوي على أعمال هندسية لمسائل من الدرجة الثانية، أرجعها الرياضيون العرب لأول مرة ـ مثل ثابت بن قرة ـ إلى معادلات جبرية، ومن المعروف كذلك أن ديوفنطس الإسكندراني في كتابه المشهور **المسائل العددية** قد بحث في عديد من المسائل من الدرجة الثانية، بل من درجات أعلى، تصل إلى التاسعة، ومع هذا لم يسبق أحد الخوارزمي في تصور علم جديد، أعني الجبر، سيتطلب تكوينه عدم الاكتفاء بمجرد التوقف عند لوغريتميات الحلول كالبابليين، ولا عند العمل الهندسي الصرف للمسائل كإقليدس، ولا عند الحل العددي للمعادلات كديوفنطس، بل صياغة لنظرية المعادلات. وإن لم نفهم، بوضوح، هذا الفرق بين ما قام به الخوارزمي وما قام به سابقوه، لم ندرك شيئاً من مساهمة الخوارزمي في الرياضيات(١٣).

فنظرية المعادلات تظهر منذ البدء وسيلة لتكوين علم الجبر نفسه، وتحتل مكان الصدارة فيه، فهي تحتل الجزء الأكبر والأهم من كتاب الخوارزمي.

أما خلفاء الخوارزمي، فلقد اتجهوا جهة تطوير الحساب الجبري المجرد، وقد أدى هذا الاتجاه ـ كما سبق أن بيّنا ـ إلى خلق جبر متعددات الحدود(١٤)، وخف الاهتمام بنظرية المعادلات الجبرية في ذاتها. ويكفي النظر إلى كتاب **الفخري** للكرجي على سبيل المثال لتبيّن أنها لم تعد بعد تحتل مكان الصدارة. ومع هذا فإن البحث فيها لم يتوقف. فمن المعروف أن الجبريين من أمثال سنان بن الفتح والكرجي درسوا معادلات الدرجة الثانية بصورة عامة. ومما لم يكن معروفاً من قبل أن الجبريين من

---

(١٣) انظر: Roshdi Rashed, *Entre arithmétique et algèbre, recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, collection sciences et philosophie arabes (Paris: Les Belles lettres, 1984), pp. 17 sqq.

(١٤) المصدر نفسه.

خلفاء الكرجي حاولوا حل معادلة الدرجة الثالثة بطريقة جبرية، فعادة ما كانت تُنسب مثل هذه المحاولات إلى الرياضيين الإيطاليين من القرن الرابع عشر[١٥].

ويشرح لنا أبو الحسن علي أبو المسلّم بن محمد علي بن الفتح السُلَمي اهتمام الرياضيين بالحل الجبري لمعادلة الدرجة الثالثة وتوقفهم دونه، فيقول فيما زاد على ثلاثة أنواع يعادل بعضها بعضاً: «فإن أكثره ممتنع وما يمكن استخراجه منها يسيرٌ يعسرُ العمل فيه. فيصعب جداً وتختلف طرق استخراجه، ولذلك لم يذكره كثير من الحساب بل حضروا الممكن منه...»[١٦]. ثم يعرض فيما بعد للممكن منه قائلاً: «كعاب وأموال وأشياء تعدل عدداً. ولهذا النوع شرطان: أحدهما المناسبة والثاني أن يكون ثلث عدد الأموال جذراً لثلث عدد الأشياء، فإذا وجد الشرطان خرجت بالعمل». أما الآخر فكما قال: «كعب واثنا عشر شيئاً تعدل ستة أموال واثنين وسبعين من العدد؛ فهو ممكن لوجود الشرطيْن، فزادها هنا شرط ثالث وهو أن يكون الأشياء مع الكعب، فلو كانت الأموال مع العدد لم تخرج لها تذكرة بعدُ»[١٧]. وبالنظر إلى ما ذكره السُلَمي يتبين لنا أن هذين النوعين هما:

$$x^3 + ax^2 + bx = c \qquad x^3 + bx = ax^2 + c$$

ويفرض السُلمي منذ البداية أن $a^2 = 3b$، ثم يستخرج جذراً موجباً لكل واحدة من المعادلتين:

$$x = \left(\frac{a^3}{27} + c\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{a}{3} \qquad x = \left(c - \frac{a^3}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{a}{3}$$

ومن ثم فالسلمي يرجع المسألة ـ باستعمال تحويل أفيني ـ إلى «الصورة القانونية». ولكن بدلاً من محاولة تحديد «المميز»، فإنه يعادل معامل المجهول ذي القوة الأولى صفراً، وذلك ليردّ المسألة إلى مجرد استخراج جذرٍ تكعيبي. فهو على سبيل المثال، يلجأ في المعادلة الأولى من الاثنتين السابقتين إلى التحويل الأفيني:

$$x \to y - \frac{a}{3},$$

ومن ثم ترجع المعادلة إلى معادلة من الصورة:

$$y^3 + py - q = 0,$$

---

(١٥) المصدر نفسه.

(١٦) أبو الحسن علي أبو المسلّم بن محمد بن الفتح السلمي، **المقدمة الكافية في حساب الجبر والمقابلة وما يعرف قياسه من الأمثلة**، (الفاتيكان، مخطوطة مجموعة سباط، رقم ٥)، ص ٩٢ظ.

(١٧) المصدر نفسه، ص ٩٣ظ ـ ٩٤و.

مع $p = b - \frac{a^2}{3}$، $q = c + \frac{a^3}{27} + \left(b\frac{a}{3} - \frac{a^3}{9}\right)$. فإذا فرضنا $b = \frac{a^2}{3}$ ينتج

$$y^3 = c + \frac{a^3}{27} ,$$

ومنه قيمة x.

هذه هي أهم الاتجاهات في نظرية المعادلات في الجبر الحسابي، الذي أصبحت هذه النظرية فيه ـ كما قلنا ـ هي إحدى فصول هذا الجبر لا أكثر.

وسيختلف الوضع اختلافاً كبيراً عندما يبدأ الرياضيون العرب بإنشاء علاقات جديدة بين الجبر والهندسة. ففي القرن الرابع الهجري (العاشر الميلادي) بخاصة ترجم كثير من الرياضيين المسائل المجسمة التي لا يمكن عملها بالمسطرة والفرجار بلغة الجبر، وهذا كان لأول مرة في تاريخ الرياضيات. فعلى سبيل المثال ترجمت مسألة تقسيم الزاوية ثلاثة أقسام، ومسألة إيجاد خطين بين خطين لتتوالى الأربعة متناسبة، وعمل المسبع في الدائرة، وغيرها بلغة الجبر، أي تُرجمت إلى معادلات جبرية. ولم يكتف الرياضيون بترجمة تلك المسائل التي ورثوها عن اليونان بلغة الجبر بل أضافوا إليها مسائل أخرى من النوع نفسه وجدها علماء الهيئة، مثل تحديد أوتار بعض الزوايا لعمل جداول الجيوب، ومن بين من شاركوا في هذا الاتجاه: الماهاني، والخازن، والبيروني، وأبو نصر بن عراق.

ومن جهة أخرى قام الرياضيون بحل المعادلات من الدرجة الثالثة بطريق آخر غير الطريق الجبري، إذ لجأوا إلى ترجمة المعادلات الجبرية بلغة الهندسة، وذلك حتى يمكنهم استعمال القطوع المخروطية وتقاطعها لحل تلك المعادلات. فلقد كانت هذه الوسيلة معروفة منذ الرياضيات الهلينستية وبعدها في الرياضيات العربية عند القوهي وابن الهيثم على سبيل المثال، لمعالجة المسائل المجسمة، لا المعادلات. وبدأ بعض المهندسين من أمثال أبي الجود بن الليث استعمالها لحل معادلة أو أخرى من معادلات الدرجة الثالثة.

ولعل أول صياغة نظرية حقيقية لهاتين الترجمتين، أو لتلك العلاقات الجديدة بين الجبر والهندسة، أو لهذا الجدل بين الجبر والهندسة الذي هو لب الرياضيات الكلاسيكية منذ بدايتها في القرن الرابع الهجري (العاشر الميلادي) تقريباً، هي صياغة أبي الفتح عمر الخيام.

قصد الخيام ـ على نقيض من سبقه ـ تجاوز المعالجة الجزئية إلى الصياغة النظرية، فهو لم يعالج هذه المسألة أو تلك كما فعل أبو الجود، ولكنه رام تأسيس نظرية المعادلات من جديد، أو كما قال: «وليس لواحد منهم <من سابقيه> في تعديد أصنافها وتحصيل أنواع كل صنف منها والبرهان عليها كلام يعتدّ به إلا صنفين

سأذكرهما. وإني ولم أزل شديد الحرص على تحقيق جميع أصنافها وتمييز الممكن من الممتنع في أنواع كل صنف ببراهين لمعرفتي بأن الحاجة إليها في مشكلات المسائل ماسة جداً»[١٨].

والنظرية الجديدة هي نظرية للمعادلات الجبرية من الدرجات الثلاث الأولى، يدرس فيها العمل الهندسي لتحديد الجذور الموجبة. ولصياغة هذه النظرية كان على الخيام أن يتصور بصورة جديدة العلاقة بين الجبر والهندسة. ولعل أهم مفهوم لتحديد تلك العلاقات هو مفهوم «وحدة القياس». فلقد عرّفها الخيام في علاقتها مع مفهوم «البعد». وهذا ما أدى إلى إمكان تطبيق الهندسة على الجبر عنده، وصياغة أول نظرية هندسية للمعادلات الجبرية.

كان إذاً لهذه العلاقات الجديدة التي أقامها الخيام بين الهندسة والجبر الفضل في صياغة نظرية تتجاوز تباين الميدانين، وتكون من بعد حقلاً لبحوث مستقلة قائمة عليها فقط. فالخيام يعرض في كتابه لهذه النظرية فحسب، وسيعرض لها دون غيرها من ميادين الجبر. ومعه ستبدأ هذه السنّة، أعني تلك الكتب المخصصة لمعالجة نظرية المعادلات فحسب.

ولفهم هذا الموقف الجديد نشير إلى الجبريين الآخرين في عصر الخيام. فعلى نقيض الجبريين الحسابيين لا يعرض الخيام لأي فصل من تلك الفصول التي كان يتضمنها كل كتاب في الجبر، بل تلك التي كانت تحتل مكان الصدارة في رسائل الجبر هذه، مثل دراسة القوى الجبرية، ومتعددات الحدود والأعداد الصم الجبرية الخ... وهكذا فقد نحا الخيام نحواً جديداً في الكتابة والتأليف ملائماً للمعرفة الجديدة نفسها، وقدم نموذجاً سيأخذ به ويطوره خلفاؤه من بعده. ففي هذا النموذج سيُحدّ الجبر بنظرية المعادلات، وسيعرَّف الجبر بأنه علم المعادلات الجبرية. ويعرض الخيام، على التوالي، لمفهوم العِظَم الجبري ليعرف مفهوم وحدة القياس، ثم للمعادلات اللازمة، ولتصنيف معادلات الدرجات الثلاث الأول، ثم للنظر إلى المعادلات ذات الحدين من الدرجتين الثانية، ثم إلى ذات الحدود الثلاثة من الدرجتين الثانية والثالثة، ثم إلى ذات الحدود الأربعة من الدرجة الثالثة، ثم إلى تلك التي تتضمن عكس المجهول.

وانتهى الخيام في رسالته إلى فئتين من النتائج الهامة في تاريخ الجبر، كثيراً ما تنسبان إلى ديكارت؛ أما الفئة **الأولى** فتتعلق بالحل العام لكل معادلات الدرجة الثالثة، باللجوء إلى تقاطع مخروطين؛ وأما الفئة **الثانية** فهي تخص الحساب الهندسي الذي أصبح ممكناً نتيجة لتعريف «الوحدة» في كل بُعد من الأبعاد الثلاثة: الطول والسطح والجسم.

---

(١٨) الخيام، رسائل الخيام الجبرية، ص ٢.

وزيادة على هذا فلقد اجتهد الخيام في الحل العددي لمعادلة الدرجة الثالثة. ففي رسالته «في قسمة ربع الدائرة» يصل الخيام إلى حل عددي تقريبي باستعمال جداول حساب المثلثات[١٩].

كل هذا قد تم في النصف الأول من القرن الخامس الهجري، وفيه نجد أول رسالة خصصت كاملة لنظرية المعادلات الجبرية، وحدها دون غيرها، والتي تعكس بنيتها تصنيف الخيام للمعادلات.

ولقد ظن كثير من المؤرخين أن مساهمة الرياضيين العرب في نظرية المعادلات لا تتجاوز كثيراً ما قدّمه الخيام في رسالته، وأن هذه الرسالة لم يكن لها بعد تاريخي، وعلى هذا فلن يلبث الطريق الذي بدأه الخيام أن يُسدّ. ولقد سقط هذا الظن عند دراستنا لشرف الدين الطوسي ومؤلفاته.

من الروايات التي نجدها في كتب الرياضيين منذ القرن الرابع عشر وما بعده، وكذلك في بعض التراجم أن تلميذ الخيام شرف الدين المسعودي قد ألف كتاباً في نظرية المعادلات، يتضمن معادلات الدرجة الثالثة، وشهد بهذا كمال الدين الفارسي ومن تبعه مثل جمشيد الكاشي واليزدي وغيرهم. ففي **أساس القواعد** كتب الفارسي: «لم يُنقل من الأولين شكر الله مساعيهم مع وفر اهتمامهم بتمهيد قواعد العلوم وتدوين أبواب النظريات في أنواع الحكم والرياضيات وأصناف الصناعات إلا مسائل ست، ولا من المتأخرين إلا الإمام المتبحر شرف الدين المسعودي جزاه الله خير الجزاء، فقد نُقل أنه بيّن استخراج الشيء في تسع عشرة مسألة أخرى غير الست»[٢٠]. وينقل الكاشي رواية الفارسي فيقول: «وقد أورد شارح البهائية (أي الفارسي) أن الإمام شرف الدين المسعودي استخرج تسع عشرة مسألة غير الست المشهورة، وبيّن كيفية استخراج المجهول منها»[٢١]. ولقد روى هذه الرواية عن الفارسي يحيى الكاشي فقال: «وقد حكى الفاضل الشارح (أي الفارسي) أن الإمام شرف الدين المسعودي استخرج تسع عشرة مسألة غير الست المذكورة وبيّن كيفية استخراج المجهول منها»[٢٢]. أما عن اليزدي فقد أعاد رواية الكاشي على لسانه[٢٣].

---

(١٩) المصدر نفسه، ص ٩٧ ـ ٩٨.

(٢٠) كمال الدين أبو الحسن الفارسي، **أساس القواعد في أصول الفوائد** (استنبول، مخطوطة شهيد علي باشا، ١٩٧٢)، ص ٢٣١ظ.

(٢١) غياث الدين جمشيد بن مسعود الكاشي، **مفتاح الحساب**، تحقيق أحمد سعيد الدمرداش ومحمد حمدي الحفني الشيخ؛ مراجعة عبد الحميد لطفي (القاهرة: [د.ن.]، ١٩٦٧)، ص ١٩٨ ـ ١٩٩. ولقد توهم المحققان أن المؤلف يقصد غياث الدين الكاشي لا الفارسي.

(٢٢) يحيى بن أحمد الكاشي، **إيضاح المقاصد لفرائد الفوائد** (استنبول، مخطوطة جار الله، ١٤٨٤)، ص ١٢٨و.

(٢٣) محمد بن باقر اليزدي، **عيون الحساب** (استنبول، مخطوطة هازيناسي، ١٩٩٣)، ص ٥٩ظ.

أما في كتب التراجم فينسب إلى شرف الدين المسعودي رسالة وافية في الجبر، هذا ما نقرأه في **مفتاح السعادة** لأحمد بن مصطفى المشهور بطاشكبري زاده(٢٤).

فمن رواية الفارسي أصلاً نعلم بوجود رسالة المسعودي هذه. ومن المعروف أن المسعودي هذا من تلاميذ الخيام(٢٥) فهو من الجيل السابق على جيل الطوسي.

وأسانيد الرياضيين ترجع كلها إلى كمال الدين الفارسي، وربما كان الفارسي أو أحد المتأخرين من الرياضيين هو المصدر الذي استقى منه طاشكبري زاده روايته. ومن ثم لا نستطيع بعد أن نجزم بوجود رسالة المسعودي هذه، لعدم وصولها، أو وصول أية فقرةٍ منها إلينا ولقلة الأدلة ورجوعها جميعاً ـ على وجه التقريب ـ إلى المصدر نفسه وهو الفارسي.

ولكن مما لا ريب فيه اهتمام رياضيي القرن السادس، من خلفاء الخيام، بنظرية المعادلات في فترة اشتهار الطوسي أو قبلها، بعد الخيام مباشرة، ومن الأدلة على هذا ما نقرأه في إحدى مخطوطات هذه الفترة، أي سنة ٥٨١هـ ـ ١١٨٥م، وفيها يقول المؤلف: «فأما ما يقع في الاقترانات المتعادلة بين ثلاثة أصول غير متناسبة، ثم ما زاد عليها، متناسبةً كانت أو غير متناسبة، مثل الذي يمكن أن يقع في الحيزين الثلاثيَّيْن اللذين أحدهما مكعبات وأموال وعدد، والثاني مكعبات وجذور وعدد من المقترنات الستة، أو في الحيّز الواحد الرباعي الذي هو مكعبات وأموال وجذور وعدد من المقترنات السبعة أو غيرها، مما يستعمل على ما فوق هذه المنازل، فلا يكاد يطرد ذلك بما قدمنا من القياسات العددية إلا من جهة التقدير المساحية بتقديم القطوع المخروطية»(٢٦).

فلننظر الآن في رسالة الطوسي نفسها كي نفهم بنيتها وأهم ما جاء به فيها. يفتتح الطوسي رسالته بدراسة القطوع المخروطية التي سيحتاج إليها فيما بعد، وذلك حتى يكتمل العمل ولا يلزم القارىء الرجوع إلى غيره. فيدرس القطع المكافىء والقطع الزائد ويعطي ـ وهذا هو ما يجب الانتباه إليه ـ معادلة كل منهما بحسب محاور معينة. ثم يعرض لبعض الأعمال الهندسية التي يلجأ في حلها إلى تلك المعادلات. ويفترض الطوسي في رسالته معرفة القارىء بمعادلة الدائرة.

---

(٢٤) أبو الخير أحمد بن مصطفى طاشكبري زاده، **مفتاح السعادة ومصباح السيادة في موضوعات العلوم**، تحقيق كامل بكري وعبد الوهاب أبو النور (القاهرة: [د.ن.]، ١٩٦٨)، ج١، ص ٣٩٢.

(٢٥) كان قد استقر في وهمي في أول دراسة عن الطوسي قمت بها أن شرف الدين الطوسي هو شرف الدين المسعودي، لاشتراكهما في الاسم والبحث والمكان.

(٢٦) انظر الرسالة التي نسبت خطأ إلى: أبي كامل شجاع بن أسلم، **رسالة في الجبر والمقابلة** (مخطوطة آستان، قدس، مشهد، ٥٣٢٥)، ص ٢٤ظ.

يعقب هذا تصنيف المعادلات من الدرجات الثلاث الأول. ولا يبني الطوسي هنا معياراً داخلياً لهذا التصنيف بل معياراً خارجياً. فعلى نقيض الخيام لا يأخذ فقط عند تصنيفه بدرجة متعدد الحدود المقترن بالمعادلة، ولا بعدد الحدود التي يتضمنها متعدد الحدود هذا، بل ـ وهذا جدير بالتأمل ـ يأخذ أصلاً بوجود أو عدم وجود الجذور الموجبة، وهي الجذور المعترف بها في تلك الفترة. وبوجه أعم فمشكلة «الوجود» هذه والبرهان عليه هي التي شغلت الطوسي كثيراً، وفرّقت بينه وبين الخيام. واختيار هذا المعيار نفسه أدى ضرورة إلى انقسام الرسالة إلى جزأين متمايزين تمايزاً واضحاً.

ويعالج الطوسي في الجزء الأول حل عشرين معادلة. وعند دراسة كل منها يقوم الطوسي كالخيام من قبل بالعمل الهندسي للجذر، وهذا بتقاطع قطعي مخروط أو تقاطع قطع مخروط ودائرة. ولم يبحث عن الحل الجبري إلا لمعادلات الدرجة الثانية فقط، ولم ينس أن يبحث عن العلاقة بين الجذور والمعاملات لمعادلة الدرجة الثانية ذات الجذرين الموجبين.

ولقد درس الطوسي كذلك المعادلات التي لا يمكن إرجاعها إلى معادلات أخرى من بين تلك العشرين معادلة، ودرس الحل العددي لكل منها، واستثنى من ذلك الحل العددي للمعادلات المفردة مفترضاً معرفة القارىء به، أي باستخراج الجذر التربيعي والجذر التكعيبي. وللوصول إلى هذا الحل العددي لمعادلات الدرجة الثانية والثالثة لم يقم الطوسي بتعميم منهج روفيني ـ هورنر لاستخراج جذور الأعداد على استخراج جذور المعادلات فحسب، بل صاغ نظرية رياضية كاملة لتبرير هذا المنهج. وعلى الرغم مما تتضمنه هذه النظرية من أخطاء ـ فالمسألة غير قابلة لحلّ عام حتى يومنا هذا ـ فإنها أدت إلى بحث عميق في متعددات الحدود. وهدف الطوسي في نظريته هذه بيان الأسس التي يقوم عليها تحديد أرقام الجذر الموجب للمعادلة، أو أكبر جذر موجب إن كان هناك أكثر من واحد. وتبدأ المشكلة عند تحديد الرقم الأول من الجذر. وفكرة الطوسي هي التالية: فبدلاً من اللجوء إلى كل الحدود، علينا استعمال عدد محدود منها، ومن ثم محاولة التعرف على «متعدد حدود مهيمن». أما تحديد الأرقام الأخرى فيقوم على استعمال «مشتق» متعدد الحدود ولا يخفى على القارىء أهمية هذه النتائج التي وصل إليها الطوسي.

وهكذا بعد أن قام بدراسة معادلات الدرجة الأولى والثانية ومعادلة $x^3 = c$، يعالج الطوسي سبع معادلات من الدرجة الثالثة لكل منها جذر موجب. أما جذورها السلبية فلا يهتم بها الطوسي. فهو كمعاصريه وكخلفائه لا يقر بوجود جذور سلبية. ولدراسة كلٍّ من هذه المعادلات، يختار الطوسي قطعين مخروطين أو بصورة عامة مُنحنيين من الدرجة الثانية. ويبين الطوسي بعد هذا معتمداً على الخصائص الهندسية لتلك المنحنيات أنها تتقاطع على نقطة يحقق إحداثها السيني المعادلة. ويلجأ الطوسي ـ عن طريق

الحدس على الأقل في مناقشته لتقاطع المنحنيات وللبرهان على وجود نقطة التقاطع - إلى معادلات المنحنيات من جهة، وكذلك لاتصال المنحنيات وتقعيرها.

وينتهي هذا الجزء بدراسة المعادلة ذات المعاملات الموجبة:

$$x^3 + bx = ax^2 + c$$

وهي ذات ثلاثة جذور موجبة. وهنا يتبع الطوسي الخيام، فتغيب عنه هذه الحقيقة ولا يستخرج إلا جذراً واحداً.

وقراءة الجزء الأول من رسالة الطوسي تدل دلالة واضحة على ما رامه وما هدف إليه، وهو عمل الجذور الموجبة للعشرين معادلة الأولى، والتي سيرجع إليها ما تبقى من المعادلات بالتحويلات الأفينية. ففي هذا الجزء يتبع الطوسي الخيام في خلق وإغناء هذا الفصل الجديد في عمل الجذور أو بنائها، إلا أنه - على نقيض الخيام - يحرص على البرهان على وجود نقط التقاطع من جهة، ويدخل من جهة أخرى مفاهيم عدة - مثل التحويلات الأفينية، أو بُعد نقطةٍ عن خط - سيكون لها أهمية خاصة في الجزء الثاني من الكتاب.

وهذا الجزء الأخير - وهو أكثر من نصف الرسالة - يعالج فيه الطوسي المعادلات الخمس الباقية والتي قد لا يكون لها أيّ جذر موجب وهي هذه:

$$x^3 + c = ax^2, \quad x^3 + c = bx, \quad x^3 + ax^2 + c = bx,$$
$$x^3 + bx + c = ax^2, \quad x^3 + c = ax^2 + bx.$$

وعلى خلاف الخيام، كان على الطوسي - لانشغاله بالبرهان على وجود الجذور الموجبة - أن يبحث عن أسباب اختفائها هنا وعلة ذلك. ولقد أدت هذه النظرة الجديدة، وهذا التساؤل الذي لم يسبق إليه، إلى تغيير المشروع العلمي نفسه واكتشاف وسائل تحليلية لمعالجة المعادلات. حتى تتضح الفكرة، علينا هنا أن نلخص بلغتنا إحدى دراسات الطوسي نفسه ولتكن دراسته للمعادلة:

$$ax^2 = x^3 + c$$

التي يعاد كتابتها على الصورة التالية:

$$c = x^2(a - x) \qquad (١)$$

ولنفرض

$$f(x) = x^2(a - x) \qquad (٢)$$

وهنا يعدد الطوسي الحالات التالية:

$c > \frac{4a^3}{27}$ فتكون المسألة مستحيلة بحسب رأي الطوسي، أي أن لها جذراً سالباً.

$c = \frac{4a^3}{27}$ وهنا يستخرج الطوسي الجذر المزدوج $x_0 = \frac{2a}{3}$ ولكنه لا يقر بالجذر السالب.

$c < \frac{4a^3}{27}$ وهنا يستخرج الطوسي جذرين موجبين للمعادلة:

$$0 < x_1 < \frac{2a}{3} < x_2 < a$$

ويدرس الطوسي بعد هذا «العدد الأعظم» فيبرهن على:

$$f(x_0) = \sup_{0<x<a} f(x) \qquad (٣)$$

مع $x_0 = \frac{2a}{3}$

ولهذا يبرهن أولاً

$$x_1 > x_0 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_0)$$

ثم يبرهن بعد ذلك

$$x_2 < x_0 \Longrightarrow f(x_2) < f(x_0)$$

ويستنتج من الخطوتين (٣).

ومن الجدير بالغ الاهتمام أن الطوسي، لكي يجد $x_0 = \frac{2a}{3}$ يحل المعادلة:

$$f'(x) = 0$$

ويقوم الطوسي بعد ذلك بحساب «العدد الأعظم»:

$$f(x_0) = f\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{4a^3}{27}$$

وهذا الذي يمكّنه من تعديد الحالات المذكورة سابقاً.

ثم يواصل الطوسي بحثه فيستخرج الجذرين الموجبين بالنهج التالي: لاستخراج x_2، يفرض $x_2 = x_0 + x$، وهذا التحويل يؤدي إلى المعادلة التالية التي سبق حلها:

$$x^3 + ax^2 = k$$

وفيها $k = c_0 - c\frac{4a^3}{27} - c$.

ولن ينسى الطوسي أن يبرّر هذا التحويل الأفيني الذي لجأ إليه.

ولاستخراج الجذر الموجب الثاني، يسلك الطريق نفسه فيفرض $x_1 = x + a - x_2$ ويؤدي هذا التحويل الأفيني إلى معادلة أخرى سبق له حلها في الرسالة.

وأيضاً لا ينسى الطوسي أن يتحقق من $x_1 \neq x_0$ و $x_1 \neq x_2$ وأن يبرر هذا التحويل

الأفيني. أما الجذر السالب الباقي فلا يعرض له الطوسي كما سبق أن ذكرنا.

فمن الواضح إذاً أن ظهور صيغة «المشتق» في رسالة الطوسي لم يكن محض مصادفة أو مجرد اتفاق. فلقد ظهر من قبل عند تحليل منهج الطوسي للحل العددي للمعادلات، وظهر عند البحث عن «العدد الأعظم» في الجزء الثاني من الرسالة. وفي كلتا الحالتين اكتفى الطوسي بتطبيق المفهوم دون شرحه وتفسيره. ومن ثم، تظهر في رسالة الطوسي لأول مرة في تاريخ الرياضيات الفكرة التالية: تحديد النهايات القصوى للعبارات الجبرية، ودراسة تغير توابع متعددات الحدود في جوار النهاية القصوى، حتى يمكن حسابها. وعند الطوسي - خلافاً لما قد يمكن أن نجده من قبل في الرياضيات اليونانية أو العربية، مثل أرخميدس أو القوهي - لا يتعلق الأمر بمساحات وحجوم قصوى، بل بتوابع متعددات الحدود.

ولم يقف الطوسي عند هذه النتائج بل ظفر بأخرى عديدة، نذكر منها فقط معرفته بأن متعدد الحدود $p(x)$ يقسمه $(x-r)$ إذا كان r جذراً للمعادلة $p(x)=0$.

فمن الواضح - كما بينا - أن الجزء الثاني من رسالة الطوسي تحليلي الطابع، تابعي الاتجاه.

فالحساب جبريّ صرف، والأشكال الهندسية لا وظيفة لها إلا إعانة التصور. ولكن علينا ألا ننسى العقبتين اللتين حالتا دون أن يكون لهذه الرسالة ما استحقته من أثر في الرياضيات العربية فيما بعد، وأعني بهذا غياب الأعداد السلبية وعدم الإقرار بها، وكذلك عدم الوصول إلى اللغة الرمزية. فلقد أدى غياب الأعداد السلبية إلى تعدد الحالات للعملية الواحدة، كما أدى غياب اللغة الرمزية إلى طول العبارة وغموضها، وهذا كله جعل رسالة الطوسي صعبة المنال، فلم تؤت كل ثمارها.

ولا يعني هذا أن رسالة الطوسي قد دفنت مع صاحبها، فلقد بيّنا من قبل ذكرَ الرياضيين لها. وبحسب ما نعرفه الآن من مؤلفات الرياضيين العرب، وهو قليل، ورث خلفاء الطوسي منهجه في الحل العددي للمعادلات - أي ما يُسمى بمنهج روفيني - هورنر - أما نتائج الجزء الثاني من رسالته، وأسلوبه الرياضي الجديد، الذي يعكس اكتشاف الطوسي للبحث «المحلي»، أي في جوار النقطة، فسوف نواجهها من جديد في القرن السابع عشر، عند الرياضي الفرنسي فيرما بخاصة.

ويُلزمنا هذا بإعادة التأريخ إذاً لعلاقة الجبر بالهندسة، ولِما قدمته الرياضيات العربية في هذا المجال. فلا مفرّ لمؤرخ الهندسة الجبرية أو التحليلية من البدء بما قدّمه الخيام والطوسي بخاصة.

أما رسائل الطوسي الأخرى في الرياضيات، فهي تعبّر عن أجزاء من المشروع نفسه . فرسالته «في الخطين اللذين يقربان ولا يلتقيان» يعيد فيها ويكمل ما سبق له

تحريره في رسالته في «المعادلات». أما رسالته الأخرى «في عمل مسألة هندسية»، فهي تبين - حتى في هذا النوع من المسائل - لجوءه إلى الجبر للقيام بمثل هذا العمل.

تلك هي الملامح الأساسية لما حققه شرف الدين الطوسي، وما وصل إليه في الرياضيات، بعد أن ظل ذلك مغموراً مجهولاً، مما أدى إلى صورة مبتورة لتاريخ نظرية المعادلات والهندسة التحليلية.

الرمـوز

أ آيا صوفيا ٢٦٤٦

ب خدابخش ٢٩٢٨

ف البندقية مرشيانا شرقيات ١١٩٠٧

ك كولومبيا شرقيات سميث ٤٥

ل المكتب الهندي ـ لندن ـ لوث ٧٦٧

/ انتهاء صفحة المخطوطة

< > نقترح إضافة ما بينهما

[ ] نقترح حذف ما بينهما

مقدمة

أولاً: ثنائية الجبر والهندسة عند الخيام والطوسي

يعتبر مؤرخو العلوم وفلاسفة المعرفة، بحق، أنّ مزاوجة الجبر والهندسة حددت مسار الدراسات التي هدفت إلى تقويم وتحليل **تَشَكُّل مجالٍ واسع من الرياضيات** بدأ مع إطلالة القرن السابع عشر. إن النتائج النظرية لعملية التزاوج هذه جعلتها تتعدى مجالها الأولي (الرياضيات) لكي تساهم في تكوين مجمل الفكر الكلاسيكي. لذلك، وخلال محاولة رسم معالم هذه العملية واستيعاب نتائجها يجد المؤرخ نفسه ملزماً بقراءة يقظة لأعمال ديكارت وفيرما (Fermat) بشكل خاص؛ كما يجد نفسه مدفوعاً لتفحص الحجج المتبادلة خلال تلك الفترة التي تميزت بالنقاشات الحادة والآراء المتضاربة. فمن جهة، على هذا المؤرخ أن يستوعب الوسائل التقنية المتبعة آنذاك، حيث تمتزج الهندسة الجبرية بالهندسة التفاضلية؛ ومن جهة أخرى عليه أن يحصر ويرسم حدود ظواهرية جديدة لموضوع الرياضيات.

إن أهمّية هذا الموضوع، إضافة إلى تعقيداته، تدفع إلى المزيد من الحذر والتروّي لأنها تقتضي تعبئة الماضي واستخدامه. فيجب، بادىء ذي بدء، إعادة ترتيب المساهمات السابقة وتركيبها، ليس من أجل رسم التدرّج الزمني أو تحديد تأثير السابق في اللاحق، إنما لكي يأخذ كل مفهوم وكل عائق، موقعه بالنسبة إلى رياضيّي القرن الثامن عشر ومن سبقهم. فقبل إنجاز هذه المهمة يتعذّر القيام بدراسة تعتمد المقارنة وتحاول الإحاطة بما هو جديد عن طريق تحديد مكانه بالضبط. ولا ضرورة للتذكير بأن إنكار منجزات رياضيي القرن السابع عشر عن طريق ردّها ببساطة إلى أعمال سابقة، لا يقلّ خطراً عن اعتبار منجزات من سبقهم وكأنها منجزاتهم هم بالذات. وهنا نرى أنّ الخطأ المرتكب بحق المعرفة التاريخية، أقل خطراً، إلى حدّ بعيد، من المجازفة بفقدان نهائي لروح المعرفة العلمية التي نؤرّخ لها. فالذي يستشف منجزات ديكارت من بين سطور كتاب **المخروطات** لأبولونيوس (Apollonius) حيث لا أثر بتاتاً للجبر، إنما يقفل فكره أمام جميع المسائل التي طرحتها العلاقة بين الجبر والهندسة. وفي المقابل، فإنّ إسناد بداية الفصل المتعلق بـ «البناء الهندسي للمعادلات» إلى أعمال هذا الفيلسوف

(ديكارت) يعتبر تعريضاً أكيداً للمكانة الحقيقية لعمله الخلاق ولإبداعه. وهنا لا يمكن تجنب الرجوع إلى تاريخ الرياضيات العربية حيث نجد المساهمات الأهم في هذا المجال، قبل مساهمات ديكارت وفيرما.

منذ ظهور كتاب الخوارزمي في بداية القرن التاسع للميلاد، سعى عدد لا بأس به من الرياضيين إلى توسيع الجبر وتطويره. ومن بين هؤلاء من قادتهم أبحاثهم إلى التعرُفِ على قضيّة لم يكن من الممكن تصَوُرُها قبل تشكّل هذا العلم (الجبر). هذه القضية هي إمكانية ترجمة مزدوجة:

- ترجمة مسألة هندسية إلى مسألة دراسة وحلّ معادلة جبرية بمجهول واحد؛

- تحويل مسألة تتعلق بحل معادلة جبرية - بخاصة معادلة من الدرجة الثالثة - إلى مسألة بناء هندسي، وذلك بواسطة ترجمة هندسية، أي بواسطة المنحنيات.

ومن دون شك، لا يمكن تصوّر وجود مثل هذه الترجمة إلا من قبل رياضيين استوعبوا علم الجبر. لذلك لا يمكن بتاتاً أن ترجع بداية مثل هذه الترجمة إلى ما قبل القرن العاشر خلافاً لما قد يوحي به البعض. وفي الواقع، كان لا بد من انتظار انقضاء قرن ونصف تقريباً، لكي يقدّم الخيّام هذه الترجمة كوسيلة لمعالجة مشروع علمي يتمتع بتبريراته وشروحاته كافة. ظهرت بدايات هذه الترجمة، إذن، مع تشكّل علم الجبر إلا أنها لم تتمكن من فرض نفسها من دون الاصطدام بنوعين من العوائق التقنية:

- **النوع الأول** يتعلق بحل المسائل المجسمة الموروثة منذ القدم، التي لا تحلّ بواسطة المسطرة والفرجار، كمسائل «عمل المسبّع في الدائرة» و«تثليث الزاوية» - تقسيمها إلى ثلاثة أجزاء متساوية - ومسألة «المتوسطين» - إيجاد خطين بين خطين لتوالى الأربعة متناسبة -؛ كما يتعلق هذا النوع من العوائق بحل مسائل طرحها رياضيون وفلكيون معاصرون كتحديد أوتار بعض الزوايا بهدف بناء جداول الجيوب؛ وفي كلتا الحالتين عمد الرياضيون إلى تحويل المسألة الهندسية المطروحة إلى مسألة جبرية هي حل معادلة تكعيبية. وتعتبر أسماء الماهاني، الخازن، البيروني، وأبي نصر بن عراق، علامات بارزة على هذه الطريق.

- **النوع الثاني** من العوائق يتعلق بصعوبة حل المعادلة التكعيبية بواسطة استخراج الجذور؛ وأمام هذه العوائق اضطر رياضيون من أمثال الخازن، أبي نصر بن عراق وأبي الجود بن الليث لطرح مسألة البناء «الهندسي» لجذور بعض المعادلات التكعيبية. وفي مواجهة هذه المعادلات، وجد الرياضيون أنفسهم، إذن، يطبقون تقنية استعملت عادة في دراسة المسائل المجسمة وهي تقنية تقاطع المنحنيات المخروطية. هذه الممارسة التي استعملها قدماء اليونان، ملكها رياضيو القرن العاشر وخلّصوها من شوائبها كما تدلّ، مثلاً، أعمال القوهي وابن الهيثم.

ولسنا هنا، في أي حال، بصدد إعادة عرض الأعمال المذكورة أعلاه وتحليلها، بهدف كتابة تاريخ هذه الترجمة المزدوجة، تاريخ تحوُّلها البطيء من تقنية بسيطة خاصة، إلى وسيلة عملية لمشروع علمي مستقبلي كما أضحت عند الخيام (١٠٤٨ ـ ١١٣١م). يجدر، فقط، أن نسجّل أنّ المحاولة الأولى لإرساء قواعد هذه الترجمة المزدوجة رأت النور مع هذا الرياضي. هذا الواقع كان قد أصبح معروفاً في منتصف القرن التاسع عشر؛ فعندما دقق المؤرخ ف. وبكيه (F. Wœpcke) وترجم، للمرة الأولى، رسالة الخيام في الجبر كان من المعروف أن هذا الأخير سعى جاهداً لإعادة التفكير في العلاقة بين الجبر والهندسة؛ هذا ما لم يفت المؤرخ إبرازه، حيث كتب بصدد الخيام وسابقيه منوهاً بـ«فضلهم، لأنهم كانوا أوّل من حاول تطبيق الجبر على الهندسة وبالعكس؛ كما أنّهم أرسوا قواعد الصلة التي تربط الحسابات بالهندسة، هذه الصلة التي ساهمت بشكل بارز في تطور الرياضيات»[١]. وصحيح أن الخيام أراد أن يتجاوز إطار البحث الجزئي، أي البحث المرتبط بحل هذه الصورة أو تلك من صُوَر المعادلة التكعيبية، لكي يشرع ببناء نظرية تتعلّق بالمعادلات، ويصيغ من خلالها نموذجاً للكتابة والتأليف. هذه النظرية الجديدة هي نظرية المعادلات الجبرية من الدرجة الثالثة وما دون، حيث تدرس معادلات الدرجة الثالثة بواسطة المنحنيات المخروطية بهدف ايجاد جذورها الموجبة. إنما، وفي سبيل الإعداد لبناء هذه النظرية، كان على الخيام أن يتصوّر علاقات جديدة بين الجبر والهندسة وأن يصوغ مثل هذه العلاقات. ولنذكّر هنا بأن المفهوم المركزي بالنسبة إليه، الذي أدرجه في هذا السياق، كان مفهوم وحدة القياس. هذا المفهوم، الذي بتحديده المناسب وبعلاقته بمفهوم البعد (Dimension) يسمح بتطبيق الهندسة على الجبر[٢].

ولا بدّ من أن نستنتج أن هذا المشروع المزدوج يؤمن لنظرية المعادلات وضعاً جديداً: لقد تعالت فوق الحدود الفاصلة بين الجبر والهندسة؛ وأكثر من ذلك، بدا الجبر في أعمال الخيام مختزلاً إلى مسألة المعادلات الجبرية فقط، هذه المسألة التي لم تحتل في الأعمال الجبرية السابقة سوى مكان متواضع. فلقد كرّس عدداً من الدراسات لهذه النظرية وكان عرضه الجبري محصوراً في هذا الفصل بالذات.

هكذا، إذن، وخلافاً للجبريين الحسابيين، أزاح الخيام من دراسته الجزء الذي اعتاد أن يحتل المكان الأكبر بل المكان المركزي في أي عمل جبري معاصر: دراسة القوى الجبرية (Puissances algébriques)، وكثيرات الحدود (Polynômes) والعمليات التي

---

(١) Franz Woepcke, *L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî* (Paris: [s.n.], 1851), p. XII.

(٢) عمر الخيام، **رسائل الخيام الجبرية**، حققها رشدي راشد وأحمد جبار، مصادر ودراسات في تاريخ الرياضيات العربية؛ ٣ (حلب: معهد التراث العلمي العربي، ١٩٨١)، ص ١٤ ـ ١٦، و٧٩ وما بعدها.

يمكن تطبيقها عليها، والأعداد الصماء الجبرية. . . إلخ.

فلم يتصور الخيام أو يقترح مشروعاً جديداً وحسب، بل قام بإنشاء نموذج للكتابة يلائم هذا المشروع. إنه يبدأ بمناقشة مفهوم «العِظَم» (Grandeur) لكي يصل إلى تعريف وحدة القياس؛ ومن ثم يقدم تصنيفه الخاص للمعادلات ويطرح المقدّمات (Lemmes) الضرورية، لكي يعالج أخيراً بالترتيب وبحسب تصاعد درجات صعوبتها: معادلات الدرجة الثانية ذات الحدين، معادلات الدرجة الثانية ثلاثية الحدود، معادلات الدرجة الثالثة ثلاثية الحدود، معادلات الدرجة الثالثة رباعية الحدود والمعادلات المتعلقة بعكس (أي بمقلوب) المجهول.

وفي رسالته هذه، توصل الخيام إلى نتيجتين ملحوظتين:

- حل عام لمجمل معادلات الدرجة الثالثة بواسطة تقاطع قطعين مخروطيين؛

- حسابات هندسية أصبحت ممكنة عن طريق انتقاء وحدة قياسية للأطوال.

ويجدر أن نسجل بأن الخيام لم يتوقف عند هذا الحدّ، بل حاول إعطاء حلّ عددي تقريبي للمعادلة التكعيبية. ففي رسالته حول «قسمة ربع الدائرة»[٣] مثلاً، حيث أعلن عن مشروعه للمرة الأولى، توصل إلى حلّ عددي تقريبي عن طريق جداول علم المثلثات. هكذا، إذن، في القرن الحادي عشر، بدأت العلاقات بين الجبر والهندسة وبدأ تشكّل فصل جديد تكرّس حتى القرن الثامن عشر لأجل بناء المعادلات، كما بدأت أولى الكتابات التي خصصت، وبشكل كلي، لنظرية المعادلات الجبرية. إن بنية رسالة الخيام هذه تعكسُ بدقة، كما أشرنا، تصنيفه للمعادلات بحسب درجتها وعدد حدودها.

هنا، أي عند هذا الحد، توقفت ومنذ القرن الماضي، المعلومات التاريخية بهذا الخصوص؛ ففي نظر المؤرخين شكلت مساهمة الخيام آخر ما قدّمه الرياضيون العرب في هذا الموضوع. وأخذاً بهذه الاعتبارات لا بدّ من أن يبدو عمل الخيام مثيراً للاستغراب: فهو بداية ونهاية في الوقت نفسه. فهذا التعبير النظري الأول عن مسألة البناء الهندسي للمعادلات الجبرية يظهر وكأنّه لم يتابع جدياً، على الأقل من قبل الرياضيين العرب. على هذا الأساس يظهر الخيام عبقرياً معزولاً في الزمان، ذلك لأن عمله يبدو غير ذي بعد تاريخي لأنه عمل من دون غدٍ.

لكن، منذ نحو خمسة عشر عاماً، استطعنا أن نبيِّن أنّ هذه الصورة ليست صحيحة[٤]، وبأنّ الخيّام لم يكن فقط مفتتحاً لتقليد، بل كان أكثر من ذلك؛ لقد كان له

---

(٣) المصدر نفسه، ص ٩٠.

(٤) انظر: Roshdi Rashed, «Résolution des équations numériques et algèbre: Sharaf Al dīn al Ṭūsī - Viète,» *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 12, no. 3 (1974), pp. 244 - 290. =

خلف واحد على الأقل، سار قدماً في تحليلاته مطوِّراً ومحوِّراً في العمق النظرية الجديدة. فلقد عرف القرن الثاني عشر رياضياً تثير حالته دهشة واستغراباً. إنّه شرف الدين الطوسي صاحب أحد أهمّ أعمال جبريّة رأت النور بين الخيّام وديكارت (رسالته حول «المعادلات»). كان اهتمام المؤرّخين بهذا الرياضي يعود بشكل أساسي إلى إسطرلابه الخطّي ـ «عصا الطوسي» الشهيرة ـ لكن رسالته عن المعادلات، التي أشار إليها أصحاب كتب الطبقات، القدامى منهم والمحدثون، لم تدقق بتاتاً ولم تترجم. وأكثر من ذلك، لم يكن هذا العمل موضوع أيّة دراسة قبل تلك التي خصصناها لها[٥]. ويمكن تفسير وضعيّة فريدة من هذا النوع بالنقص في مجال التأريخ. غير أن هذا النقص، لو وُجِد، يعود، بدرجة جزئيّة على الأقل، إلى إحدى خصائص هذه الرسالة. فحتى بعد قراءات متكررة متأنية يبقى التوصل إلى فهمها صعباً لسببين، يعود أحدهما للنصّ نفسه، أمّا الثاني فلتاريخ هذا النص. فاللغة الطبيعية لم تكن مؤهّلة لكي تنقل بشكل واضح وفعّال بنى رياضية معقدة تترافق مع المفاهيم والتقنيات التي أدخلتها الرسالة. فالطوسي يبحث كما سنرى عن النهايات العظمى (Maxima) للتعابير الجبرية، كما يفصل الجذور ويعين حدودها (Limites)... إلخ. هذه المفاهيم توجد داخل النص ولا شك، لكن من دون أن تكون مقدمة بشكل دقيق، الأمر الذي يجعلها مصدراً لبعض الإبهام ويزيد من صعوبة التعامل معها. وتتسبب في هذه الصعوبة نفسها الحسابات الطويلة التي اقتضاها إدخال هذه المفاهيم بالتعابير اللغوية الطبيعية. وإذا أضفنا إلى هذه العوائق أنّ جداول ضرورية لتتبع العمليات الحسابية العددية قد حذفها أحدهم بأكملها من النص، وأن الناسخ قد ارتكب أخطاء عدة سببها صعوبة النص بالذات، تفهمنا أن القارئ المحتمل لمثل هذا العمل كان محكوماً بالعدول عن هذه القراءة. أسبابٌ كثيرة،

= أعيد نشر هذه المقالة في: Roshdi Rashed, *Entre arithmétique et algèbre, recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, collection sciences et philosophie arabes (Paris: Les Belles lettres, 1984), pp. 147 - 194.

وقد عرّب هذا الكتاب تحت عنوان: رشدي راشد، **تاريخ الرياضيات العربية: بين الجبر والحساب**، ترجمة حسين زين الدين، سلسلة تاريخ العلوم عند العرب؛ ١ (بيروت: مركز دراسات الوحدة العربية، ١٩٨٩).

انظر أيضاً: Roshdi Rashed, «L'Extraction de la racine numérique et l'invention des fractions décimales (XI^e - XII^e siècles)», *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 18, no. 3 1978), pp. 191 - 243.

وقد أعيد نشر هذه المقالة في كتاب رشدي راشد المذكور أعلاه بالفرنسية ص ٩٣ ـ ١٤٦.

انظر أيضاً: Roshdi Rashed, «Al-Bīrūni et l'algèbre,» in: *Volume of International Congress in Tehran* (Tehran: [n.pb.], 1976), pp. 63 - 74.

(٥) انظر: Rashed, «Résolution des équations numériques et algèbre: Sharaf Al dīn al Ṭūsī - Viète».

إذن، يحتمل أن تكون قد أبعدت مؤرخي العلوم عن عمل الطوسي هذا وجعلتهم يمرّون عليه مرور الكرام.

إن إزالة العوائق من أمام قراءة النص المذكور شكل مهمة شاقة فعلاً. لكن، ما إن أزيلت هذه العوائق حتى بدا الوجه الحقيقي لنهج الطوسي، كنهج موضعي (Local) تحليلي وليس شمولياً وجبرياً فقط كما كان نهج الخيّام.

ثانياً: النظرية الهندسية للمعادلات وانبثاق المفاهيم التحليلية

تعود صعوبة النفاذ إلى مشروع الطوسي إلى أصول متعددة أهمها كما ذكرنا إدخال مفاهيم جديدة، لا عن طريق تعريفها، إنما عن طريق استعمالها وتطبيقها من دون أي تقديم. وعلى الرغم من أن مثل هذا الأسلوب ليس نادراً في تاريخ العلوم، إلا أنه يتطلب تعاملاً دقيقاً. فماذا يمكن أن يقال بدقة عن الطوسي عندما يعمد إلى شق العبارات الكثيرة الحدود (Dériver les expressions polynomiales) من دون أن يحدد المشتق (Dérivée) أو حتى أن يعطيه اسماً؟

ولا شك في أن الترجمة الدقيقة لمفاهيم الكاتب وعملياته الحسابية إلى لغة الرياضيات التي أتت بعده تظهر المعنى الموضوعي للأفكار التي تضمنتها مفاهيمه هذه. لكن الاكتفاء بهذا الحد قد يشكّل تنكراً للمعاني التي يعطيها المؤلف نفسه لمثل هذه المفاهيم والعمليات. وتكثر المؤلفات التي نجد فيها أعمالاً رياضية تخص المستقبل، مصاغة بالوسائل المتوفرة في الحاضر. وتجاه مثل هذه المؤلفات يجد المؤرخ نفسه في مواجهة مهمتين ليس من السهل تحقيقهما معاً:

- وضع أفكار الكاتب في مكانها من التسلسل التاريخي لتحديد وإدراك نموذج العقلانية الذي تكتسبه هذه الأفكار مع الابتعاد عن أصولها.

- الانكباب، من جهة أخرى، على تحديد مكان هذه الأفكار في بنية عمل الكاتب أملاً بفك رموز معانيها.

هذا ما دفعنا إلى تخصيص مجلد ننوي فيه، وبشكل رئيسي، دراسة أربعة وجوه: الخيّام، ديكارت، الطوسي، فيرما. وسنكتفي هنا بعرض موجز لمحتوى عمل الطوسي بخطوطه العريضة.

يستهل الطوسي رسالته بدراسة منحنيين مخروطيين يستعملهما لاحقاً، وهما القطع المكافىء (Parabole) والقطع الزائد (Hyperbole). هذان المنحنيان، بالإضافة إلى الدائرة، التي يفترض أنها غنية عن الدراسة، هي كل ما يلجأ إليه المؤلف من منحنيات. فيبدو أن الطوسي يفترض بالقارئ في عصره الاعتياد على التعامل مع معادلة الدائرة - قدرة (Puissance) نقطة بالنسبة إلى الدائرة. فقد استعمل هذا الجزء التحضيري لكي يجد معادلة القطع الزائد المتساوي الأضلاع (Equilatère) بالنسبة إلى نظامين من المحاور.

ويظهر بوضوح أنه لم يكن يرمي لدراسة هذه المنحنيات إلا بالقدر الذي يكفي لهدفه المرسوم. لذلك، على ما يبدو، اكتفى بمخروط ذي زاوية رأسية قائمة لكي يحصل على هذه المنحنيات. هذا الاتجاه يميز عمل الطوسي عن كتابات أخرى عديدة كرّسها رياضيّو العصر للقطوع المخروطية.

يلي ذلك تصنيف للمعادلات من الدرجة الثالثة وما دون. وخلافاً للخيّام، لم يعتمد معياراً داخلياً، بل خارجياً، لأجل هذا التصنيف. فبينما يرتب الخيام المعادلات انطلاقاً من عدد حدودها، يختار الطوسي تراتبيتها بحسب وجود، أو عدم وجود، جذور (موجبة) لها. هذا يعني أنّ المعادلات منتظمة بحسب احتوائها، أو عدم احتوائها، لِـ «حالات مستحيلة». تبعاً لهذا التقسيم نستطيع أن نفهم سبب احتواء كتاب الطوسي هذا على جزأين وحسب.

في **الجزء الأول** يعالج الطوسي مسألة حلّ عشرين معادلة. وفي كل من هذه الحالات يعمد إلى البناء الهندسي للجذور وإلى تحديد المميز (Discriminant)، فقط فيما يخص المعادلات التربيعية، وأخيراً يعمد إلى الحل العددي بواسطة الطريقة التي تسمى طريقة روفيني - هورنر. لقد احتفظ بتطبيق هذه الطريقة للمعادلات الكثيرة الحدود وليس فقط لاستخراج جذور عدد ما.

يفترض بالقارئ معرفة هذه الطريقة لاستخراج الجذور التربيعية والتكعيبية. وفعلاً كانت هذه الطريقة معروفة في القرن الحادي عشر؛ وأكثر من ذلك، ففي عصر الطوسي على الأقل، كانت هذه الطريقة تستعمل لاستخراج الجذور النونية لعدد صحيح (Racines niènes).

بعد ما تقدم أصبح من الممكن تحديد العناصر التي تؤلف نظرية المعادلات في القرن الثاني عشر بحسب التقليد الذي أرساه الخيّام:

بناء هندسي للجذور، حل عددي للمعادلات، وأخيراً تذكير بحل معادلات الدرجة الثانية بواسطة الجذور، الحل المكتشف هذه المرة انطلاقاً من البناء الهندسي. إن إلقاء نظرة بسيطة يظهر أن الروابط بين نظرية المعادلات هذه وبين الجبر في مفهوم ذلك العصر، أي الجبر الحسابي كما قدّمه نهج الكرجي، أصبحت روابط رقيقة وهشّة. إن أعمال السُلَمي تقدم لنا مثلاً عن الجبر الحسابي في ذلك العصر. فلقد درج الجبريون الحسابيون على تخصيص جزءٍ متواضع من عملهم لنظرية المعادلات التربيعية؛ وعندما كانوا يعالجون المعادلة التكعيبية كانوا يحاولون حلها بواسطة الجذور. هذا الواقع الذي أُثبت حديثاً[٦]، يظهر المسافة التي اجتازها الطوسي في هذا المجال. ففي الجزء الأول

---

(٦) انظر: Roshdi Rashed, «L'Idée de l'algèbre chez al-Khwärizmi,» *Fundamenta Scientae,* vol. 4, no. 1 (1983), pp. 87 - 100.

أعيد نشره في: راشد، المصدر نفسه، ص ١٩ - ٣٣.

من رسالته، وفي مفهوم جديد لنظرية المعادلات، لم يعتمد الطوسي حلاً بواسطة الجذور للمعادلة التكعيبية؛ أما في الجزء الثاني، كما سنرى، فقد عارض من حيث المبدأ البحث في هذا الاتجاه.

في الجزء الأول، وبعد دراسته لمعادلات الدرجة الثانية وللمعادلة $x^3 = c$، يتفحص الطوسي ثماني معادلات من الدرجة الثالثة. لكلّ من المعادلات السبع الأولى منها جذر موجب واحد، أما في حال وجود جذر سالب فقد كان الطوسي لا يعترف به. ولدى دراسة كل من هذه المعادلات، كان يختار منحنيين (أو بالأحرى، قسمين من منحنيين) من الدرجة الثانية. وكان يبرهن بواسطة اعتبارات هندسية صرفة أن أقواس (Arcs) هذين المنحنيين لها نقطة التقاء تحقق إحداثيتها السينية المعادلة المدروسة (كان من الممكن وجود نقاط التقاء أخرى). الخصائص الهندسية التي قدّمها الطوسي كانت إلى حدّ ما خصائص مميِّزة (Propriétés caractéristiques) للمعطيات التي يختارها، تؤدي بالتالي إلى معادلات المنحنيات المستعملة. وبفضل استعمال تعابير الـ«داخل» والـ«خارج» يستدعي الطوسي تواصل المنحنيات وتحدّبها (Convexité). ونستطيع، كما يلي، ترجمة طريقته بالنسبة إلى المعادلة:

$$x^3 + bx = c \quad ; \quad b > 0, \ \ c > 0;$$

يأخذ في الواقع العبارتين:

$$f(x) = \left[x\left(\frac{c}{b} - x\right)\right]^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad g(x) = \frac{x^2}{b^{\frac{1}{2}}} \ .$$

ويبرهن أنّ وجود عددين α وβ يحققان:

$$(f-g)\ (\alpha) > 0 \qquad\qquad (f-g)\ (\beta) < 0$$

ينتج عنه وجود $y \in]\ \alpha, \ \beta[$ يحقق $(f-g)\ (y) = 0$.

ينهي الطوسي الجزء الأول هذا بدراسة المعادلة التكعيبية الثامنة:

$$x^3 + bx = ax^2 + c \quad ; \quad a, \ b, \ c > 0.$$

ويمكن أن يكون لهذه المعادلة ثلاثة جذور موجبة. لكنّ الطوسي لم يزد على الخيام شيئاً في هذا المجال، ولم يحدد بالتالي سوى واحد من هذه الجذور. ويبدو أنّه على غرار الخيام لم يتعرض سوى للحالة الأولى من الحالتين التاليتين:

$$a^2 - 3b > 0 \qquad \text{وَ} \qquad a^2 - 3b \leq 0$$

وعند قراءة الجزء الأول هذا نرى أن الطوسي يدرس، كما فعل الخيام، البناء الهندسي للجذور الموجبة لهذه المعادلات العشرين؛ وهذا يغني عن دراسة جميع المعادلات من الدرجة الثالثة وما دون، لأن المعادلات المتبقية يمكن إرجاعها إلى إحدى

المعادلات المدروسة بواسطة تحويلات أفينية (Transformations afines). وكان، على غرار الخيام، يعتمد البناء الهندسي المسطح عند إمكانية تحول المعادلة (بعد اختزالها بقدر الإمكان) إلى معادلة من الدرجة الأولى أو الثانية. كما كان يعتمد البناء الهندسي بواسطة اثنين من القطوع المخروطية الثلاثة المذكورة إذا كانت المعادلة (المختزلة بقدر الإمكان) تكعيبية. أما البناءات الهندسية التي تخص المعادلات التكعيبية فكانت تتحول كلها في نهاية المطاف إلى إدخال متوسطين هندسيين بين قطعتي مستقيم معطاتين.

وفي هذا الجزء الأول من الرسالة لم يختلف هدف الطوسي عن هدف الخيام: تشكيل نظرية للمعادلات بواسطة هذه الترجمة المزدوجة الجبرية ـ الهندسية التي سبق أن أشرنا إليها وحيث كانت وسيلتهما الرئيسية البناء الهندسي للجذور الموجبة. ومن هذا المنظار تتوضح بعض المعالم الخاصة لدراسة الطوسي: فهو لم يدرس، مثلاً، مجمل المنحنيات المعروفة، بل اكتفى بدراسة ما يلزمه منها لأجل بنائه الهندسي للجذور.

وعلى الرغم من تعلّق الجزء الأول من «الرسالة»، إلى حد كبير، بمساهمات الخيام يمكن إيجاد فوارق لا تظهر نتائجها إلا في الجزء الثاني. فلقد برهن الطوسي وجود نقطة التقاء للمنحنيين المتعلقين بكل من المعادلات التي درسها. أما الخيام فلم يقم بمثل هذه الدراسة إلا بالنسبة إلى المعادلة العشرين، كما أدخل الطوسي وسائل لجأ إليها بشكل مكثف في الجزء الثاني كالتحويلات الأفينية والمسافة من نقطة إلى مستقيم.

خصّص **الجزء الثاني** من الكتاب لدراسة المعادلات الخمس التي تحوي (بحسب تعبير الطوسي) «حالات مستحيلة»، أي حالات لا يوجد فيها أيّ جذر موجب، وهي المعادلات:

(21) $x^3 + c = ax^2$; (22) $x^3 + c = bx$;

(23) $x^3 + ax^2 + c = bx$; (24) $x^3 + bx + c = ax^2$;

(25) $x^3 + c = ax^2 + bx$.

وخلافاً للخيّام لم يستطع الطوسي الاكتفاء بملاحظة وجود «حالات مستحيلة». فلقد دفعه انشغاله بمسألة برهان وجود نقاط لالتقاء المنحنيات، وبالتالي بمسألة وجود الجذور، إلى تمييز هذه الحالات ومعرفة أسبابها. إن اعتراض هذه المسألة التقنية وما ينجم عنها من تساؤل، هو بالتحديد ما قاد الطوسي إلى القطع مع نهج الخيام وإلى تعديل مشروعه الأساسي. لكن، ولكي نستوعب هذا التحول العميق، يجب تحليل مسعى الطوسي. إن كلاً من المعادلات الخمس السابقة يمكن أن تكتب على الشكل $f(x) = c$، حيث f دالة متعددة الحدود. ولكي يميز الحالات المستحيلة ويحددها، كان على الطوسي دراسة التقاء المنحني الذي يمثل $y = f(x)$ مع المستقيم $y = c$. بالنسبة إلى الطوسي كان «المنحني» يعني القسم من هذا المنحني المتمثل بالجزء:

$$y = f(x) > 0 \quad \text{وَ} \quad x > 0$$

وهو جزء من المنحني يمكن عدم وجوده أصلاً. ويجدر أن نسجّل هنا أن المسألة بالنسبة إليه لا معنى لها إلا في حال كون $x > 0$ وكون $f(x) > 0$ وإنه في كل حالة من الحالات كان يضع الشروط التي تكون ضمنها $f(x)$ موجبة قطعاً. ففي المعادلة (21) وضع الشرط $0 < x < a$، وفي المعادلة (22) الشرط $0 < x < \sqrt{b}$، ويعطي هذا الشرط نفسه في المعادلة (23) مع العلم بأنه غير كافٍ. وعلى الرغم من أنه في المعادلات (24) و(25) لم يحدد في البداية مثل هذه الفسحة التي ينحصر ضمنها x، إلا أنه يعود ويحدد مثل هذه الفسحات عندما يشرع في دراسة حصر (Encadrement) الجذور.

كان الطوسي إذاً مضطراً لتفحّص العلاقة بين وجود الحلول ووضعية الثابت c بالنسبة إلى النهاية العظمى للدالة المتعددة الحدود. وفي هذه المناسبة أدخل مفاهيم جديدة، ووسائل جديدة ولغة جديدة؛ وقد ذهب إلى أبعد من ذلك بتحديده كائناً رياضياً جديداً. وقبل أن نستطرد يجب أن نتوقف قليلاً حتى ولو تعرضنا لبعض الترداد.

يبدأ الطوسي بإدخال مفهوم النهاية العظمى لعبارة جبرية معينة، وهو ما يشير إليه بـ «العدد الأعظم». وبافتراض أنّ $f(x_0) = c_0$ هي هذه النهاية العظمى، فإنها تعطي النقطة (x_0, c_0). بعد ذلك يحدد الطوسي جذور $f(x) = 0$، أي تقاطع المنحني $f(x)$ مع المحور السيني؛ من ثم يخلص إلى استنتاج حصر جذور المعادلة $f(x) = c$.

يصل الطوسي في دراسته، إذن، إلى المرحلة التي تنحصر فيها كل المسألة في قضية وجود القيمة x_0 التي تعطي النهاية العظمى $f(x_0)$. من أجل هذا يعتمد معادلة لا تختلف إلا من حيث شكل الكتابة مع المعادلة $f'(x) = 0$؛ لكن وقبل مواجهة هذه المسألة المركزية المتعلقة بالمشتق، يستحسن أن نسجل التغيّر في منحى عمله وإدخال التحليل الموضعي. ولنبدأ باستعراض النتائج التي توصل إليها.

بالنسبة إلى المعادلة (21) يوجد للمشتق جذران هما الصفر و$\frac{2a}{3}$ مما يعطي بالتالي نهاية صغرى هي $f(0)$ ونهاية عظمى هي $c_0 = f\left(\frac{2a}{3}\right)$. من جهة أخرى يوجد للمعادلة $f(x) = 0$ جذر مزدوج هو $\lambda_1 = 0$ وجذر موجب $\lambda_2 = a$. يستنتج الطوسي، إذن، أنّ، في حال كون $c < c_0$، يكون للمعادلة (21) جذران موجبان x_1 وx_2 يحققان العلاقة:

$$\lambda_1 = 0 < x_1 < x_0 < x_2 < a = \lambda_2 \ .$$

نلاحظ أن لهذه المعادلة جذراً ثالثاً سالباً x_3 لا يأخذه الطوسي بالاعتبار.

في ما يخص المعادلات (22)، (23) و(25) يعتمد الطوسي تحليلاً مشابهاً. وفي هذه الحالات الثلاث يكون للمشتق جذران أحدهما سالب والآخر موجب. الجذر الموجب x_0 يعطي النهاية العظمى $c_0 = f(x_0)$ ويكون للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة جذور

بسيطة (مختلفة) أحدها سالب والآخران هما $\lambda_1 = 0$ وَ λ_2؛ وهذا ما يوصله إلى النتيجة التي توصل إليها في السابق.

أما فيما يخص المعادلة (24)، فتنشأ صعوبة لأنّ القيمة العظمى $f(x_0)$ يمكن أن تكون سالبة. وهنا يفرض الطوسي شرطاً إضافياً لكي لا يصادف إلا الحالة $f(x_0) > 0$ وينهج من ثم كما فعل بالنسبة إلى المعادلات السابقة؛ عند ذلك يكون للمعادلة $f'(x) = 0$ جذران موجبان x'_0 وx_0 $(x'_0 < x_0)$. يوجد إذن بالتتالي نهاية صغرى سالبة ونهاية عظمى موجبة. ولا يأخذ الطوسي في الاعتبار سوى الجذر x_0 فيحصل على $c_0 = f(x_0)$. ومن جهة أخرى، يكون للمعادلة $f(x) = 0$، في هذه الحالة، ثلاثة جذور، الصفر وَ λ_1 وَ λ_2، $(0 < \lambda_1 < \lambda_2)$، من هنا يستنتج الطوسي أنّه في حال كون $c < c_0$، يكون للمعادلة (24) جذران موجبان x_1 وَ x_2 بحيث

$$0 < \lambda_1 < x_1 < x_0 < x_2 < \lambda_2.$$

هذه المراجعة السريعة تُظهر أن وجود مفهوم «المشتق» لم يكن لا عرضياً ولا طارئاً، بل بالعكس كان هذا الوجود مقصوداً. وصحيح، من جهة أخرى، أنها ليست المرة الأولى التي نجد فيها العبارة الجبرية للمشتق في «الرسالة»؛ فلقد أدخلها الطوسي أيضاً لإنشاء طريقة حل عددي للمعادلات [راجع الفصل الأول]. لكنّه في كلتا الحالتين اكتفى بإعطاء التعليمات حول تطبيق طريقته من دون استخلاص أفكار عامة. ففي كتاباته التي وصلت إلينا حتى الآن لا نجد سوى حسابات مبنية على أمثلة[٧] ، من دون أي عرض للمسيرة الفكرية التي قادته إلى اكتشافاته. هذا الإحجام عن الشرح لا بدّ من أن يذكرنا بشبيه له عند فيرما وبخصوص الموضوع نفسه في دراسته *Methodus ad Disquirendam maximam et minimam*. وفي وضع من هذا النوع يجب اعتماد المزيد من الحذر؛ والطرق الفضلى للدراسة تقتضي عدم الابتعاد عن النص، أي عدم تقديم أية فكرة ما لم يحوها النص بشكل أو بآخر.

إننا نجد في هذه الرسالة وللمرة الأولى في تاريخ الرياضيات، على حد علمنا، فكرة رئيسية: تحديد النهايات القصوى (extrêma) للعبارات الجبرية من جهة، ومن جهة أخرى دراسة تغيرات الدالات المتعددة الحدود في جوار نهاية قصوى معينة لكي يصار إلى احتساب هذه النهاية القصوى. ولم يكن الموضوع هذه المرة احتساب حجم أقصى أو مساحة قصوى، بل احتساب القيمة القصوى لدالات كثيرة الحدود؛ وتجدر الإشارة إلى أن ترجمة هذه المساعي إلى لغة التحليل الرياضي الحديث قد يُعرِّضنا إلى الخلط الخاطىء بينها وبين غيرها من المساهمات. وهنا نستطيع مثلاً التذكير بإحدى مسائل

---

(٧) ليس المقصود هنا «الأمثلة» بمعناها الضيق، إنما المقصود هو الحالات أو الدالات التي تعرّض الطوسي لدرسها، بخاصة منها المعادلات 21 - 25. (المترجم).

أرخميدس[٨] التي قد توحي ترجمتها إلى اللغة العصرية بأنه استعمل طرقاً مشابهة[٩]. لكن أرخميدس لجأ، في الواقع، إلى بناء هندسي بواسطة التقاء قطعين مخروطيين، زائد ومكافىء، ومن ثم برهن أن حجماً معيناً هو حجم أقصى استناداً إلى خصائص قطعين مخروطيين متماسين في نقطة معينة. وعبثاً نبحث في النص المتعلق بهذا الموضوع، والذي وجده أوطوقيوس (Eutocius)، عن عبارات جبرية أو عن مشتقاتها. وفي هذا المجال يمكن ذكر العديد من الأمثلة الأخرى إن في الرياضيات اليونانية أو في الرياضيات العربية.

ولكي نستوعب أصالة مساعي الطوسي بشكل أفضل، نأخذ مثل المعادلة (23) التي يمكن إعادة كتابتها على الشكل التالي:

$$f(x) = x(b - ax - x^2) = c\ ;$$

والمسألة الأساسية هي إيجاد القيمة $x = x_0$ التي بها تصل $f(x)$ إلى نهايتها العظمى.

شرح الطوسي كيفية المرور من المعادلة (23) إلى معادلتين من النوع (15) والنوع (21) باستعمال تحويلات أفينية:

$$x \rightarrow X = x_0 - x \quad \text{وَ} \quad x \rightarrow X = x - x_0$$

وفي سياق شرحه هذا أعطى المتساويتين التاليتين:

$$f(x_0) - f(x_0 + X) = 2x_0(x_0 + a)X - (b - x_0^2)X + (a + 3x_0)X^2 + X^3;$$

وَ

$$f(x_0) - f(x_0 - X) = (b - x_0^2)X - 2x_0(x_0 + a)X + (a + 3x_0)X^2 - X^3.$$

ولا بدّ أن الطوسي قارن بين $f(x_0)$ و$f(x_0 + X)$ وبينها وبين $f(x_0 - X)$، ملاحظاً أنه في الفسحة $]0, \lambda_2[$، يكون التعبيران

$$X^2(3x_0 + a - X) \quad \text{وَ} \quad X^2(3x_0 + a + X)$$

---

(٨) Archimède, *Commentaires d'Eutocius, fragments*, éd. Ch. Mugler (Paris, Les Belles lettres, 1972), pp. 88 sqq.

(٩) انظر: I.G. Bachmakova, «Les Méthodes différentielles d'Archimède,» *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 2, no. 2, pp. 102 sqq.

موجبين. من ثم استطاع أن يستنتج من المتساويتين ما يلي:

- إذا كان $(b - x_0^2) \geq 2x_0(x_0 + a)$ يكون $f(x_0) > f(x_0 + X)$،
- إذا كان $(b - x_0^2) \leq 2x_0(x_0 + a)$ يكون $f(x_0) > f(x_0 - X)$؛

وبالتالي:

$$b - x_0^2 = 2x_0(x_0 + a) \Longrightarrow \begin{cases} f(x_0) > f(x_0 + X), \\ f(x_0) < f(x_0 - X); \end{cases}$$

وهذا يعني أنه في حال كون x_0 الجذر الموجب للمعادلة التالية:

$$f'(x) = b - 2a\ x - 3x^2 = 0\ ,$$

يكون $f(x_0)$ هو القيمة العظمى لِ $f(x)$ في الفترة المدروسة.

تجدر الإشارة إلى أن المتساويتين المذكورتين أعلاه تتلاءمان مع توسيع (مفكوك) تايلور حيث:

$$f'(x_0) = b - 2a\ x_0 - 3x_0^2\ ;\ \frac{1}{2!}f''(x_0) = -(3x_0 + a)\ ;\ \frac{1}{3!}f'''(x_0) = -1$$

يرمي الطوسي، إذاً، على ما يبدو، إلى ترتيب $f(x_0 + X)$ و$f(x_0 - X)$ حسب قوى X وإلى تبيان أنّ الوصول إلى النهاية العظمى يتحقق عندما يكون معامل X في هذا المفكوك هو الصفر. تكون إذن قيمة X التي تعطي $f(x)$ نهايتها العظمى هي الجذر الموجب للمعادلة $f'(x) = 0$.

يبقى أن نقول ان الطوسي قد يكون درس، في المتساويتين المذكورتين أعلاه، الدالّتين $f(x_0 - X)$ وَ$f(x_0 - X')$ حيث $X \neq X'$؛ لكن طالما انه اعتمد أسلوب المقارنة، يبقى تحليلنا السابق قائماً. إن هذا التوسيع (المفكوك) الواضح الذي أعطاه في سياق تحويل المعادلة (23) إلى معادلتين من النوع (15) و(21)، المحلولتين سابقاً، هو أيضاً مهم جداً. هذا ما يجب التنبه إليه في محاولة فهم الطرق التي اتبعها. وبصورة عامة، في إطار حل المعادلات، تبدو الطريقة متعلقة، جزئياً على الأقل، بالمسألة التالية، ذات الطبيعة الجبرية: تحويل المعادلة التي نبحث عن جذورها الموجبة إلى معادلات أخرى سبق وعُرفت طريقة استخراج جذورها الموجبة. إن المفكوك المذكور نفسه يبدو في إطار آخر كتحضير لطريقة الحل العددي للمعادلات. لكن هذه الطريقة ليست سوى الطريقة التي يشار إليها على أنها طريقة فيرما. ترتدي هذه الملاحظة أهمية كبرى كما سنبين فيما بعد. نكتفي آنياً بالتذكير بأن الطوسي كان يعلم بأنه في حال كون r جذراً لمعادلة من الدرجة الثالثة $P(x) = 0$، يكون كثير الحدود $P(x)$ قابلاً للقسمة على $(x - r)$. وبواسطة تحويل أفيني كان يمكنه ردّ معادلة إلى معادلة أخرى سبق وحلّها. لكن، رغم تحسسه لوجود علاقات عقلانية بين معاملات المعادلة وبين

جذورها، فإنّه لم يدرس هذه العلاقات لا بحد ذاتها ولا بالشكل العام، فلم يكن من الممكن لهذه العلاقات أن تظهر عنده إلا في حال كون جميع الجذور موجبة. وهذا بالضبط ما حصل في المعادلة (9) أي في:

$$x^2 + c = b.x$$

عند كون $b^2 \geq 4c$. في هذه الحالة يبرهن الطوسي بوضوح أن x_1 وx_2 هما الجذران الموجبان لهذه المعادلة، إذا، وفقط إذا، كان لدينا:

$$x_1 + x_2 = b \qquad \text{وَ} \qquad x_1 \,.\, x_2 = c$$

أما بخصوص معادلات الدرجة الثالثة فالمعادلة (20) هي الوحيدة التي لها ثلاثة جذور موجبة. هنا لم يتطرق الطوسي إلى مسألة العلاقة بين الجذور والمعاملات، فهو لم يلاحظ أصلاً وجود الجذور الثلاثة (الموجبة).

شكل غياب الأعداد السالبة عائقاً أمام وضع مسائل العلاقات المنطّقة بين المعاملات والجذور الصحيحة. أضف إلى ذلك، أن هذا الغياب أثقل الخطى وأخّر التوصل إلى النتائج المرجوّة لأنه استدعى الإكثار من الحالات التي يفترض دراستها في بعض الاستدلالات. هذا ما يظهره بوضوح مثل دراسة النهاية العظمى للدالة $f(x)$ في الحالة الثانية من المعادلة (25). فلكي يقارن بين $f(x)$ و$f(x_0)$ في الفسحة $]0, x_0[$، يقسم هذه الفسحة إلى اثنتين: $]0, a[$ وَ $]a, x_0[$؛ ومن ثم يستدعي في حساباته الفوارق $(a - x_0)$ وَ$(a - x)$ من جهة و$(x_0 - a)$ وَ$(x - a)$ من جهة ثانية. ونستطيع ايجاد مزيد من الأمثلة المشابهة في أماكن أخرى من الرسالة.

ولقد تسبب غياب الأعداد السالبة أيضاً باضطرار الطوسي للاستعانة بمعادلتين مساعدتين في المسائل من (21) إلى (25). ولقد سبق وعالجنا حالة المعادلة (21). لكن لنضف أنها تؤول إلى معادلة من النوع (15) بواسطة التحويل $x \to -X$. أما بالنسبة إلى المسائل الأربع الأخرى، ففي حال كون $c < c_0$ يكون للمعادلة $f(x) = c$ ثلاثة جذور حقيقية، x_1، x_2، x_3:

$$x_3 < 0 < x_1 < x_0 < x_2 \,;$$

وبواسطة التحويل الأفيني $x \to x_0 + X$ تتحول المعادلة $f(x) = c$ إلى المعادلة $g(x) = c_0 - c$ التي هي من النوع (15) الذي يحوز، تحت الشروط نفسها، على ثلاثة جذور حقيقية، أحدها فقط موجب:

$$X_3 < -x_0 < X_1 < 0 < X_2$$

هنا لا يأخذ الطوسي بالاعتبار سوى X_2 الذي يعطيه $x_2 = x_0 + X_2$. من ثم يعمد إلى تطبيق التحويل الأفيني $x \to x_0 - X$، مفترضاً أن $X < x_0$؛ وهذا ما يعطيه المعادلة

$h(X) = c_0 - c$ أي المعادلة $g(-X) = c_0 - c$ وهي من النوع (21) ولها ثلاثة جذور حقيقية:

$$X_2 < 0 < X_1 < x_0 < X_3 \; ;$$

وبما أنه افترض $x = x_0 - X$ أي أن، $X < x_0$، لا بد له من اختيار X_1 واعتباره الجذر المناسب $(0 < X_1 < x_0)$ مهملاً X_2 وX_3، فيحصل على الجذر $x_1 = x_0 - X_1$.

نرى، إذن، أن غياب الأعداد السالبة تسبب في تعدد الحالات التي يجب درسها، وفي إطالة العمليات الحسابية، كما تسبب في الاستفاضة في العرض. وقد شكل هذا النقص حاجزاً أمام النفاذ إلى نص الطوسي، وزاد من خطورة هذا الحاجز غياب أية رمزية للتعبير عن المفاهيم الجديدة وحساباتها.

نرى إذن أن الجزء الثاني من الرسالة هو بشكل واضح تحليلي: تجري العمليات الحسابية فيه بشكل جبري بحت ولا وظيفة للأشكال الهندسية سوى المساعدة على التخيُّل.

ثالثاً: طريقة ايجاد النهايات العظمى

استطاع تحقيقنا، استناداً إلى رسالة الطوسي وحدها، أن يثبت أن هذا العمل احتوى على طريقة عاد واكتشفها فيرما وطوّرها من بعده بخمسة قرون. هذه النتيجة قد تشكل مفاجأة؛ فإذا ما ثبتت يمكنها أن تسمح لنا بمعرفة أفضل بتاريخ أحد أصول بعض المفاهيم التحليلية، كما يمكنها أن تلقي المزيد من الضوء على مساعي هذا الرياضي الهام الذي عرفه القرن السابع عشر.

وقلّ أن دُرست نصوص كما دِرست صفحات فيرما التي عالجت طريقة ايجاد النهايات العظمى والصغرى. وقلّما استدعت كتابات مثل ما استدعته هذه الكتابات من تفسيرات وشروحات متناقضة. فمنذ الانتقادات التي وجهها مونتوكلا[١٠] (Montucla)

---

(١٠) انظر: J. Itard, *Essais d'histoire des mathématiques,* réunis et introduits par R. Rashed (Paris: Blanchard, 1984), p. 236.

انظر أيضاً: Jean Etienne Montucla, *Histoire des mathématiques,* nouvel tirage augmenté d'un avant-propos par Ch. Naux (Paris: A. Blanchard, 1960), t. 11, p. 113.

حيث يكتب: «نلاحظ هنا وبشكل عابر أن السيد هويغنز قد أخطأ في عرضه لهذه القاعدة. ترتكز هذه القاعدة بحسب قوله على أنه عندما تصل الإحداثية الصادية إلى نهايتها الصغرى يوجد من جهتيها إحداثيتان تجاورانها وتكونان متساويتين. وهذه بالفعل خاصية تتمتع بها النهاية الصغرى والنهاية العظمى، لكنها ليست الخاصية الرئيسية لقاعدة السيد دو فيرما».

ضد قراءة هويغنز (Huyghens) لطريقة فيرما، لم يكفّ المؤرخون عن التساؤل عن الطبيعة الحقيقية لهذه الطريقة وحتى عن وحدتها بالذات. إن مشروعنا أكثر تحديداً وأكثر تواضعاً، إنّه يرمي إلى التذكير، بما أمكن من الاقتضاب، بالدرب التي سلكها فيرما، لكي نتوقف عند آخر شكل خرجت به طريقته، هذه الطريقة التي استطعنا أيضاً إظهارها عند الطوسي. ولنبدأ بعودة إلى ما عَرضَه الطوسي لكي نقدم ملخصاً عاماً لاتجاه مسيرته.

لنأخذ إذن المعادلة

$$(1) \qquad f(x) = c$$

والمتساويتين

$$(2) \qquad f(x_0 + X) - f(x_0) = X\ P_1(x_0) + \sum_{k=2}^{n} \frac{X^k}{k!}\ .\ P_k(x_0)$$

$$(3) \qquad f(x_0 - X) - f(x_0) = -X\ P_1(x_0) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k\ .\ \frac{X^k}{k!}\ .\ P_k(x_0)$$

$$f,\ P_k \in \mathbb{Q}[X] \quad , \quad k = 1,\ 2,\ ...,\ n.$$

ترتكز طريقة الطوسي كما رأينا على الفكرة التالية: تصل $f(x)$ إلى نهايتها القصوى (extrêmum) $f(x_0) = c_0$ في النقطة x_0، إذا كان $P_1(x_0) = 0$ وإذا وجد جوار لِ x_0 يكون فيه للعبارتين:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{X^k}{k!}\ .\ P_k(x_0) \qquad \text{وَ} \qquad \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{X^k}{k!}\ .\ P_k(x_0)$$

الاشارة نفسها.

بالنسبة إلى معادلات (21) حتى (25) لا يأخذ الطوسي بالاعتبار سوى الفترات التي تكون عليها $f(x) > 0$ ولا يدرس، في الواقع إلا النهاية العظمى لـ $f(x)$.

هذه هي الطريقة التي أدت إذن بالطوسي إلى المفهوم الذي سمي فيما بعد بـ «المشتق». فبعد أن وجد توسيعاً (مفكوكاً) لكثير الحدود، بالنسبة إلى المتغير المساعد، تعرّف إلى دور عبارة الدالة المشتقة. ولقد سارت دراسة الطوسي بمجملها بشكل جبري بحت؛ لكننا لا نملك هنا سوى تركيب لطريقته، فلم يُشر الكاتب إلى ما يدل على تحليلها. إن قراءات متكررة لرسالته جعلتنا نُرجّح أنه اعتمد في استدلالاته على الرسم البياني المحدد بـ $(x > 0;\ f(x) > 0)$. أمّا فيما يخص الحدود الأخرى لمفكوك تايلور فسوف نرى في الفصل الأول، أن الطوسي استعان بالحد الثاني، لكنه لم يتساءل بتاتاً عن الشروط التي يجب أن تلبيها هذه الحدود المختلفة.

يعرض فيرما، في دراسته *Methodus ad Disquirendam maximam et minimam* المؤرخة سنة ١٦٣٧م على أقرب تقدير[١١]، طريقته بشكل عام نسبياً لكن من دون إعطاء أي تبريرات لهذه الطريقة. وفي سنة ١٦٣٨م يعود إلى هذه الطريقة نفسها في Ad Eamdem Methodum[١٢] حيث يحاول جاهداً أن يكون أكثر وضوحاً. لكنّه، وفي المقالين كما تظهر الأمثلة التي عالجها، يأخذ العلاقة (2) لكي يقارن بين $f(x_0)$ و$f(x_0+X)$. وكان هدفه، المشابه للمشروع المستشف من أعمال الطوسي، هو محاولة فصل الحدود الأولى لتوسيع تايلور عن الحدود الأخرى، ذلك لأن المسألة التي اقتضت هذا التوسيع - مسألة النهاية القصوى - تتعلق فقط بهذه الحدود الأولى. ولكي يصف هذه العملية، يستعين فيرما بتعبير «adégalité» المستعار من ترجمة «علوم الحساب» لديوفنطس[١٣]، حيث نقل كلمة παρισότης. هذا التعبير مأخوذ من تعبير «égalité» أي المساواة لكنّه «ليس المساواة بل الاقتراب بقدر ما...» على حد ما كتب أ. جيرار (A. Girard)[١٤]. بمعنى آخر، وعودة إلى كلام فيرما بالذات، هذه الكلمة تدل على اعتبار عبارتين أو حدّين «وكأنّهما متساويان على الرغم من أنهما ليستا كذلك»[١٥]. وكما تشهد الأمثلة التي أعطاها فيرما، تسمح هذه المقارنة، انطلاقاً من العلاقة (2)، بفصل $P_1(x)$ وباستنتاج الشرط التالي: قيم x التي تجعل قيمة $f(x)$ نهاية عظمى أو صغرى هي جذور المعادلة:

$$P_1(x_0) = 0.$$

ولكي نوضح الطابع الجبري لأعمال فيرما، نقرأ ما كتبه هو بالذات عام ١٦٣٦م: «لكن ما أقدّره أكثر من كل ما عداه هو طريقة لتحديد جميع أنواع المسائل المسطحة والمجسمة، وجدت بواسطتها اختراع maximae et minimae in omnibus omnino problematibus (يعني النهايات العظمى والصغرى...(المترجم)) وذلك باستخدام معادلة، بسيطة كبساطة معادلة التحليل العادي»[١٦].

في مقاله الأخير هذا لا يضيف فيرما شيئاً على ما ورد في كتابته الأولى تبريراً لطريقته. لكن، يبدو أنه منذ العام ١٦٣٨م كان يحوز على مثل هذه التبريرات. ففي ردّه

(١١) Pierre de Fermat, *Oeuvres de Fermat*, publiées par les soins de mm. Paul Tannery et Charles Henry, sous les auspices du ministère de l'instruction publique (Paris: Gauthier - Villars et fils, 1891 - 1896), vol. 1, pp. 133 - 136.

(١٢) المصدر نفسه، ص ١٤٠ - ١٤٧.

(١٣) المصدر نفسه، ص ١٤٠.

(١٤) A. Girard, *l'Arithmétique de Simon Stevin de Bruges* (Leiden: [n. pb.], 1625), p. 626.

(١٥) Fermat, Ibid, p. 140.

(١٦) المصدر نفسه، المجلد الثاني (١٨٩٤)، ص ٥٦.

على انتقادات ديكارت التي تتلخص بأنه اهتدى إلى طريقته مصادفة من دون معرفة مبادئها الحقيقية، كتب فيرما إلى ميرسين (Mersenne): «. . . مع أن البرهان الذي لم أقدّمه بعد يرتكز أساساً على كون $A+E$ ($\Longleftrightarrow x_0+X$) وَ $A-E$ ($\Longleftrightarrow x_0-X$) يفيان بالغرض نفسه»، أي أنه يتوجب مقارنة $f(x_0)$، $f(x_0+X)$ و$f(x_0-X)$. إن هذه الفكرة هي بالضبط ما يتبين من رسالته الشهيرة لبرولار (Brûlart) بتاريخ ٣١ أيار/مايو سنة ١٦٤٣م.

يبدأ فيرما هذه الرسالة بالتأكيد على أن البحث عن النهاية القصوى «يجب أن يؤدي إلى نقطة واحدة أو إلى حدّ (terme) واحد». من ثم يشرح أنه عندما تكون هذه النقطة x_0، فإنّ للعبارتين (2) و(3) الاشارة نفسها (إيجاباً أو سلباً). تكمن المسألة إذن، كما يقول فيرما «في إيجاد طريقة يعطي بواسطتها $A+E$ وَ $A-E$ الحد نفسه (terme) لتمثيل A، بحيث تمثل A المذكورة، النقطة المنصفة ويكون كل ما على جانبيها إما زيادة وإما نقصاناً بحسب بحثنا عن الكبرى أو عن الصغرى. لكن، يبدو أن هناك طريقة تعطي المعادلة نفسها بواسطة $A+E$ أو بواسطة $(A-E)$ وهذا ما تظهره لكم العبارة، كما يظهره المنطق للوهلة الأولى. ذلك لأن $A-E$ تعطي دائماً الحدود نفسها التي تعطيها $A+E$، مع الفارق الوحيد الذي هو تغيّر الإشارات في مواضع القوى المفردة، بحيث لا تتبدل المعادلة في شيء».

وفي هذه المناسبة يستعيد فيرما مثلاً رياضياً نستطيع ترجمته كما يلي:

$$f(x) = ax^2 - x^3 \qquad 0 < x < a.$$

لنفرض أن $x = x_0$ يعطي النهاية القصوى ومن ثم لنقابل بين:

$$f(x_0+X) = ax_0^2 - x_0^3 + (2ax_0 - 3x_0^2)X + (a-3x_0)X^2 + X^3$$

وبين

$$f(x_0-X) = ax_0^2 - x_0^3 - (2ax_0 - 3x_0^3)X + (a-3x_0)X^2 - X^3.$$

فإذا كان x_0 جذراً للمعادلة

$$2ax_0 - 3x_0^2$$

يكون $x_0 = \dfrac{2a}{3}$، وبالنسبة إلى X حيث $X < a$، يكون لدينا:

$$f\left(\frac{2a}{3}+X\right) - f\left(\frac{2a}{3}\right) < 0 \quad \text{وَ} \quad f\left(\frac{2a}{3}-X\right) - f\left(\frac{2a}{3}\right) < 0$$

فتكون $f(\frac{2}{3}a)$ قيمة عظمى.

في هذه الرسالة يعلن فيرما أن النهاية القصوى هي إمّا نهاية عظمى وإما نهاية صغرى تبعاً لإشارة الحد المرافق لِـ X^2. إن هذا النص، إذا ما أُكمل برسالته في السابع من نيسان/أبريل ١٦٤٣م إلى مرسين يظهر أنّ طريقة فيرما هذه ذات طبيعة جبرية واضحة، كما يظهر أنها وُضعت فقط لكثيرات الحدود. لكن هذا التشابه مع الطوسي يذكر بتشابه آخر: إن فيرما يعتمد في كتاباته أسلوب التركيب تاركاً تحليلاته إلى نصوص أخرى كالنص الشهير «طريقة القيم العظمى والصغرى»(١٧). الفكرة الأساسية في هذا التحليل يُمكن التعبير عنها كما يلي: من الجهتين المتقابلتين للقيمة القصوى تمر الدالة بقيمتين متساويتين، بشكل يجعل المعادلة (1) تحوز على جذرين يحصران $x = x_0$، عندما تكون c قريبة بشكل كاف من هذه القيمة القصوى. وعند نقطة النهاية القصوى يتساوى الجذران بحيث يكون للمعادلة جذر مزدوِج. ويتهيأ لنا أننا نفقد المغزى الأساسي لدراسة الطوسي إذا لم نفترض أنه امتلك هذه الفكرة ولو بالحس فقط، وأنه أدرك بأن أية نقطة تحقق النهاية العظمى هي نقطة مزدوجة من التقاء الرسم البياني لِـ $(x > 0,\ f(x) > 0)$ مع المستقيم $y = c$.

ومهما كان الطريق الذي اتبعه تحليل الطوسي، فإن تركيبه يكفي للبرهان على أننا في الواقع أمام طريقة فيرما. والآن، وقد اضحى تاريخ طريقة النهايتين العظمى والصغرى يختلف عما كان عليه، تصبح المسألة التي تطرح نفسها حالياً على المؤرخين هي مسألة التحديد الدقيق للمسافة التي انفرد وتمايز فيها فيرما تطبيقاً لطريقته، على مسائل لم يتطرق إليها الطوسي.

* * *

انطلاقاً من أعمال الخيّام، أراد الطوسي تكريس عمل كامل لنظرية المعادلات الجبرية التي يمكن القول بأنها أضحت فصلاً مستقلاً من فصول الرياضيات. وتأكيداً لهذه الوضعية، على ما يبدو، ضمّن الطوسي بداية كتابه، دراسة المنحنيات التي سيستخدمها فيما بعد؛ كما أدخل وبرّر رياضياً الطريقة ـ المسماة طريقة روفيني ـ هورنر ـ من أجل حل عددي للمعادلات. وبتبنّيه مشروع الخيّام، رمى الطوسي إلى التحقيق الأكثر اكتمالاً والأكثر وحدة لهذا المشروع. إن الهدف الأساسي الذي يطبع رسالته هو، في رأينا، إعادة بناء الوحدة لفصل خصّص للمعادلات الجبرية. وطالما لم ندرك بشكل كاف مرماه المتعَمّد في إعداد عرض منتظم ومترابط، نبقى بعيدين عن فهم ما كتب. لكن هذا المشروع بالذات هو الذي لم يستطع الصمود أمام بناء «الرسالة»: الوحدة التي

---

(١٧) المصدر نفسه، المجلد الأول، ص ١٤٧ ـ ١٥٣.

أرادها تحطمت مع بروز معضلة لم يكن من الممكن توقّعها منذ البداية. هذه المشكلة قسمت الرسالة إلى قسمين؛ ولا شك أن هذين القسمين متعاضدان لكنهما ينتميان إلى نوعين مختلفين من الرياضيات. القسم **الأول** يندرج في التقليد الذي أرساه الخيّام والذي يستند إلى البناء الهندسي لجذور المعادلات. لكن، وفي سياق دراسته هذه، يفرض الطوسي على نفسه مهمة إضافية: البرهان كنهج؛ هذا يعني وفي كل حالة من الحالات، برهان وجود النقطة التي تلتقي فيها المنحنيات والتي تشكل إحداثيتها السينية الجذر الموجب المطلوب. هذه المتطلبات المستجدة تقود الكاتب إلى مسائل حصر الجذور وفصلها بعضها عن بعض، ومعالجة شروط وجودها، وذلك بكل استقلالية عن بنائها الهندسي. إن حلّ هذه المسائل هو الذي دعا الطوسي إلى تعريف مفهوم النهاية العظمى لعبارة جبرية وإلى الاجتهاد لايجاد المفاهيم والطرق التي تساعده على تحديد النهايات العظمى. هذا المسعى قاد الرياضي إلى اختراع مفاهيم وطرق لم تتم تسميتها إلا في ما بعد؛ وبالإضافة إلى ذلك فرض عليه تغييراً في أسلوب المعالجة، توصلاً إلى التعامل مع هذه المفاهيم. فعلى حدّ علمنا اكتشف، للمرة الأولى، ضرورة المعالجة الموضعية.

الجزء **الثاني** من «الرسالة»، المخصص بالضبط لهذه المسائل، يختلف عن الجزء الأول بالمواضيع الرياضية التي يتعامل معها ويتميّز عنه بالأسلوب الرياضي الذي يتبناه. لكن اكتشاف هذا العالَم الجديد الذي استطاع الطوسي بالكاد بلوغ شاطئه، كان أكبر من أن يكتفي باللغة الطبيعية؛ كان يتطلب لغة تتناسب بصورة أفضل مع مفاهيمه ووسائله. هنا إذن تدخل الرمزية لتلعب دوراً سلبياً: باختصار، إذا كانت اللغة الطبيعية ما زالت تتناسب مع متطلبات الجبر الحسابي فإنها أصبحت تنتصب عائقاً حقيقياً أمام توسع البحث الذي بدأ مع الثنائية الجدلية للجبر والهندسة. ولربّما نجد هنا، أي في الرمزية، المجال الذي ينبغي البحث فيه عن الأسباب الرئيسية لانتهاء أبحاث الرياضيات العربية في هذا الموضوع. وربما نجد هنا أيضاً تفسيراً لانطلاقة الرياضيات في أوروبا القرن السابع عشر.

لقد برهنّا إذاً أن الاكتشاف من وجهة النظر الموضوعية والتحليلية هو ما ميّز مساهمة الطوسي؛ لذلك ينبغي أن نتخلى عن الأفكار المسلّم بها مسبقاً عن تاريخ تزاوج الجبر والهندسة قبل القرن السابع عشر، وبخاصة عن الرأي السائد عامة عن المستوى الذي وصلت إليه الرياضيات العربية في هذا المجال. أما الآن فيتوجب علينا تحديد موقع الطوسي من الناحية التاريخية.

رابعاً: الرسالة حول المعادلات: الكاتب، تاريخ الكتابة، وعنوان الرسالة

تشير الشهادات التاريخية التي وصلت إلينا إلى أن تلميذ الخيّام، شرف الدين المسعودي، كتب مؤلفاً عالج فيه نظرية المعادلات كما عالج مسألة حل المعادلات التكعيبية. ويبدو أن هذا الكتاب، فيما لو وُجد فعلاً، قد فقد نهائياً(١٨). أما شرف

---

(١٨) يقول المؤرخ الصفدي أن شرف الدين المسعودي كان أحد تلامذة الخيام: لقد درس تحت إشرافه، كتاب ابن سينا، **الإشارات**. انظر: صلاح الدين خليل بن أيبك، **كتاب الوافي بالوفيات**، النشرات الإسلامية؛ ج٦، ق١ (ڤيسبادن: فرانز شتاينر، ١٩٧٤)، مج ٢، ص ١٤٢. فاستناداً إلى الصفدي، كان المسعودي إذن تلميذاً للخيام في الفلسفة، إن اهتمامات المسعودي اللاحقة لا تكذب هذا القول: فمن المعروف أن له تفسيراً للخطبة التوحيدية، انظر: الخيام، **رسائل الخيام الجبرية**، ص ١٨ من المقدمة العربية. وهو معروف كفيلسوف من قبل معاصريه وخاصة من قبل فخر الدين الرازي. لكن هل بإمكاننا أن نستنتج أنه درس أيضاً الرياضيات على يد أستاذه؟ نجد أنفسنا غير قادرين على الإجابة على هذا السؤال في الوقت الحاضر. لكن هناك فئتين من الشهادات تسندان إليه مؤلفاً يتناول المعادلات الخمس والعشرين، أي المعادلات من الدرجة الثالثة وما دون.

الفئة الأولى من الشهادات تضم الرياضيين: كمال الدين الفارسي، جمشيد الكاشي، يحيى الكاشي، واليزدي. فلقد كتب الفارسي: «فإن المعادلة قد ترتقي من التي بين جنسين مفردين إلى التي بين جنسين وجنسين أو ثلاثة أو أكثر إلى غير نهاية، ثم التي بين جنسين وجنسين أو ثلاثة أو أكثر، ثم التي بين ثلاثة وثلاثة أو أكثر إلى غير نهاية. ويُعجز عن استخراج المجهول في أكثرها بل في جميعها إلا ما يقل بما لا يعتد به بالقياس إلى البواقي، الأولون والآخرون وإن بلغوا الغاية في الأفكار والنهاية في الأنظار وبذلوا فيها دهور جهدهم وصرفوا فيها قرون وكدهم. ويصدق ما قلناه ويحقق ما ادعيناه أنه لم ينقل من الأولين - شكر الله مساعيهم - مع وفور اهتمامهم بتوفير قواعد العلوم وتدوين أبواب النظريات في أنواع الحكم وأصناف الصناعات، إلا مسائل ست، ولا متأخرين إلا عن الإمام المتبحر شرف الدين المسعودي جزاه الله خير الجزاء، فقد نقل أنه بين استخراج الشيء في تسع عشرة مسألة أخرى عن الست». انظر: كمال الدين أبو الحسن الفارسي، **أساس القواعد في أصول الفوائد** (استنبول، مخطوطة شهيد علي باشا، ١٩٧٢)، أوراق غير مرقمة.

هنا نلاحظ، وفي الأمر غرابة، أن الفارسي لم يتطرق إلى مساهمة الخيام التي كانت معروفة، ليس في عصر الفارسي وحسب إنما أيضاً في ما بعد ذلك، فإن أقلّ ما يمكن استنتاجه هو أن الفارسي تبع مجرى أبحاثه في الجبر الحسابي من دون أن يهتم لهذا التيار الآخر. أضف إلى ذلك أن قول الفارسي المذكور، لا يحتوي على أي إسناد محدد يدل على إلمامه المباشر بمضمون رسالة المسعودي. لكن الأمر يختلف تماماً عندما يذكر الفارسي في كتابه عن البصريات رسالة المسعودي حول «الآثار العلوية»، حيث يستشهد بدقة بمحتوى الرسالة. أما الأقوال الأخرى من هذه الفئة فتستند كلها إلى المصدر نفسه، أي إلى الفارسي نفسه. فلقد كتب جمشيد الكاشي: «وقد أورد شارح البهائية (أي الفارسي) أن الإمام شرف الدين المسعودي استخرج تسع عشرة مسألة غير الست المشهورة وبيّن كيفية استخراج المجهول منها». انظر: غياث الدين جمشيد بن مسعود الكاشي، **مفتاح الحساب**، تحقيق أحمد سعيد الدمرداش ومحمد حمدي الحفني الشيخ؛ مراجعة عبد الحميد =

الدين الطوسي، فلم يظهر إلا في الجيل الذي تلاه[19]، ولم يكتب عن سيرته إلا القليل من قبل المؤرخين المحدثين. فلقد كان الكلام عن سيرته ينتهي سريعاً، بمجرد تعداد رسائله التي حُفظت حتى الآن[20].

= لطفي (القاهرة: [د. ن.]، ١٩٦٧). إن هذا الكلام هو تماماً ما نقرأه عن الفارسي، في كتاب: يحيى بن أحمد الكاشي، **إيضاح المقاصد في شرح أساس الفوائد** (استنبول، جار الله، ١٤٩٤)، الورقة ١٢٨ ظ، حيث يقول: «وقد حكى الفاضل الشارح أن الإمام شرف الدين المسعودي استخرج تسع عشرة مسألة غير الست المشهورة وبيّن كيفية استخراج المجهول منها».

وأخيراً كتب محمد بن باقر زين العابدين اليزدي: «قال صاحب المفتاح، قد أورد شارح البهائية، أن الإمام شرف الدين المسعودي استخرج تسع عشرة مسألة غير الست المشهورة»، انظر محمد بن باقر اليزدي، **عيون الحساب** (استنبول، مخطوطة هازيناسي ١٩٩٣)، الورقة ٥٩ ظ.

نرى إذن أن جميع هذه الشهادات تنهل من المصدر نفسه: الفارسي، الذي لم تكن أقواله في هذا الخصوص غامضة وحسب، بل كانت أيضاً منقوضة بالوقائع التاريخية. هنا يمكن أن نتساءل إذا ما كان الفارسي ومن تبعه قد خلطوا بين رياضيين يفصلهما جيل واحد فقط ويحملان الاسم نفسه، شرف الدين. فمن المعروف أن الخيام توفي سنة ٥٨٢ للهجرة وأن تلميذه شرف الدين المسعودي كان لا يزال حياً في هذا التاريخ، استناداً إلى فخر الدين الرازي الذي أكد التقاءه بشرف الدين المسعودي سنة ٥٨٢ هـ (أي ١١٨٦م)، انظر: فخر الدين الرازي، **مناظرات العالم الرازي** (حيدرآباد، أوك ١٣٦، سلارجانك)، ظهر الصفحة ١٢. وفي هذا التاريخ كان الطوسي قد أصبح راشداً. ومن الأكيد أن ظننا هذا ليس من دون أساس؛ فعلى حدّ علمنا، لم ينسب إلى المسعودي أي عمل رياضي. ومن مؤلفاته المعروفة، بالإضافة إلى «الآثار العلوية»، رسالة «الكفاية» في علم الفلك؛ أما في الرياضيات فلا يعرف له أي مؤلَّف. ولعل الحجة الوحيدة التي يمكنها اعتراض هذه الفرضية هي الفئة الثانية من الشهادات التي قدمها كاتب **الطبقات** أحمد بن مصطفى (المعروف بطاشكبري زاده): «ومن الرسائل الوافية بالمقصود، رسالة شرف الدين محمد بن مسعود بن محمد المسعودي». انظر: أبو الخير أحمد بن مصطفى طاشكبري زاده، **مفتاح السعادة ومصباح السيادة في موضوعات العلوم**، تحقيق كامل بكري وعبد الوهاب أبو النور (القاهرة: [د. ن.]، ١٩٦٨)، مج ١، ص ٣٩٢. إن هذا التأكيد الذي يفتقد القرائن التي تعززه، لا يمكنه رفع جميع الشكوك المتعلقة بوجود مؤلف المسعودي هذا. وتبقى المسألة معلّقة بانتظار شهادات أخرى.

(١٩) المرة الأولى التي أثرنا فيها الانتباه إلى أهمية مساهمات الطوسي كانت في تحقيقنا لكتاب: السموأل بن يحيى بن عباس المغربي، **الباهر في الجبر**، تحقيق وتحليل صلاح أحمد ورشدي راشد، سلسلة الكتب العلمية؛ ١ (دمشق: جامعة دمشق، ١٩٧٢)، المقدمة الفرنسية ص ٩، من ثم عرضنا طريقته في عدة مقالات ابتداءً من عام ١٩٧٣، انظر الهامش رقم (٤) من مقدمة هذا الكتاب، ص ٤٢، وهناك دراسة من قبل عادل أنبوبا مستقلة عن دراستنا، صدرت سنة ١٩٧٦. انظر: Adel Anbouba, «Sharaf al-Dīn al-Tūsī,» *Dictionary of Scientific Biography* (1976).

(٢٠) انظر مثلاً: Heinrich Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und Ihre Werke,* Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften Mit Einschlass Ihrer Anwendungen; 10. hft (Leipzig: B.G. Teubner, 1900), p. 134.

أو: Carl Brockelmann, *Geschichte der Arabischen Literatur* (Leiden: E. J. Brill, 1937), vol. 1, p. 472.

تجدر إذن العودة إلى الأعمال التاريخية القديمة، أملاً بالتقاط النزر اليسير من المعلومات التي تقدمها حول شرف الدين الطوسي.

أصله من طوس (في شمالي ايران) كما تدل نسبته؛ ولم يظهر إلا عند بلوغه لكي يعود ويختفي بعد ذلك بسرعة في تلك الحقبة المضطربة التي شكّلها الربع الأخير للقرن الثاني عشر. وعلى الرغم من إجماع أصحاب كتب **الطبقات** القدامى على أهميته وعلوّ مقامه في الرياضيات، فإنهم لم يكرّسوا له أي مقال خاص كما فعلوا لأقرانه. فلقد اكتفوا بذكره في مقالاتهم المخصصة لتلاميذه الذين كان معظمهم أبعد من الوصول إلى مستواه. فيروي القفطي [١١٧٢ ـ ١٢٤٨م] بخصوص الحلبي أبي الفضل بن يامين أنه «قرأ على شرف الطوسي عند قُدومِه إلى حلب»[٢١]. وفي هذه المناسبة يشدد القفطي على تمكّن الطوسي من الرياضيات ومن الفلسفة كذلك، ويذكر بأن تلميذه توفي سنة ٦٠٤هـ/ ١٢٠٧م. بعد القفطي بقليل، وفي القرن نفسه (الثالث عشر) يقدم صاحب كتب **الطبقات**، ابن أبي اصيبعة، بعض التوضيحات الإضافية: درس أبو الفضل الحارثي على يد الطوسي في دمشق وتوفي سنة ٥٩٩هـ/ ١٢٠٢م عن سبعين عاماً[٢٢]. وكذلك كان الطوسي أستاذاً في الموصل لفترة لا بأس بها كما توحي الحادثة التي سيقت كما يلي: «ولما كان شرف الدين الطوسي بمدينة الموصل، وكان أوحد زمانه في الحكمة والعلوم الرياضية وغيرها، سافر ابن الحاجب والحكيم موفق الدين بن عبد العزيز إليه ليجتمعا به، ويشتغلا عليه، فوجداه قد توجه إلى مدينة طوس»[٢٣]. وبحسب الكاتب نفسه، توفي موفق الدين سنة ٦٠٤هـ/ ١٢٠٧م، عن ستين عاماً تقريباً.

ومن بين جميع تلامذة الطوسي، يعتبر كمال الدين بن يونس (٥٥١ ـ ٦٣٩هـ/ ١١٥٦ ـ ١١٤٨م) الأشهر من دون منازع. ولم يفت المؤرخ ابن خلّكان الذي عرفه شخصياً أن يذكر أنه درس تحت إشراف الطوسي «**أصول إقليدس والمجسطي**»؛ بمعنى آخر، تلقى ابن يونس ثقافته الأولية على يد الطوسي[٢٤]. أقوال ابن خلّكان هذه تؤيّدها كتابة لابن يونس نفسه. ففي نص نستغرب لماذا لم يلحظه أحد، يقول مؤلّف **طبقات الفقهاء**، تاج الدين السبكي: «ورأيت بخط الشيخ كمال الدين بن يونس على الجزء

---

(٢١) أبو الحسن علي بن يوسف القفطي، **تاريخ الحكماء، وهو مختصر الزوزني المسمى بالمنتخبات الملتقطات من كتاب اخبار العلماء بأخبار الحكماء**، تحقيق يوليوس ليبرت (ليبتزج: [ديتريخ]، ١٩٠٣)، ص ٤٢٦.

(٢٢) أبو العباس أحمد بن أبي أصيبعة، **عيون الأنباء في طبقات الأطباء**، شرح وتحقيق نزار رضا (بيروت: دار مكتبة الحياة، ١٩٦٥)، ص ٦٧٠.

(٢٣) المصدر نفسه، ص ٦٥٩.

(٢٤) شمس الدين أبو العباس أحمد بن خلّكان، **وفيات الأعيان وأنباء أبناء الزمان**، ٨ج (بيروت: [د.ن.]، ١٩٧٧)، ج٥، ص ٣١٤ وج٦، ص ٥٢ ـ ٥٣.

الأول من إقليدس إصلاح ثابت بن قرة ما نصه: «قرأت على الشيخ الإمام العالم الزاهد الورع شرف الدين، فخر العلماء، تاج الحكماء، أبي المظفر أدام الله أيامه، بعد عودته من طوس، هذا الجزء؛ وكنت حللته عليه نفسي مع كتاب **المجسطي** وشيء من **المخروطات**؛ واستنجزته ما كان وعدنا به من كتاب **الشكوك**، فأحضره واستنسخته. وكتبه موسى بن يونس بن محمد بن منعه، في تاريخه. هذه صورة خطه، وتاريخ الكتاب المشار إليه تاسع عشر ربيع الأول سنة ست وسبعين وخمسمائة هجرية»[٢٥].

يبدو من الثابت إذاً أن الطوسي أقام في الموصل قبل ١٢ آب/أغسطس ١١٨٠م، وأن تلميذه كان حينها في الخامسة والعشرين من عمره على الأكثر وأن المنهاج الذي درسه ابن يونس على يد أستاذه كان عبارة عن العناصر الضرورية لإعداد رياضي وفلكي شاب في مستوى ذلك العصر. فضلاً عن ذلك، إذا ما صدقت أقوال ابن يونس فإن إقامة الطوسي في الموصل لم تكن الأولى، لكنه كان في عودته إليها من طوس، التي جلب منها ما كان وعد تلميذه به، وهو ما يُحتمل كثيراً أن يكون كتاب **الشكوك** لابن الهيثم حول بطلميوس.

لذلك يكفي أن نقابل التواريخ المذكورة سابقاً لكي نصل من دون أية مجازفة إلى النتيجة التالية: حتى قبل العام ١١٨٠م كان الطوسي رياضياً ذائع الصيت يقصده الطلاب وينتقلون إليه. في هذا التاريخ كان تلميذه الدمشقي، أبو الفضل الحارثي، في الخمسين من عمره. لكن الحارثي درس على يد أستاذه في دمشق، وهذا ما يدعو إلى الافتراض بأن الطوسي قد أقام فيها قبل هذا التاريخ. وباتباع تحليل مماثل، تدل تواريخ وفيات تلاميذه، على أنه أقام في حلب في حدود الفترة نفسها.

في حوالى التاريخ نفسه تختفي آثار الطوسي. ومن كتب التاريخ وكتب **الطبقات** تظهر إشارة واحدة إلى وفاته. إلا أن هذه الإشارة أوقعت، للأسف، جميع المؤرخين المحدثين في خطأ[٢٦]؛ القضية تتعلق برسالة أرسلها الطوسي إلى أحد رجال الدولة.

---

(٢٥) تاج الدين أبو النصر عبد الوهاب بن علي السبكي، **طبقات الشافعية الكبرى**، تحقيق محمود محمد الطناحي وعبد الفتاح محمد الحلو (القاهرة: [د.ن.، د.ت.]) ج٨، ص ٣٨٦.

(٢٦) يتفق المؤرخون المحدثون على أن الطوسي توفي بحدود العام ٦١٠ للهجرة، أي العام ١٢١٣م. ومن دون تقديم أية حجة يحدد بعضهم مكان وفاته (المدينة التي ولد فيها). لكن هذه الفرضية التي كثيراً ما تقدّم على أنها واقع أكيد، لا ترتكز في الحقيقة سوى إلى خطأ بسيط ورد في نسخ تاريخ الرسالة التي بعث بها الطوسي إلى رجل دولة في همذان، المدينة التي كان يقيم فيها آنذاك.

وهناك في الواقع مخطوطتان من الرسالة نفسها، إحداهما في مدينة ليدن (شرقيات ١٤)، والأخرى في جامعة كولومبيا (شرقيات ٤٥). في مخطوطة ليدن، تاريخ الرسالة هو بالضبط السنة ٦٠٦ للهجرة، وبعد أن يفترض المؤرخون ضمناً بأنها آخر ما كتب الطوسي، يحددون تاريخ وفاته بالسنة ٦١٠ للهجرة. لكن هذا التاريخ ليس إلا نتيجة بسيطة لخطأ ارتكبه ناسخ مخطوطة ليدن. فلقد سبق وأثبتنا أن مخطوطة=

ولقد أرّخ الناسخ الرسالة، ونسي كتابة أرقام الآحاد والعشرات، في القرن السادس للهجرة، الأمر الذي يترك المعلومات فضفاضة في هذا المجال. أرسلت هذه الرسالة من همذان قبل بداية القرن السابع للهجرة. لكن، ليس ما يشير إلى كَوْنها آخر ما كتبه الطوسي ولا إلى كونه حرّرها بعد كتابة رسالته حول المعادلات.

ويبقى لدينا حقيقة واحدة لا مجال للنقاش فيها، وهي أن الطوسي عالم عاش في النصف الثاني للقرن الثاني عشر للميلاد. نشط واكتسب شهرة في نحو السبعينيات والثمانينيات منه؛ وُلد على ما يبدو في نهاية الثلث الأول من القرن وتنقّل بين طوس، همذان، الموصل، حلب ودمشق.

العمل الرئيس للطوسي، بشأن نظرية المعادلات، كان إذاً رسالة تعود إلى النصف الثاني من القرن الثاني عشر، حيث كانت معروفة ومنتشرة. وهناك شهادتان هما مخطوطتان تأتيان ببعض التوضيحات بشأن هذه «الرسالة» وتعودان إلى اثنين من رياضيي النصف الأول من القرن الثالث عشر. يكتب الأول وهو عبد العزيز الخلاطي: «والمسائل الجبرية تنتهي إلى خمسة وعشرين بمعادلة الكعاب وهو ما أظهره أستاذ أستاذي شرف الدين الطوسي نوّر الله ضريحه، إلا أنه لم يذكر فيه من الفروع والمسائل التي تقع في تلك الأصول شيئاً»[٢٧]. اللوم الذي يوجهه الخلاطي بشكل غير مباشر إلى «أستاذ أستاذه» هو كونه حدّ «الرسالة» بالمعادلات الخمس والعشرين من دون التطرق لفصول أخرى في الجبر. لكنّ خلوّ رسالة الطوسي من مواضيع جبرية أخرى لا يدعو إلى الاستغراب، فجذورها موجودة في التقليد الذي أرساه الخيّام، والذي هيمن بشكل

= ليدن هذه ليست سوى نسخة حديثة (تعود إلى القرن السابع عشر في أمستردام) للمخطوطة الوحيدة الموجودة في جامعة كولومبيا. انظر: الخيام، **رسائل الخيام الجبرية**، المقدمة العربية، ص ٢٠ وما بعدها. إننا نجد تاريخ الرسالة في المخطوطة الأخيرة هذه (ظهر الصفحة ٢٩) كالتالي: «سنة وخمسماية هجرية». ولسبب نجهله لم يسجل الناسخ لا آحاد السنين ولا عشراتها. ومهما يكن من أمر، فالثابت أن رسالة الطوسي هذه كتبت في القرن السادس، وليس ما يدل على أنه كان على قيد الحياة في بداية القرن التالي. أما في مخطوطة ليدن فهذا التاريخ مقدم على الشكل التالي «سنة ستة وستماية هجرية». وكلمة «ستماية» يمكن أن تكون مكتوبة إما بخط مختلف أو على الأقل بريشة مختلفة. ويمكن تقديم تفسير يمكن الدفاع عنه (وهذا أقصى ما يقال فيه) للخطأ الذي ارتكبه ناسخ مخطوطة ليدن، فالتاريخ بالعربية يمكن أن يكتب بدءاً بأرقام الآحاد مروراً بالعشرات فالمئات؛ والناسخ قد يكون قرأ «ستة» بدل كلمة «سنة» وأضاف من عنده كلمة سنة ليتّسق المعنى؛ فيكون قد قرأ «سنة ستة وخمسماية»؛ وطالما أن هذا التاريخ بعيد عن الواقع، أتى من صححه، وقد يكون المصحح هو الناسخ نفسه، فكتب «ستماية» بدل كلمة «خمسماية».

(٢٧) الخلاطي، **نور الدلالة في علم الجبر والمقابلة** (مخطوطة دنشكاه، جامعة طهران، رقم ٤٤٠٩)، ص ٢.

ظاهر في النصف الثاني من القرن الثاني عشر(٢٨). غير أن دراسة جبر الخلاطي تظهر أنه كان جبرياً حسابياً يسير في نهج الكرجي؛ فهو لم يستوعب البُعد الفعلي لمساهمة الخيّام، وكذلك بالنسبة إلى مساهمة الطوسي.

القول التاريخي الثاني حول رسالة الطوسي يعود إلى اسماعيل بن ابراهيم المارديني (الملقب بابن فلّوس) الذي يكتب: «وفي التحقيق إن مسائل الجبر لا تتناهى ولا تنحصر في هذه الست على ما ذكره الطوسي» [ص ١٣] «فهذه خمس وعشرون <معادلة> بعضها يمكن إخراجه بتلك الست المشهورة، التي لا يمكن إخراجها بها، لا بد فيها من طريقة عمر الخيّام المستخرجة من مقالات ديوفنطس أو طريقة الجدول التي وضعها الإمام شرف الدين المظفر بن محمد الطوسي وتُخرجها عليه»(٢٩). فاستناداً إلى ابن فلّوس إذاً، لم يكن الطوسي في «رسالته» أحد مطبقي «طريقة الجداول» فقط، وهي الطريقة المستعملة بالضبط في الحل العددي للمعادلات، إنما كان هو من وضع هذه الطريقة(٣٠). إن الذين أتوا بعد الطوسي (بجيل واحد على الأكثر) أكّدوا في حينه أن عمله الجبري يحوي دراسة خمس وعشرين معادلة كما يحوي طريقة تحل بها هذه المعادلات عددياً. وهذا، بالتحديد، محتوى «الرسالة» التي وصلت إلينا؛ لكن أمانتها للأصل تثير مسألة جدية: فمنذ السطور الأولى للرسالة نستنتج أن النص الأساسي قد تبدّل من قبل أحدهم. وأننا نجهل كلّ شيء عن الشخص الذي بدّل بالنص، سوى أنه عاش قبل نهاية القرن الثالث عشر كما يدل تاريخ المخطوطة(٣١). إن هذا المجهول يعلن من دون مواربة، في فقرة تمهيدية «للرسالة»: «. . . فإني قصدت في هذا الكتاب تلخيص صناعة الجبر والمقابلة وتهذيب ما وصل إليّ من كلام الفاضل الفيلسوف الأعظم شرف الدين المظفر بن محمد الطوسي وتحويل كلامه من إفراط التطويل إلى حد الاعتدال. وأسقطت الجداول التي رسمها في عمل الحساب واستنباط المسائل لبعده عن الطبع واستدعائه طول الزمان الموجب للملال وتثبيته كيفية استخراج المسائل

---

(٢٨) هكذا إذن، في رسالة جبرية أنجزت في الثاني عشر من تموز/يوليو ١١٨٥م، نجد من جديد تصنيف الخيام للمعادلات وتوصيته باستعمال المنحنيات المخروطية. انظر الرسالة التي نسبت خطأ إلى: أبي كامل شجاع بن أسلم، **رسالة في الجبر والمقابلة** (مخطوطة آستان، قدس، مشهد، ٥٣٢٥).

(٢٩) شمس الدين الماريني، **نصاب الحَبر في حساب الجبر** (استنبول، مخطوطة فيض الله، ١٣٦٦)، ص ١٣ ـ ١٤.

(٣٠) هذا التأكيد يعيده رياضي آخر هو تاج الدين التبريزي. فابن الهائم ينقل ما قاله التبريزي في هذا الصدد عند حديثه عن معادلات الدرجة الثالثة: «فلا يمكن استخراجها إلا بالبراهين الهندسية كما ذكره عمر الخيام، أو بالطريق المجدول كما ذكره شرف الدين المظفر بن محمد الطوسي»، انظر: أبو العباس شهاب الدين أحمد بن الهائم، **الممتع في شرح المقنع في علم الجبر والمقابلة** (استنبول، مخطوطة شهيد علي باشا، رقم ٢٠٧٦)، أوراق غير مرقمة.

(٣١) انظر في ما بعد.

بالتخت، وجمعت بين العمل والبرهان وسمّيته المعادلات»[٣٢].

وهكذا تتحدد إذاً مسألة أمانة النص الذي بين أيدينا لنص الطوسي الأصلي: فهل حقق هذا المجهول بالفعل برنامجه التلخيصي؟ قبل أن نبحث في حل هذه المسألة يجب أن نذكر، استناداً إلى تعابير المجهول نفسها، أن التغييرات التي نوى القيام بها لا تطال المحتوى الرياضي للرسالة ولا بنيتها أو تنظيمها. فعبر صفحات النص لا نجد ما يشير إلى أن هذا المجهول ينسب لنفسه أية مساهمة، مهما كانت متواضعة، في موضوع هذا العمل أو أي تحوير في بنيته. إن ما رَمى إليه هذا المجهول كان واضحاً ويتعلق بالقيمة التعليمية لـ «الرسالة»: إنه لا يهتم إلا بنوعية أسلوب العرض. لكن، ما الذي كان باستطاعته حذفه تحقيقاً لهدفه؟

تنتظم «الرسالة»، في حالتها التي وصلت إلينا بها، على الشكل التالي: بعض المقدِّمات حول القطع المخروطية، متبوعة بتعريف وحدة القياس وبتصنيف المعادلات الخمس والعشرين؛ تأتي من ثم دراسة هذه المعادلات بالترتيب ويتبع كل منها الأمثلة العددية التي تقتضيها مع تبرير لحلول هذه الأمثلة. وكل ما نرجوه من مثل هذه الرسالة موجود، وفي موضعه المناسب. وربما كان هناك استثناء واحد: فبداية النص مشوّشة وأقل ما يقال فيها إنها جافة. فلا يقدم الطوسي أية شروحات توضح مشروعه ولا ينساق لأي اعتبارات تاريخية أو تحليلية تسمح بتحديد موقع العمل الذي يقدّمه. ويزيد من غرابة هذا التصرف كونه يناقض تقليداً كان متبعاً في عصره عند تقديم الأعمال الكتابية غير القصيرة؛ أضف إلى ذلك أن الكاتب نفسه احترم هذا التقليد عند تقديم رسالته حول الأسطرلاب الخطي[٣٣]. فهل حذف المجهول مقدمة قد يكون حواها النص، بعد أن كتب فقرته التمهيدية؟ تبدو هذه الفرضية واقعية، إلا أنها بحاجة إلى الحجج التي تبرّرها والتي ترتكز إلى تاريخ النص نفسه.

ومهما كانت الأحوال، وبمعزل عن هذه المسألة، يبدو أن بنية العمل لم تصب بأي تحوير. لكن، هل يمكن الوصول إلى هذه النتيجة نفسها استناداً إلى نص «الرسالة» كما هو حالياً؟ إن استعراض «الرسالة في المعادلات» يكفي لأن نستنتج بأن القسم الأكبر منها مخصص للبحث عن الجذور الموجبة للمعادلات المدروسة وللمسائل التي يؤدي إليها هذا البحث: تحويلات أفينية، فصل الجذور، حصر الجذور... إلخ. يضاف إلى ذلك، المقدمات التمهيدية المتعلقة بالمنحنيات المخروطية، التي تستعمل في ما بعد لتحديد الجذور. هذه الأقسام هي من دون شك بيد الطوسي من دون أي حذف أو إعادة صياغة من قبل «المجهول» الذي اكتفى بنسخ ما كتبه المؤلّف. فلقد درس

---

(٣٢) انظر الرسالة، ص ٢.

(٣٣) مخطوطة لايدن (٥٩١).

الطوسي المعادلات بالترتيب بناء على منهج متّسق ينتظم بحسب تقسيم المعادلات إلى فئات، كما سنرى في ما بعد. من هذه الزاوية يمكن إذن، ومن دون عناء، التحقق من أن لا شيء ينقص «الرسالة». ومن جهة أخرى هناك بعض الثغرات في النص. فبعض الجمل يوحي تركيبه بأنه تعرض لبعض الاختصار أو بأن بعض التعابير قد أسقط منه. لكن تفحّص هذه الثغرات يظهر أنها حوادث بسيطة سبّبتها عملية النسخ.

إن الطوسي نفسه يُقدِّم آخر دليل مهم على ما نقول. فلقد كان له أيضاً «كتيّب» حول «الخطين اللذين يقربان ولا يلتقيان» يعالج الخطين المقاربين للقطع الزائد المتساوي الأضلاع، وضعناه محققاً ومترجماً ضمن هذا الكتاب. وهذا الموضوع هو ممّا عالجه في الجزء الأول من «الرسالة». إن ترتيب هذا الموضوع يختلف بين الرسالة والكتيب، وهذا أمر طبيعي. ففي الرسالة يتعلّق الأمر ببعض المقدِّمات الضرورية للدراسة الجبرية اللاحقة. أما الكتيّب فيدرس موضوع الخطين المقاربين بحد ذاته. لكن، وعلى الرغم من هذا الفرق، تظهر مقارنة النصين، تطابقاً في القضايا الرياضية، كما تظهر أن الكتابة هي نفسها في الرسالة وفي الكتيب[(٣٤)].

إن دور الناقل المجهول هو إذن غير ذي تأثير بالنسبة إلى الصياغة، ومن هذه الناحية، فإنَّ أمانة كتابة «الرسالة» لنصها الأصلي الذي كتبه الطوسي، مضمونة.

لكن الوضع يتغيّر عندما يتعلق الأمر بالجزء المخصص للحل العددي للمعادلات. فلقد اعترف الناقل المجهول بأنه أزال الجداول من الرسالة. ولكي نتعرّف إلى المواد التي يمكن أن تتألف منها هذه الجداول، يستحسن التذكير بالنوعين من الجداول المستعمَلَين في ذلك العصر. هناك أولاً الجداول الموجودة كلياً على الورق والتي تُسَجِّل كل نتائج العمليات الحسابية وكل خطوات الخوارزمية[(٣٥)]. إن أيّاً من هذه الجداول يمكن أن يكون إما عبارة عن عدة جداول متتالية يتناسب كلٌّ منها مع مرحلة في الحساب اللازم، وإما جدولاً واحداً بمستويات منفصلة ومتدرِّجة بوضوح[(٣٦)]. أما النوع الثاني من الجداول فيحمل اسم «لوح الرمل» ـ «التخت». وهذا النوع موروث من الحساب الهندي. و«التخت»، هو في الأصل جدول مرسوم على لوح مغبّر بالتراب أو

---

(٣٤) مقارنة الكتيب بالنص المقابل في «الرسالة» يكشف التطابق بين القضية الأولى في «الكتيب» والقضية الثانية في «الرسالة». وكذلك، فالقضيتان ٣ و ٤ في «الرسالة» مطابقتان لقسم من القضية ٢، من «الكتيب»: قسم من هذه القضية غير موجود في «الرسالة»، وهو القسم الذي يشكّل المقطع المتعلق ببرهان القضية ٣ منها: $[d(D, \Delta, d(C, \Delta)]$. فمن الممكن إذن أن يكون الطوسي قد ألّف «الكتيب» لكي يعالج النقص في برهانها. وقد تكون هذه الفرضية هي الأكثر احتمالاً بين الفرضيات التي تحاول تفسير تقديم «الكتيب» بشكل مستقل عن «الرسالة»، بالرغم من أنه يستعيد نصوصاً منها.

(٣٥) مسار الطريقة الحسابية العملية، «Algorithme». (المترجم).

(٣٦) يكفي تصفح: السموأل، **الباهر في الجبر**، للتعرف إلى مختلف أشكال هذه الجداول.

بالرمل، ممّا يسهل كتابة الأرقام عليه ومحوها ونقلها من مكان إلى آخر. وبينما تحتفظ الجداول من النوع الأول بالعمليات الحسابية الانتقالية بين مرحلتين، لا تحتفظ الجداول من هذا النوع إلا بنتيجة هذه العمليّات، نتيجة المحوِ المنهجي. وقد لجأ الطوسي إلى هذين النوعين من الجداول: فقد استعمل النوع الثاني لكي يحتسب بعض خطوط جداول من النوع الأول، وهي الجداول التي كانت ترمي إلى إيصال العمليات الحسابية إلى غايتها. إن الجداول من النوع الأول هي التي خطرت للناقل المجهول الفكرة التعيسة بحذفها. لقد ضاعف الحذف صعوبة النفاذ إلى النص، فكانت له بالتالي نتيجة هي عكس ما رمى إليه الناقل المجهول من وراء هذا الحذف.

ويضيف الناقل المجهول انه حذف، بالإضافة إلى الجداول، شروحات إضافية تتعلق بطرق حل المسائل بواسطة «ألواح الغبار». نُذكِّر هنا بأن الطوسي، لأجل حلّ المعادلات التي لا تؤول إلى معادلات أخرى معروفة، بواسطة تحويلات أفينية، كان يُعطي أمثلة عددية، تمثل حالات ثلاثاً في كل مرة. إن الشروحات المحذوفة توجد إذاً في إحدى هذه الحالات أو حتى فيها مجتمعة. إلا أننا نستطيع حصر الموضع المحتمل لهذه الشروحات الإضافية المختفية من دون اللجوء إلى فرضيات كيفية. فقد يظن البعض، عند الوصول إلى الحالة الثانية أو الثالثة وقراءة «ونطبق الطريقة السابقة» بأنّ النص مبتور. لكن ما مِن دليل يُثبِت هذه الفرضية إن بالاستناد إلى تاريخ النص أو إلى النص نفسه؛ وليس ما يدل على أن الكتابة هذه لا تعود إلى الطوسي نفسه. ومن جهة أخرى، يبدو لنا أنه لا يتوجب المبالغة في أهمية هذه الملاحظة التي ساقها الناقل المجهول. فالقسم المخصص للحل العددي للمعادلات، وبالأخص لتبرير الطريقة المسماة بطريقة روفيني - هورنر، كما سنرى، يتميَّز بصعوبته، حيث تضاف بعض الصعوبات اللغوية إلى التعقيدات الرياضية. فلغة «الرسالة» رتيبة ومكثفة، هذا بالإضافة إلى ثقلها، الأمر الذي سبَّبَ من دون شك ابتعاد المؤرخين وعزوفهم عن دراستها. وكان لا بد للناقل المجهول من الاصطدام بهذه الصعوبات بالذات، التي أفشلت محاولات الاختزال في النص - إن عن طريق البتر أو عن طريق التلخيص - طالما أن هذا النص مكتوب بلغة الطوسي. وإنّ العودة إلى النص ومحاولة القيام بتلخيص من هذا النوع تكفي للاقتناع بما نقول.

لم يكن باستطاعة هذا المجهول، إذاً، سوى حذف الجداول، وهذا ما لم يفته القيام به؛ أما بالنسبة إلى باقي النص، فلقد نقل، بهذا القدر أو ذاك، من العناية، كتابة الطوسي. ولم يستطع، لحسن الحظ، تحقيق هدفه المعلن في الفقرة التمهيدية، فأوصل إلينا نصاً قريباً من النص الأصلي. أما في ما يتعلق بالجداول فلقد أعدنا تشكيلها انطلاقاً من مسار ما كتبه المؤلِّف.

إننا نجهل ما إذا كان الطوسي قد وضع عنواناً لـ «رسالته». وبحسب معلوماتنا،

فإن أياً من المصادر القديمة لم يُعطِها عنواناً صحيحاً. وبما أنه لم يكن من النادر أن يسمّى عملٌ من الأعمال باسم الموضوع الذي يعالجه وباسم صاحبه، فقد يكون هذا العنوان «رسالة شرف الدين الطوسي في الجبر والمقابلة» وهو ما يُوحي به الناقل المجهول. لكنّ اختياره لعنوان «في المعادلات» يعبّر في الواقع عن إدراك عميق لموضوع «الرسالة» وللمجال الذي أعطى فيه الطوسي مساهمته الأكبر. فهل كان هو مخترع هذا العنوان أم أنه وجده في مقدمة محتملة للطوسي؟ مهما يكن من أمر، فهو العنوان الوحيد الذي بحوزتنا، الذي يجدر الاحتفاظ به كونه يعكس تماماً محتوى هذا العمل.

ولقد سبق أن ذكرنا أعمال الطوسي الرياضية الأخرى التي وصلت إلينا: دراستان رياضيتان محققتان ومترجمتان في عملنا هذا ودراسة أخرى تتعلق بالأسطرلاب الخطي.

خامساً: تحقيق النص

حتى عهد قريب لم يكن يعرف لرسالة الطوسي سوى مخطوطة واحدة محفوظة في مكتبة «المكتب الهندي» (India Office) في لندن. هذه المخطوطة ليست قديمة العهد، فقد تم نسخها في نهاية القرن الثامن عشر. إن تاريخ نسخ هذه المخطوطة غير البعيد من جهة، وأهمية المعلومات الرياضية التي وُجدت للمرة الأولى في هذه الرسالة من جهة أخرى، دفعانا إلى مضاعفة الحذر والتساؤل حول جدوى نشر النص حتى بعد إتمام تحقيقه وترجمته. فليس ما يكفل بشكل قاطع أنّ الناقل المجهول لم يكن معاصراً لرياضيات غير رياضيات الطوسي وبالتالي كان متأثراً بها. وصحيح أن هذه الفرضية بعيدة الاحتمال، نظراً لأسباب تاريخية، نظرية، ولأسباب تعود إلى فقه اللغة. لكن، قبل استبعاد هذه الفرضية ينبغي إيجاد دليل حاسم يستند في مثل هذه الحالة، إلى تاريخ النص نفسه وليس إلى التحاليل النظرية فقط. إنّنا نحوز حالياً على مثل هذا الدليل، بعد اكتشافنا، منذ سنوات، النموذج الذي نقلت عنه مخطوطة لندن، الذي يعود تاريخه إلى خمسة قرون قبل هذه المخطوطة. وقبل أن نستطرد، لنتوقف أولاً عند مخطوطات «الرسالة».

١ ـ مخطوطة «المكتب الهندي»

لندن رقم ٤٦١، مجموعة Loth (لوث) رقم ٧٦٧، نشير إليها هنا بالحرف «L» (ل).

المخطوطة الأولى التي نشير إليها هنا بالحرف «ل» تحمل الرقم ٤٦١ في مكتبة «المكتب الهندي» وفهرسة «لوث ٧٦٧». هذه المخطوطة هي واحدة من مجموعة تضم ستة أعمال علمية، تعود الأعمال الخمسة الأخرى فيها لنصير الدين الطوسي، ابن

الهيثم، القوهي، ابراهيم بن سنان، وثابت بن قرة. وكان من الطبيعي أن تلفت أهمية هذه المجموعة، انتباه مؤرِّخي العلوم العربية الذين دأبوا على مراجعتها منذ بداية القرن الحالي، إذا لم نقل منذ ما قبل هذا التاريخ. لذلك فإن الصمت الذي أحيط به محتوى الرسالة لا يعود إلى جهل بوجود النص؛ إنه يعود إلى صعوبة حجبت أهميته، وسنحللها في ما بعد.

تقع المخطوطة «ل» هذه في ٢٠٨ ورقات، ١٤٣ منها مكرَّسة لرسالة الطوسي - من الورقة ٣٥ ظهر، إلى الورقة ١٧٩ وجه - قياس الصفحات هو ٢٢,٩سم × ١٣,٨ سم. يحيط بالنص مستطيلان يفصلهما هامش عريض. المستطيل الخارجي محدد بخط مزدوج، أمّا الداخلي فمحدّد بخط مذهّب محاط بخطين [انظر الصورة رقم ١]. في كل صفحة يحتل النصّ مجالاً من ١٦,٦سم × ٨,٩ سم ويحتوي على ١٢ سطراً في كل منها ما بين ١٣ و١٦ كلمة تقريباً. الورق مصقول ناعم، سميك وحنّائي اللون. الورقات الـ ٢٠٨ كلها من الصناعة نفسها؛ ويُظهر تفحصها أنه لم يجر تبديل في نوعية الورق خلال عملية النسخ. الورقات مرقمة بأرقام المطبعة من قبل مكتبة لندن ومجموعها في حالة ممتازة. الغلاف أيضاً يعود إلى القرن الثامن عشر وهو من جلد يميل لونه إلى البني، مزخرف برسوم هندسية مذهبة - مستطيلات متداخلة.

مخطوطة «الرسالة» مكتوبة بالحبر الأسود. وقد ترك الناسخ مكاناً لبعض العناوين ولبعض العلامات المتعارف عليها التي تشير إلى نهاية الفقرات في نيّة منه للعودة إليها لكتابتها بالأحمر بعد انتهاء النسخ، لكنّه لم يقم بهذا العمل. الأشكال الهندسية جميعها مرسومة بالحبر الأحمر بينما الأحرف والأرقام عليها بالأسود. وباتباعه هذه القاعدة حذا الناسخ، حذو النموذج الذي نقل عنه. لكن، خلافاً للنموذج، الذي يقع فيه كل شكل في المكان الذي يعود له، نجد أن الناسخ قد جمّع الأشكال الهندسية كلها في صفحتين ألصقهما في نهاية الرسالة. وأما الخط الذي كتبت به المخطوطة فهو نستعليق.

لا يوجد على المخطوطة قلفونة نستطيع أن نقرأ فيها اسم الناسخ أو التاريخ الذي نسخت فيه. غير أن الناسخ أشار إلى تاريخ انتهاء نسخ الرسالة الأولى من المجموعة (المنسوبة إلى نصير الدين الطوسي). فلقد كتب أنه أنهى مراجعة هذه النسخة مقارنة مع الأصل بتاريخ ١٤ شوال ١١٩٨ للهجرة، أي ٣١ آب/أغسطس ١٧٨٤ للميلاد.

نشير إلى أن الناسخ نفسه هو الذي خطّ مجموعات أخرى، توجد بدورها في مكتبة لندن: لوث ٧٤٣، ٧٤٤، ٧٤٥. فهذه المخطوطات كلها مكتوبة بالخط نفسه، على الورق نفسه، ومجموعة بالطريقة نفسها كما تدل المقارنة المنهجية. وهذا يدفع للاعتقاد بأن الأمر يتعلق بطلبية واحدة كُلّف بها الناسخ نفسه في نهاية القرن الثامن عشر. فلقد كتبت المجموعة لوث ٧٤٥ قبل المجموعة التي تهمنا بأقل من شهر، ذلك أنها مؤرخة في ٢١ رمضان ١١٩٨هـ أي في ٨ أيلول/ سبتمبر ١٧٨٤م.

الصفحة الأولى عبارة عن جدول المحتويات بخط الناسخ حيث أُعطي العمل العنوان التالي «رسالة في المعادلات لشرف الدين مظفر بن محمد الطوسي، في خمس وعشرين مسألة في الجبر والمقابلة». وفي صلب «الرسالة» لا وجود لأية كتابة ملحقة على هوامش النسخة. إن الإضافات الوحيدة موجودة على الورقة ٥٥ وجه و١٠٥ ظهر، والورقة ١٣٣ وجه (على كل منها كلمتان)، وعلى الورقتين ٥٨ وجه و١١٦ ظهر (فقرة صغيرة). إن هذه التعابير الخمسة أضيفت بيد الناسخ الذي أظهر مكانها بواسطة العلامات المستعملة عادة في المخطوطات العربية. ويبدو أنه أضافها في مجرى عملية النسخ وليس بعد إتمامها، خلال مراجعة العمل. ذلك أنّ مثل هذه المراجعة مستبعدة نظراً لتعدد الثغرات فيها. والمخطوطة منسوخة وليست مكتوبة عن طريق الإملاء كما يظهر التحليل النحوي. لكن، قبل الانتهاء مما يتعلق بهذه المخطوطة ينبغي إلقاء نظرة على النموذج الوحيد الذي نقلت عنه.

٢ ـ خدابخش (پاتنا، الهند)

رقم ٢٩٢٨، مشار إليها بالحرف «B»، (ب).

هي مجموعة رسائل وكتيبات رياضية كتبها مؤلِّفون مثل الأهوازي، الخازن... إلخ. تتصدر هذه المجموعة ست وعشرون ورقة منسوبة إلى كاتب مجهول. هذه الأوراق من ١ وجه إلى ٢٦ وجه هي ما تبقى من رسالة الطوسي بعد فقدان ورقاتها الأولى، التي تحوي من دون شك العنوان واسم المؤلف. فالصفحات التي وصلت إلينا تمثل ثلثي «الرسالة». ولحسن الحظ أن القسم المفقود في «ب» بقي محفوظاً في «ل». وبما أننا سنظهر بدقة بأن «ب» كانت النموذج الوحيد لـ «ل»، يمكننا أن نستنتج أن فقدان الثلث الأول من «ب» لا يعود تاريخه إلى أبعد من نهاية القرن الثامن عشر. ومن جهة أخرى فإن ترقيم الورقات الست والعشرين بالترتيب، ابتداءً من الورقة ١ لا يمكن أن يكون قد تم من قبل الناسخ، وهو يعود أيضاً إلى ما بعد نهاية القرن الثامن عشر. والآن وبعد هذه الملاحظة نعود إلى وصف المخطوطة «ب».

إن تفحُّص المخطوطة يكفي لشرح أسباب فقدان ثلثها الأول؛ فالصفحات الأولى منها قد أفسدتها الرطوبة فانفصلت عن رفيقاتها خلال القرن الماضي، ولولا ترميم المجموعة لما كان بالامكان تفادي الخسارة الكلية التي لا تعوّض لنص الطوسي. ويُظهر تفحُّصها كذلك أنّ القسم الأكبر من المجموعة كتبه الناسخ نفسه.

وفي ما يخص الرسالة بالذات، تتوالى الأوراق بالترتيب باستثناء الورقتين الأولى والثانية اللتين تبادلتا المكان. الصفحات من قياس واحد: ٢١,٩ سم × ١٣,٢ سم، وكل منها تحتوي على ٣٠ سطراً بمعدل ٢٥ كلمة للسطر الواحد. الورق من صناعة واحدة ولونه يميل إلى الحُمرة. مجمل مخطوطة «الرسالة» مكتوب بالحبر الأسود؛

يستثنى من ذلك عناوين المسائل، وعناوين الحالات في كل من المسائل وبعض العلامات التقليدية التي تدل على نهاية الفقرات. وأخيراً، الأشكال الهندسية المرسومة، وكل هذه الاستثناءات مكتوبة بالحبر الأحمر. الأشكال الهندسية توجد في أمكنتها المناسبة وليست مجموعة في النهاية كما هي الحال في المخطوطة «ل».

الخط هنا أيضاً نستعليق، متراصّ. آثار الرطوبة وفساد بعض الأجزاء، يعيقان القراءة أحياناً؛ ولا توجد في المخطوطة أية إشارة، لا إلى هوية الناسخ ولا إلى مكان نسخها. نجد تاريخ كتابتها فقط في القلفونة، وهو السابع من رمضان عام ٦٩٦هـ الموافق للتاسع والعشرين من حزيران/يونيو ١٢٩٧م، أي قبل المخطوطة «ل» بنحو خمسة قرون. إن هذا التاريخ تؤكّده أيضاً قلفونة رسالة أخرى ضمن المجموعة نفسها وبالخط نفسه، إذ نقرأ: «شهر شوال ٦٩٦ للهجرة» أي ـ افتراضاً لوقوعه في منتصف شوال ـ ٦ آب/اغسطس ١٢٩٧م.

إننا لا نعرف شيئاً تقريباً عن تاريخ المخطوطة. المعلومة الوحيدة التي قدّمها الناسخ أكدّتها نوعية النسخة وهي أنه نقلها عن نموذج واحد وأنه، عند انتهائه من النسخ، راجعها مقابلاً إيّاها بهذا النموذج. ولا زالت آثار هذه المراجعة حاضرة لتشهد على ذلك، كبعض الكلمات والتعابير المضافة إلى الهامش تعويضاً عن إهمالها خلال عملية النسخ. فلقد أضاف الناسخ سبع كلمات وتعابير على الهامش، مستعملاً العلامة المعروفة من قبل نساخ المخطوطات العربية، والتي تشير في كل مرة إلى موضع التعبير المضاف، داخل النص. بهذه الطريقة يضيف كلمة في كل من المواضع[٣٧]: ٩٤،١؛ ١٠٤، ١٥؛ ١٢٧، ١٣؛ ١٤٨، ٢٠؛ وتعبيراً في ١٤٣، ٤ و١٩٩، ١٤ و١٥. وفي ١٨٠، ١٤ يضيف كلمة محاها الزمن قد تكون «منه» أو «به»، لا نرى ما يدعو إلى إضافتها. وأخيراً في ١٨٢، ٣، نجد العلامة التي تشير إلى الإضافة من دون أن نجد الكلمة أو التعبير المضاف. فقد يكون الناسخ نسي هذه الإضافة التي يحتمل أيضاً أنها قد محيت.

كل هذا يظهر الدقة التي اتبعها الناسخ خلال كتابته، والتي يعكسها أيضاً ما دوّنه فوق السطور، سواء خلال الاستنساخ أو لدى المراجعة. ففي موضعين أضاف حرفاً للوصل، [١٠٦، ٢٠ وَ ١٠٧، ٩]؛ وفي أربعة مواضع أضاف كلمة [١٢٧، ١٣؛ ١٤٣، ٢؛ ١٤٤، ٢؛ ١٧١، ١٠. وفي هذا الموضع الأخير أتت الإضافة تحت السطر]. إن عناية الناسخ ودقته تظهران أيضاً من خلال العدد الضئيل للكلمات أو التعابير التي تكررت كتابتها ـ وهذا يشمل تكرار التعبير نفسه أو إعادة كتابة تعبير قريب

---

(٣٧) العدد الأول يشير إلى رقم الصفحة، والعدد التالي بعد الفاصلة يشير إلى رقم السطر: ٩٤، ١ تشير إلى: الصفحة ٩٤، السطر ١. (المترجم).

منه. فلقد اقتصر الأمر على سبعة ترددات، خمسة منها شطبها الناسخ نفسه. فلقد ترددت كلمة في ١٤٠، ١٤ وعبارة في ٢٢٧، ٧. أمّا في ٩٤، ٩؛ ١٠٤، ٢؛ ١٣٤، ٢؛ و١٦٢، ١٩، فبعد أن ردّد كلمة قريبة من المعنى، عاد وشطبها هو نفسه.

أخيراً، فإنّ الكلمات والتعابير التي نقترح إزالتها من أجل تحقيق نص الطوسي، تشهد على تيقظ الناسخ لدى عملية النسخ. ففي فئة أولى منها ـ ١١٩، ٩؛ ١٧٣، ١٩؛ ٢١٦، ١٩؛ ٢١٨، ١١ ـ لا تقع على الناسخ أية مسؤولية كما يبدو. ففي المواضع الثلاثة الأولى نجد كلمة «مربّع»، أما في الموضع الرابع فنجد كلمة «ضعف» وفي كل من هذه الحالات يقود النص إلى خطأ حسابي. وبحسب طبيعة هذه الحوادث، فإنها قد تعود إلى الطوسي نفسه وليس ما يدعو إلى إرجاع مسؤوليتها إلى الناسخ. إلى هنا يبقى لدينا ثلاثة أخطاء لغوية نقترح إزالتها، تعود، في رأينا، إلى الناسخ. فعندما نجد في ١٢٨، ٣ «مسؤول عنه» بدل «مسؤول» كما يقتضي استعمال النص، نفهم بسهولة، أن الناسخ قد انساق هنا عفوياً مع اللغة المتداولة خلال الاستنساخ. أمّا الحالتان الباقيتان فتندرجان ضمن حوادث النسخ البسيطة: في ١٩١، ٥، عن طريق مزجه بين جملتين موجودتين، تشكّلت عنده جملة جديدة وضعها في النص. فعند كتابته للأولى «ونضرب عدد الأموال في» وقراءته للتي تليها «ونضرب المبلغ في عدد الأموال»، كتب «ونضرب المبلغ في مثله». وأخيراً، في ١٩٤، ١٠ يبدو أن الناسخ، ولأسباب نجهلها، لم يكتب سوى المقطع اللفظي الأخير من «في مربع».

تشير أقوال الناسخ بالذات إلى أنه راجع نسخته، مقابلاً إياها بالنموذج، وهو حتماً نموذجه الوحيد. إن تفحُّصنا للنص يُظهر آثار هذه المراجعة بكل وضوح، كما يظهر قلة عدد الأخطاء العائدة للنسخ، الأمر الذي يدلّ على دقة الناسخ في عمله. لكن هذا الأمر يبدو منقوضاً بالعدد الهائل للنواقص التي نستطيع أن نعدد منها ١٣٤، خمسون منها هي تعابير من كلمتين على الأقل. مئة من هذه النواقص أصابت صحة النص الرياضي بالذات؛ ففي عودة إلى النص الذي تم تحقيقه، نرى أن الناسخ قد سها عن كتابة مقاطع تتعدى أحياناً السطر، الأمر الذي يعطل برهان الطوسي. فإذا لم تكن هذه الثغرات من فعل الناسخ، فإنها ترجع إما إلى «الناقل المجهول»، وإما إلى نسخة متوسطة بين الناقل والمخطوطة «ب»، وإما إلى الاثنين معاً. ويبدو أن بعضاً، على الأقل، من هذه النواقص يعود إلى «الناقل المجهول»؛ هذا البعض يتعلّق بالمقاطع التي يعالج الطوسي فيها الحل العددي للمعادلات؛ فيحتمل أن سهو «الناقل المجهول» عن بعض التعابير، يعود إلى كونه قد نسخ هذه المقاطع بسرعة ومن دون عناية نظراً إلى عجزه عن فهم أهمية ما ورد فيها. ومن المفروض أن يتبدل الأمر عندما يعالج النص برهان وجود الجذور وتحديدها وجميع المسائل المتعلقة بهذا الأمر؛ ذلك لأن طموح هذا «المجهول» لتخفيف الثقل في نص المؤلّف، يفترض به بعض المقدرة الرياضية ويجعلنا نتوقع منه تصرفاً آخر. لكننا إذا ما استرسلنا فقد ننزلق هنا إلى حقل الفرضيات الوعر؛

فلنَقُلْ إذن، وببساطة، إنّه من المعقول جداً، عزو هذه النواقص إلى «الناقل المجهول» وإلى نسخة وسيطة، كانت هي نموذج المخطوطة «ب».

وعلى الرغم من عدم تمكننا من تحديد أصول الثغرات الأخرى في «ب»، ينبغي أن نقدم مسحاً سريعاً لها من أجل إعطاء الصفات المميّزة لهذه النسخة. في الحواشي المرافقة للنص المحقق، تظهر أخطاء منها نحو ١١٦ خطأ نحوياً، ٩٠ رياضياً، ١٥ إملائياً وَ ٣٥ كلمة تحتل مكان آخر. إن عدد الأخطاء النحوية ليس مرتفعاً إذا ما كنا على معرفة بالأخطاء التي اعتادَها رياضيّو العصر. فعلى الرغم من أنه لم يكن من النادر وجود رياضيين متضلّعين من لغتهم إلا أن كتابتهم الرياضية كانت تأتي مناقضة لهذه الكفاءة بسبب إهمالهم بعض القواعد. لذلك لا نستطيع التمييز بكل دقة بين أخطاء الطوسي نفسه وأخطاء النساخ من بعده. ومن الأخطاء الإملائية ما كان شائعاً في ذلك العصر؛ ومنها ما نتج عن حوادث نسخ بسيطة ـ مثل كتابة «بزاواية» بدل «بزاوية». والأخطاء الرياضية، بغالبيتها العظمى (أكثر من تسعة أعشارها) هي في كتابة الأحرف التي تدل على قطعات من مستقيم. باقي الأخطاء الرياضية هو بالضبط ثمانية، خمسة منها تتعلق بأرقام تدخل في الحل العددي للمعادلات؛ الثلاثة الأخرى الباقية هي «ومطلوب» بدل «مطلوباً» في ١٠٥،١٥ وَ «الجذور» بدل «الجذر» في ١٠٥،١٨، وأخيراً «مربع» في ١٠٩،٧ بدل «مكعب». في كل الأحوال تعتبر هذه الأخطاء حوادث في النسخ تعود إما إلى نسخ «ب»، إما إلى نسخ نموذج «ب». ويتوجب أخيراً ذكر الكلمات الموضوعة مكان غيرها. هنا أيضاً نجد أنفسنا، من دون أدنى شك، أمام حوادث في النسخ يعقل أنها ناتجة عن قراءة سيئة في النموذج. فهكذا نقرأ في ١٠٥،١٣ وَ١٢٩،١ وَ١٢٩،٦ كلمة «الثاني» بدل كلمة «الباقي»؛ أما في ١١١،١٢ وَ١١٣،٧ وَ١١٤،٢٠ فنقرأ كلمة «كعب» بدل كلمة «مكعب» (وحتى الطوسي كما سنرى لا يميز دائماً بين اللفظتين). وكذلك نقرأ «كل» بدل «كلا» ـ ١٥٦،٥ وَ٢٣٠،١١ وَ٢٣٤،١٤ـ؛ و«من» بدل «في» ـ ١٢٣،٥ وَ٢٠٢،١٣ ـ؛ «إلى» بدل «في» ـ ١١٠،١٤ وَ١٩٧،٢٠ ـ؛ «ثلث» بدل «ثلاثة» ـ ١٥٢،١ وَ١٥٢،٣ ـ؛ «الآخر» بدل «الأخير» ١٣٣،٤ ـ؛ «أعني» بدل «في» ـ ١٧١،١٠ ـ؛ «من» بدل «عن» ـ ١٨٧،٣ وَ١٩٦،١٨ـ؛ «فهي» أو «فهل» بدل «فهذا» ـ ١٩٥،٣ ـ؛ «لكن» بدل «الكون» ـ ٢٠٠،١٠ ـ؛ «بين» بدل «من» ـ ٢١٧،٦ ـ.

وفي المقابل، نجد بعض التعابير التي لا يمكن تصنيفها مع الفئة السابقة، ومن المعقول جداً أنها تعود إلى كتابة الطوسي نفسه: «السطح» بدل «المربع» ـ ١٣٤،٤ ـ؛ «حينئذٍ فنعمل» بدل «فحينئذٍ نعمل» ـ ١٦٤،١٦ ـ؛ «في مربع» بدل «مربعه في» ـ ١٨٥،٢٠ ـ.

ولكي ننهي هذه الفقرة، لنذكر الأخطاء الناجمة عن سَهْوٍ من المؤلّف أو من أحد

النساخ: «المطلوب» بدل «المبلغ» ـ ٣،٩٢ ـ؛ «مع» بدل «مثل» ـ ٧،١٥٠ ـ؛ «بدل» بدل «ضرب» ـ ٥،١٧١ ـ؛ «مربع» بدل «ضلع» ـ ١،٢٠٨ ـ؛ «أموالاً» بدل «عدد الجذور» ـ ٢،٢٤٢ ـ.

تبدو المخطوطة «ب» إذاً على الشكل التالي: نسخةٌ منقّحةٌ عن طريق مقابلتها بالنموذج الذي نسخت عنه، مكتوبة بدقة وعناية، خالية من الحواشي إلا أنها مشوبةٌ بالعديد من الثغرات التي تتوزع فيها والتي يحتمل جداً أن تكون موروثةً من النموذج الأصل الذي هو بالضرورة نسخة متوسطة بين المخطوطة «ب» وبين تلك العائدة للناسخ المجهول.

والآن، إذا ما قمنا بمقابلة المخطوطتين «ب» و«ل» بشكلٍ دقيق وشامل نصل إلى النتائج التالية:

* كل الجمل وكل الكلمات الناقصة في «ب» تنقص كذلك في «ل».

* باقي الجمل والكلمات التي تنقص «ل» بصورة خاصة موجودة في «ب».

* كل الأخطاء في «ب»، مهما كان نوعها، موجودة في «ل» أيضاً.

* العكس ليس صحيحاً فالعديد من الأخطاء في «ل» لا يُوجد في «ب»؛ هذه الأخطاء تعود إذاً إلى ناسخ «ل».

* إن ناسخ «ل» لم يكتب ما وجده في «ب»، بل نسخ عن «ب» من دون تمييز. فكان عندما يجد فراغاً في «ب» يترك الفراغ نفسه في «ل»؛ ولقد نقل كذلك الأخطاء الإملائية الناتجة عن عدم الانتباه. وعندما كان ناسخ «ب» يعيد الجملة نفسها سهواً، كان ناسخ «ل» ينقل التكرار نفسه ـ ٢٢٧، ٧ ـ.

* إن هذا الجمود لدى ناسخ «ل» يتسبب في لا معقولية عند الوصول إلى القسم المتعلق بالحساب العددي، وهذا ما يظهر أن «ل» تتعلق تماماً بـ «ب» وبها وحدها. ومثالاً على ذلك، نجد في «ب» وفي منتصف إحدى الصفحات، داخل النص، عناصر حسابية أولية بواسطة «لوح الغُبار» (انظر الصورة رقم ١)؛ ولقد ظن ناسخ «ل» أن العناصر المكونة للّوح هي جزء من السطر الذي يقابلها في النص، وهكذا دمج كل سطر من اللوح بالسطر المقابل له من النص تبعاً لمكان هذه السطور في «ب»، غير مكترث بسخافة ما ينتج عن ذلك.

* هذه الأمانة العمياء لم تمنعه من أن يضيف أخطاء من اختراعه، إلى حوادث القراءة والثغرات الأخرى. كلمتان فقط تشذّان عن مئات الحوادث هذه، أدخل فيهما الناسخ تصحيحاً بإبدال أحد حروف العطف: «وإذا» بدل «فإذا» ـ ٢٠٩، ٨ ـ؛ «خاصة» بدل «فخاصة» ـ ٢١٠، ١٨ ـ.

* اخيراً، أعفى ناسخ «ل» نفسه من عناء وضع خط أفقي فوق الأحرف التي تشير إلى مقادير أو إلى أعداد، وهو ما نجده في «ب».

٣ ـ مخطوطة مكتبة مارشيانا

البندقية ـ شرقيات ١١٩٠٧ codice CCXXIX، ونشير إليها هنا بالحرف «ف».

هذه المخطوطة هي جزء من مجموعة(٣٨) تحتوي على ترجمة فارسية لكتاب

---

(٣٨) أبلغتني عن وجود هذه المجموعة في العام ١٩٨٤، الآنسة جوزيبينا فرانشيني التي تكرمت بإرسال ميكروفيلم عنها إليّ، مع وصف دقيق للمخطوطة نقدمه في ما يلي كاملاً كما وردنا مع تعابير الشكر الجزيل للفتتها الطيبة:

«Un manoscritto parziale dell'opera di Šaraf Al-Dīn Al-Tūsī *si trova a Venezia nella biblioteca Marciana,* associato ad altri due monoscritti:
— una traduzione persiana del trattato sanscrito di algebra e geometria: «Lilavati» di Bhāskarā.
— Un frammento iniziale della redazione araba dei «Sette libri delle coniche» di Apollonio Pergeo a cura del matematico Yahyā Ben-Abī Al-Shukr Al-Maghribi A-Andalusi.

I tre manoscritti portano il *numero 11907 Orient.,* codice CCXXIX. Provengono dalla famosa *«donazione Teza»* (Il professore Emiliò Teza, insigne filologo, lasciò alla biblioteca Marciana tutta la sua copiosa biblioteca, che si può dividere in tre parti: la prima comprendente opere di cultura generale, la seconda opere di linguistica ed infine *la terza comprendente la parte più caratteristica della libreria, cioè la serie dei testi orientali;* vedere la publicazione «La libreria del prof. Emilio Teza donata alla Marciana». curata da Carlo Frati, Firenze 1913).

Notizie tecniche sull'opera no. 11907 Orient.

E rilegata in tela, di colore marron scuro, in più parti sbadito (necessita di restauro).

Il titolo: *«Lilavati»* in lettere maiuscole dorate, compare nella parte superiore del dorso, incorniciato da due motivi floreali di colore oro. Va rilevato che taie titolo è incompleto perchè si riferisce solamente al primo manoscritto persiano.

Nella parte interna della copertina destra si cono delle segnature in matita, mentre nella parte superiore del risguardo è scritto: The Lilavati transl. in Pers. by Fayd, Calcutta 1827. Appena sotto, fra parentesi, si scorge un cognome:

force Lavoux o Levoux.

Il presunto titolo dell'opera appare, nuovamente nel foglio successivo, associato al numero delle pagine e delle linee per pagina, sempre in inglese e in matita.

Le pagine cartacee di cm 29,5 × cm 46,5 sono 126 (alcune sono bianche) più un foglio staccato di cm 23,3 × cm 35,5 privo di numerazione. Questa incomincia da destra a sinistra come richie de la scrittura persiana e araba. Ce n'è *una non originale,* in matita, *riferita alle pagine* ed *una originale riferita ai fogli, in inchicstro rosso. Per quanto riguarda la numerazione originale la parte persiana e la parte araba sono indipendenti* (la parte persiana ha la numerazione 1-52, la parte araba, che comprende due manoseritti, ha la numerazione 1 - 8). *Le tre parti dell'opera sono scritte a tutta pagina* con inchiostro nero frammezzato con inchiostro rosso e il numero delle righe è variabile: = oscilla fra 18 e 26 nella prima ed è mediamente 26 nelle altre due. Nelle prima e nell'ultima si

ليلاڤاتي *(Līlâvatī)* بهسكرا (Bhaskara) وعلى مقطعين باللغة العربية. المقطع **الأول** قصير جداً وهو تعليق لأبي الشكر المغربي على **مخروطات** أبولونيوس. أما المقطع **الثاني** فهو جزء من «رسالة» الطوسي. هذا الجزء ـ الذي يشكل خُمس «الرسالة» كما سبق وذكرنا ـ يتوقف فجأة. فلقد توقف الناسخ قبل أن يُنهي إحدى الجمل، من دون عودة لمتابعة النسخ. الخط في هذه المخطوطة نستعليق ويبدو أنه يعود إلى القرن الماضي.

إن مقابلة هذه المخطوطة مباشرة مع المخطوطة «ب» غير واردة، ذلك لأن القسم الذي يقابلها في «ب» قد أصابه التلف. إلا أنه بمقارنتها مع «ل»، نستطيع، وبسرعة، استخلاص نتيجة أولية وهي أن «ل» لم تكن النموذج الذي نُسخت عنه «ف». فهناك تعابير خمسة، من ضمنها فقرتان ـ ٢٢، ٨ ـ ٢٠؛ وَ٢٨، ٢ ـ ٤ ـ، مفقودة من «ل» غير أنها موجودة في «ف». هذا بالإضافة إلى أربع كلمات وثلاثة أحرف ناقصة من «ل»، موجودة في «ف».

إلا أن ما يثير الدهشة هو العدد المرتفع للأخطاء المشتركة بين «ل» وَ «ف». وإذا لم نحتفظ إلا بالأخطاء ذات الدلالة، أي بتلك التي لا يمكن أن تكون عرضية، نستطيع تعداد التالية: ٢، ٦؛ ٢، ٨؛ ٣، ١؛ ٧، ٦؛ ٨، ١؛ ٨، ٦؛ ١١، ١؛ ١٥، ٣؛ ٢٣، ١٠؛ ٢٣، ٢٠؛ ٣٤، ٥؛ ٣٦، ١٤؛ ٣٧، ٢؛ ٤٠، ١٨. وهذا يعود إما إلى «ميكانيكية» في عملية النسخ أو إلى أخطاء لغوية أو إلى أخطاء رياضية مستغربة أعيدت كتابتها كما هي بالضبط. فهكذا نقرأ مثلاً في ٢، ٦ «الجداول التي رسمه» بدل «الجداول التي رسمها»؛ أو، في ٣، ١ «الأعمدة الخالطة» بدل «الأعمدة «الخارجة». ومن جهة أخرى، نجد في ٢٦، ١٨، عبارة مردّدة، هي نفسها مردّدة في «ل». هذه الحوادث تدفع، بالتأكيد، للافتراض بأن «ف» و«ل» منسوختان عن النموذج نفسه أو عن نسختين تعودان إلى النموذج نفسه. ومن المعقول، من جهة أخرى، أنهما تنحدران من الأصل نفسه، «ب»، ذلك لأن «ف» وهي مخطوطة حديثة العهد قد كتبت من دون شك في الهند (وهذا ما يوحي به وجودها في المجموعة نفسها مع ترجمة **ليلاڤاتي** من السنسكريتية إلى الفارسية).

---

trovano parecchie *figure geometricale*. Ciascun manoscritto arabo è accompagnato da una breve = annotazione esplicativa in lingua inglese, scritta con inchiostro marrone, mentre quello persiano presenta una traduzione inglese, quasi completa, in interlinea a matia. Va notato che tutte le parti inglesi sembrano della stessa mano, invece i manoscritti veri e propri, probabilmente, non provengono da un unico amanuense, anche se, si deve ammettere, che la scrittura à costantemente di bella forma e sempre bene leggibile.

Per quanto riguarda l'ortografia si può rilevare che le lettere non sono vocalizzate, ma dotate di punti diacritici».

واستناداً إلى تقاليد تاريخ المخطوطات، فإن المعطيات التي تمكننا من إعادة تركيبها تحكم علينا الارتكاز على «ب» لتحقيق الجزء الأكبر من «الرسالة»؛ لذلك فهي تدفعنا إلى مجابهة جميع الصعوبات التي ترافق هذه المهمة التي وصفناها وتكلمنا عليها في مكان آخر[٣٩]. إن الدراسة التي تعتمد المقارنة تظهر بشكل نهائي أن «ل» تنحدر من «ب» فقط؛ كما تعطي احتمالاً كبيراً بأن تكون «ف» هي الأخرى منحدرة من «ب». لكن، توخّياً للإقناع، مع المحافظة على عدم الإطالة وعدم إثقال الحواشي بما لا يلزم، يجب، في تحقيق القسم المفقود من «ب» أن نسجل بصورة منهجية حوادث النسخ في «ل» وفي «ف»؛ فتسجيل هذه الحوادث يساعد، بدرجات متفاوتة الأهمية، على تحقيق هذا المقطع. أما في ما يتعلق بالثلثين الباقيين من النص فكان مرجعنا الوحيد هو المخطوطة «ب»؛ لكننا، وللإقناع، تمسّكنا بعرض عيّنة من نتائج المقابلة المنهجية بين المخطوطتين «ف» و«ل»، وذلك في الحواشي، ما بين الصفحة ٧٧ والصفحة ٩٧، حيث قدّمنا جميع الدلائل المخطوطة. وفي تحقيق بقية الصفحات، المشتركة بين «ل» و«ب» لم نسجل سوى العِبر التي تقدمها «ب»، مكتفين بالعبر الأكثر أهمية المستخلصة من «ل» ـ وبخاصة بالثغرات ـ؛ وبمعنىً آخر، لم نقدم إلا ما هو أساسي للإثبات. إلى ذلك، يبقى لِـ «ل» دورٌ تلعبه في تحقيق النص وبخاصة عندما يتعلق الأمر بإكمال بعض المقاطع التي أتلفتها الرطوبة في «ب».

وفي كل الأحوال، تبقى الطريقة التي اتّبعناها في تحقيق النص، هي نفسها التي درجنا على اتّباعها سابقاً، في مناسبات أخرى: اختصار تدخلنا في النص إلى حدّه الأدنى، والاحتفاظ به فقط لحالات الأخطاء اللغوية أو العلمية التي قد تعيق الفهم الجيد للنص. ولم نسلّم بأي تغيير في نص المخطوطة، إلا بعد استنفاد الإمكانات اللغوية التي تسمح بعدم المساس بهذا النص.

في الحالة التي تحتل هنا المقام الأول في اهتماماتنا، وهي حالة المخطوطة «ب»، كما في معظم مخطوطات الرياضيات العربية، تكمن المصادر الأساسية للأخطاء في كتابة الأحرف التي تشير إلى المقادير الهندسية. ولقد قمنا، بالطبع، بإظهار هذه الأخطاء وتصحيحها في الحواشي. لكنّ العرف في هذا المجال يقضي بأن نضع خطاً أفقياً فوق هذه الأحرف؛ فنكتب مثلاً $\overline{\text{ب ح}}$. هذه الخطوط الأفقية التي أهملها ناسخ «ل»، موجودة بصورة منهجية في «ب». لكن، وابتداءً من الصفحة ٢٠٥، وبدل كتابة $\overline{\text{ب ح}}$ $\overline{\text{س د}}$، تمشياً مع العادة، عند التدليل على مجموع أو على فرق المقدارين $\overline{\text{ب ح}}$ و$\overline{\text{س د}}$، كان يكتب $\overline{\text{ب ح س د}}$ الأمر الذي يؤدي إلى خطأ. ولقد أصلحنا هذا النوع من الأخطاء الكتابية من دون الاشارة إليها في الحواشي.

---

(٣٩) انظر: Diophante, *Les Arithmétiques*, établi et traduit par R. Rashed (Paris: Les Belles lettres, 1984), Introduction, pp. LXXIV sqq.

إن كتابة الأعداد تطرح مسألة معادلة للمسألة السابقة. ولقد قمنا بالتصحيح عند اقتضائه. ولقد حافظ ناسخ «ب» على الخطوط التي تعلو الأرقام والتي اختفت في «ل». ولقد امتنعنا عن الإشارة إلى هذه الخطوط لكي لا نثقل الحواشي، لكننا طبعناها في مجال آخر. وبما أن الأشكال الهندسية هي من صنع النساخ، فلقد أعدنا رسمها، مستعينين بالنص، من دون إدراج الأصل ضمن الحواشي.

كتابة المخطوطة، هي بطبيعتها، من دون أحرف مَدّ؛ يضاف إلى ذلك أن نص «ب» مُعجَمٌ إلا في ما خصَّ بعض فقراته، وأنّ التشكيل، في الغالب، غائبٌ عن الحروف. وفي هذا المجال، لم نُشِر إلى تصحيحاتنا في الحواشي إلا عند اضطرارنا لتعديل هذه الحركات أو عند التعابير التي تجوز فيها قراءة أخرى.

الكتابة صحيحة بصورة عامة، باستثناء بعض الأخطاء أو الحالات التي تدعو إلى النقاش. وهكذا نجد في المخطوطة: «المسول»، «مسئلة»، «كلى»، «إنكان»، «إنكانت»، «كذى»، «أحديهما»، «هكذى»، «مثلى»، التي ينبغي إبدالها على التوالي بِ: «المسؤول»، «مسألة»، «كلا»، «إن كان»، «إن كانت»، «كذا»، «أحداهما»، «هكذا»، «مثلاً»، التي أعدنا تصويبها من دون ذكرها في الحواشي. وكذلك، بالنسبة إلى الأعداد التي كتبت احتراماً للقواعد الإملائية القديمة، اعتمدنا كتابتها بحسب الإملاء الحديث؛ فلقد كتبنا «ثلاثة»، «ثلاثون»، «ثلاثمائة» بدل «ثلثة»، «ثلثون»، «ثلثمائة»، من دون أن نشير في الحواشي إلى هذه التصحيحات.

أخيراً، نذكر أن الطوسي، كالعديد من الرياضيين العرب، لا يفرق بين كلمتي «كعب» - القوة الثالثة - و«مكعب» - الجسم الهندسي - وليس من النادر وجود الكلمتين في الجملة نفسها للدلالة على المعنى الأول (أنظر مثلاً ٢١٤، ٤ - ٥). أضف إلى ذلك أن كلمة «كعب» تعني أيضاً المرتبة للجذر التكعيبي. ولقد امتنعنا، في ما يتعلق بهذا الأمر، عن أي تعديل يهدف إلى إعطاء الشكل الذي يسمح بالاستعمال الأمثل؛ ذلك لأن التبادل فيما بين هذه الكلمات كان أمراً شائعاً في ذلك العصر، بالإضافة إلى أن الإطار الذي توجد فيه لا يترك أي مجال للالتباس في المعاني.

في كل الأحوال، نشير في الحواشي إلى ما أصلحناه وإلى بدائل أخرى ممكنة تجوز في النص. وعندما نقوم بإضافة أو حذف، فإننا نستعمل الاصطلاحات المرعية الإجراء. وتبقى الحواشي مع ذلك مخصصة للتوضيحات الضرورية لتحقيق النص وتثبيته وللملاحظات اللغوية المحتملة التي لا غنى عنها من أجل ذلك. ولقد قمنا بإضافة بعض الملاحظات بشأن محتوى النص. إن هذه المداخلات غير الاعتيادية مخصصة لتنبيه قرّاء النص العربي وحده، من خطأ محتمل أو لتقديم بعض الإيضاحات الضرورية لهم، للمساعدة على فهم النص. ولقد تعمّدنا ترك التبريرات والشروحات إلى التعليق المرافق للنص أو إلى الملحوظات الإضافية.

الصورة رقم (١)

مخطوطة خدابخش رقم ٢٩٢٨، ورقة ١ ظ.

الصورة رقم (٢)

مخطوطة خدابخش رقم ٢٩٢٨، ورقة ٤ ظ.

الصورة رقم (٣)

مخطوطة خدابخش رقم ٢٩٢٨، ورقة ١٧ظ.

58

الصورة رقم (٤)

مخطوطة Loth (لوث) رقم ٧٦٧ المكتب الهندي، ورقة ٥٨ ظ.

سادساً: الترجمة الفرنسية

تتميز اللغة التي كتبت بها «الرسالة» بصعوبة غير عادية. ونادراً ما يوجد نص رياضي يضاهي صفحاتها في هذا المجال. والقضية هنا ليست نتيجة شوائب في مقدرة المؤلف اللغوية؛ فهذا الجانب المستعصي يتعلّق بقضية من نوع آخر: إنّه يتعلّق، بالضبط، بالتقدّم الذي حصل في هذا الفرع من الرياضيات بفضل المؤلّف نفسه. وسنحلّل، في مكان آخر، تطوّر هذا العلم وأسلوب الكتابة فيه. أما الآن فنكتفي بالتذكير بأنه، في غياب الرمزية، كان من الصعب جداً التعبير عن الأبحاث الجديدة من خلال اللغة العادية وحدها. إن مثل هذا التباين بين مستوى تطور الرياضيات وإمكانات اللغة العادية لا يَحدُّ من تقدم المعرفة فقط، بل يعيق أيضاً انتشار هذه المعرفة. إن حالة الطوسي معبِّرة تماماً في هذا المجال؛ وهي تقدِّم مثالاً عن هذا القيد الذي فرضه استعمال اللغة الطبيعية في الرياضيات. ولنبدأ بتفحص بعض المسائل التي طرحتها اللغة التي استعملها الطوسي.

في أقسام «الرسالة» المخصصة للحل العددي للمعادلات يعتمد الطوسي منهجاً منظماً: فهو يبدأ بتطبيق خوارزميته على مختلف الحالات قبل أن يقدّم مبرراتها الرياضية. واللغة التي يستعملها في عرضه هذا مشتقة من لغة الجبر الحسابي، أي من اللغة المستعملة لاستخراج الجذر النوني لعددٍ صحيح بواسطة الخوارزمية نفسها. لكن توسيع هذه الطريقة وتطويرها بحيث تنطبق على المعادلات الكثيرة الحدود، بالإضافة إلى محاولة إنشاء نظرية رياضية جديدة لشرح هذه الخوارزمية نفسها، تسبّبا في تقوية الاتجاه (الموجود أصلاً) إلى استعمال الكلمة نفسها للتعبير عن عدة أشياء أو عدّة عمليّات مختلفة؛ كما تسببا في صياغة تعابير يصعب استعمالها. فقد استعمِلت كلمة «جذر» للدلالة على الجذر التربيعي وعلى جذر المعادلة، وكذلك على المرتبة المعدّة للجذر التربيعي. كما كان لِكلمة «كعب» ثلاثة معانٍ. وبحسب الحالة المدروسة كانت كلمة «المرتبة» تشير إلى المرتبة العشرية للعدد أو إلى المنزلة العشرية للرقم ضمن العدد، باعتبار أن 10° هي المنزلة رقم ١. ويُدخِلُ الطوسي أيضاً تعابير مثل «الجذر السمي للكعب الأخير». إن اللجوء إلى مثل هذه الصيغ للدلالة على مراتب المعاملات يزيد من صعوبة قراءة النص.

وتزداد اللغة تعقيداً عندما يتصدى الطوسي للتبرير الرياضي لخوارزميته. وهنا يشرع بشرح طرق تحديد مختلف الأرقام التي يتألف منها الجذر المطلوب والمنزلة العشرية لكل من هذه الأرقام، وكذلك تحديد العلاقة بين معاملات المعادلة تبعاً للمرتبة العشرية لكل معامل. وعلى الرغم من أن لغة الطوسي سويّة وتحافظ على الشكل نفسه

إلا أنها تتحول سريعاً إلى ما يشبه الألغاز نتيجة ثقل تعابيرها وتعدد الصيغ التفضيلية[٤٠] فيها ونتيجة للإسهاب الذي قد يدعو إلى الحيرة.

في الأقسام الأخرى من الرسالة يستعمل الطوسي بشكل أساسي لغة الخيّام؛ هذا ما فعله مثلاً عند معالجته تحديد جذور المعادلات بواسطة المنحنيات المخروطية. إنها في الواقع لغة مركبّة من لغة الجبر الهندسي ولغة الهندسة، وبخاصة في الفصل المتعلق بالقطع المخروطية. غير أن الطوسي يتعمد توجيه أبحاثه في اتجاه يزيد طابعه التحليلي على اتجاه أبحاث الخيام. فهو يُدخِل تعابير جديدة غائبة كلياً عن صفحات الخيّام، مثل «عدد التفاوُت»، «العَلَم»... إلخ، بهدف تشكيل المقادير ومقارنتها. وفي الاجمال استعمل الطوسي لغة الجبر الحسابي في الهندسة، أكثر بكثير ممّا فعل الخيّام؛ لكنّه، أيضاً، استعمل لغة الهندسة في الجبر لكي يصوغ لغة تتلاءم مع تحليل المقادير، وبالتالي مع نظرية المعادلات الجبرية على الشكل الذي قدّمها به. غير أن تعدد المفاهيم والحسابات المعقدة التي تتطلبها هذه الرياضيات لم يكن من شأنه أن يجد في اللغة المتداولة وحدها ما يقتضيه الوضوح والإيجاز وما تقتضيه الفعالية المطلوبة.

في ظل هذه الحالة، كيف يمكن تحويل نص الطوسي إلى الفرنسية؟ هناك طريقتان يمكن اتباعهما في هذا المجال. الطريقة **الأولى** كانت متبعة في القرن التاسع عشر، ولا تزال تتبع أحياناً حتى الآن، وهي ترتكز على استعمال رمزية بدائية وتستعين بتعابير حديثة. هذه الطريقة تزيل بعض العوائق الخاصة بترجمة النصوص القديمة وتصل بالتالي إلى نص فرنسي ملطّف، وبالتالي أكثر أناقة. والطريقة **الثانية** والأصعب، هي الترجمة الحرفية التي لا تعتمد احترام روح النص فقط، بل حرفيته أيضاً. وباعتماد هذه الطريقة لا تعود المسألة مسألة الالتفاف على الصعوبات، بل مجابهتها كلها تقريباً. ونحن تعمّدنا سلوك السبيل الثاني هذا، على الرغم ممّا قد تعانيه أناقة النص؛ فهذه الطريقة لا تمنع الخلط بين عمليتي الترجمة والتفسير وحسب، بل تقي من أن تندسّ أيضاً، ثم تظهر خلال عملية الترجمة، بعض المفاهيم العائدة لرياضيات أخرى. وأخيراً نضيف بأنّ إدخال الرموز (الحديثة (المترجم)) في ترجمة «الرسالة»، قد يطمسُ العوائق التي أقامها غياب الرمزية في عمل الطوسي ويُعطي بالتالي فكرة مضلّلة عن الأسلوب الرياضي للنص.

زيادة على ما تقدّم، يُعتَبر أسلوب الطوسي موحّداً في الشكل، بمعنى أنه يستعمل إجمالاً التعبير نفسه للإشارة إلى الموضوع نفسه أو إلى المفهوم نفسه. وفي الترجمة إلى الفرنسية أردنا احترام القواعد عينها التي اتبعها المؤلف. فلقد حاولنا، بقدر الإمكان، إعادة الكلمة الفرنسية ذاتها مقابل الكلمة العربية الواحدة. وبالإضافة إلى ذلك، بذلنا ما بوسعنا لإيجاد تعابير ذات طابع قديم لكي ننقل بأمانة عبارات هذا الرياضي.

(٤٠) نسبة إلى أفعل التفضيل: (أعظم، أصغر...). (المترجم).

لكن، ومن أجل احترام المظهر الموحّد للغة الطوسي، مع تأمين سهولة في قراءة النص، بدا لنا من الضروري إعطاء بعض التعريفات[٤١]، التي وإن لم يكن المؤلف قد قدّمها صراحة، إلا أنها كامنة في العرض الذي يقدّمه بشأن الحل العددي للمعادلات، وهذا ما سنتحقق منه لاحقاً.

سابعاً: أعمال الطوسي الرياضية الأخرى

زيادة على الرسالة في «المعادلات»، تحوي أعمال الطوسي الرياضية «كتيباً» عن الخط المقارب لأحد فروع القطع الزائد المتساوي الأضلاع، كما تحوي مقالاً في «عمل مسألة هندسية» يحلّها جبرياً؛ وهذا كل ما وصل إلينا من أعماله الرياضية.

يستجيب «الكتيّب» لهدفين في آن، فهو أولاً يندرج ضمن تقليد متبع منذ القرن العاشر؛ وهو من جهة ثانية مرتبط مباشرة «بالرسالة»، كما رأينا. فلقد شكلت دراسة أبولونيوس في الكتاب الثاني من **المخروطات** وبخاصة منها القضية ٢ ـ ١٤، حافزاً لكثير من أعمال الرياضيين العرب التي كان لها كلّها العنوان نفسه: «في الخطين اللذين يقربان ولا يلتقيان»؛ ونعرف حالياً ثلاثة من هذه الكتيبات للسزجي والقُمّي وابن الهيثم. وسنحقق ونحلّل محتوى هذه الكتيبات في مكان آخر. لكن لنذكر فقط بأن الطوسي، حتى ولو حذا حذو بقية الرياضيين بتخصيص نص للقضية المهمة التي تتعلق بمفهوم الخط المقارب، إلا أنه لم يدرسها لذاتها؛ وإنه حتى ولو بحث، كما فعلوا، في وصف مميزات فرع القطع الزائد، وفي سلوكه بقرب الخط المقارب، فإنما فعل ذلك تلبية لمقتضيات دراسة المعادلات الجبرية: فمعادلة المنحني بالنسبة إلى خطوطه المقاربة، تدخل في حلّها.

لكن «الكتيب» الذي كتب بعد «الرسالة» يهدف إلى إنجاز نص إحدى أوائل قضاياها، ويمكن أن يبدو، من هذه الزاوية، ككتابة ثانية للقضيتين الأولى والثانية من الرسالة.

ولا نعرف حتى الآن إلا نسخة واحدة من «الكتيب» هي عبارة عن النص الثاني والأخير من إحدى المجموعات. النص الأول يعود إلى نظام الدين النيسابوري، وهو شرح لرسالة نصير الدين الطوسي في علم **الفلك**. هذه النسخة هي مخطوطة آيا صوفيا ـ استنبول رقم ٢٦٤٦. ومِمّا ورد في قلفونة النص الأول، نعلم أن هذه النسخة أنجزها المدعو محمد بن مصطفى بن موسى الإيانلوغي المعروف بالصوفي في بداية نيسان/ أبريل ١٤٢٦م، و«الكتيب» يحتل الورقة الأخيرة ـ الورقة ٧١ ـ وهي من صناعة بقية الأوراق نفسها. ما كُتِب عليها هو بيد الناسخ نفسه. فنحن إذن متأكدون من هوية

---

(٤١) انظر المصطلحات ص LVI.

الناسخ ومن تاريخ النسخ. وعبر المخطوطة كلها، الخط نستعليق وقياس كل من صفحاتها ٢٧,٦ سم × ١٨,٥ سم يحتل فيها النص مجال ٢٤,٩ × ١٣,٢ سم[٢]، وتحوي ٣١ سطراً، في كل سطر نحو ١٩ كلمة. النص مكتوب بالحبر الأسود، أما الأشكال الهندسية فبالأحمر. وبينما راجع الناسخ نص الشرح في علم الفلك مقارنا إيّاه بالنموذج الأصل، ليس من إثبات بأن «الكتيب» قد عُومِل بالمثل. فلا نرى على هامش النص أي تعليق لا من الناسخ ولا من غيره. نشير أخيراً إلى أن مصدر المخطوطة هو «مكتبة السلطان محمود خان».

أما «المقال» (وبهذه اللفظة نشير إلى رسالته «في عمل مسألة هندسية») فهو بطبيعته عمل ظرفي. إنه رسالة جوابية عن سؤال طرحه أحد رجال الدولة، وهو شخص مشار إليه باسمه من دون كنيته؛ لذلك يبقى هذا المراسل مجهولاً لنا. إننا نجهل أيضاً تاريخ كتابة صفحات هذا العمل. لذلك لا نستطيع تحديد موقعه في سياق أعمال الطوسي. ولقد وصلتنا نسختان من هذا «المقال»: النسخة **الأولى** تشكل جزءاً من مخطوطة سميث شرقيات ٤٥، ص ٢٩ - ٣٥، في جامعة كولومبيا. **والثانية** موجودة في مخطوطة ليدن شرقيات ١٤، من الورقات ٣٢٣ وجه إلى ٣٢٦ ظهر لكننا تمكنا من إثبات أن المخطوطة الأخيرة هي نسخة من الأولى، تعود إلى القرن السابع عشر. ولقد قمنا بمقارنة تفصيلية دقيقة للنسختين عند الطبعة الأولى لمقالنا هذا[٤٢]. لذلك لم نتردد في إهمال مخطوطة ليدن عند تحقيق النص، محتفظين، فقط، بمخطوطة سميث، شرقيات ٤٥.

ثامناً: المصطلحات

نذكّر بأن «المرتبة العشرية» لعدد طبيعي N هو العدد الطبيعي m الذي يحقق الشرط: $10^m \leq N < 10^{m+1}$. نذكّر أيضاً بأن أي عدد طبيعي N يمكن كتابته على الشكل التالي: $N = C_p\, 10^p + C_{p-1}\, 10^{p-1} + \ldots + C_2\, 10^2 + C_1.10 + C_0$ حيث الأحرف C_0، C_1، C_2 وَ . . . C_p تشير إلى الأرقام العشرية المؤلّفة لهذا العدد (كل منها محصور بين الصفر والتسعة، وَ $C_p \neq 0$). ففي هذه الحالة نقول إن العدد i هو المنزلة العشرية للرقم C_i في العدد N. في العدد $N =$ ٢٥٦٤٦٩٧ نجد الرقم ٧ في المنزلة صفر، ٩ في المنزلة ١ (أو المنزلة الأولى)، ٦ في المنزلة ٢ وفي المنزلة ٤. . . إلخ.

تعريف ١: المرتبة العشرية لعدد طبيعي N هي ما يسميه الطوسي «آخر مراتب العدد» N.

ملاحظة ١: كان الطوسي يعطي هذا الاسم أحياناً للعدد $E[N/10^m].10^m$، حيث

(٤٢) Roshdi Rashed, «Un problème arithmético - géométrique de Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī,» *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 3, no. 2 (Alep 1978), pp. 233 - 253.

m هي المرتبة العشرية لِ N وحيث $E(a)$ تشير إلى القسم الصحيح من العدد a.

في ما يلي، يشير الحرف N إلى عدد طبيعي، آخر مراتبه (مرتبته العشرية) هي m؛ ويشير الحرف n إلى عدد طبيعي يحقق الشرط $n \leq m$.

القسمة الإقليدسية لـ m على n تعطي

$$m = np + r \qquad (0 \leq r < n)$$

لنأخذ الآن عدداً طبيعياً j بحيث يكون $(0 \leq j \leq p)$.

تعريف ٢: إنّ المنزلة العشرية التي يشير إليها العدد jn تسمّى «المرتبة الجيمية المُعَدّة للجذر النوني» للعدد N(٤٣).

ففي الحالة $n = 2$، المرتبة الجيمية المُعَدّة للجذر النوني هي: «المرتبة الجيمية المُعَدّة للجذر» (التربيعي)؛ وفي هذه الحالة، إذا كان $j = p$، نقول إنّها «آخر المراتب المهيأة للجذر»، وهو ما يسميه الطوسي «الجذر الأخير». وإذا كان N هو معامل x° في معادلة تربيعية، $(n = 2 \ ، j = p)$، نقول إنّها «آخر المراتب المهيّأة للجذر، المقابل للعدد N»، وهو ما يسميه الطوسي «الجذر الأخير المقابل للعدد» N(٤٤).

وقياساً على ذلك، في الحالة $n = 3$، المرتبة الجيمية المُعَدّة للجذر النوني، هي «المرتبة الجيمية المُعَدّة للجذر التكعيبي». وفي هذه الحالة، إذا كان $j = p$، نقول إنها «آخر المراتب المُعَدّة للجذر التكعيبي» وهو ما يسمّيه الطوسي بـ «الكعب الأخير». وإذا كان N هو معامل x^0 في معادلة تكعيبية، $(n = 3 \ ، j = p)$ نقول إنّها «آخر المراتب المُعَدّة للجذر التكعيبي المقابل للعدد» N، وهو ما يسميه الطوسي «الكعب الأخير المقابل للعدد» N.

ملاحظة ٢: لتحديد المرتبة الجيمية المُعَدّة للجذر النوني حيث $n = 2$ أو $n = 3$، يعمد الطوسي على غرار رياضيي علم الحساب، إلى تقسيم الأرقام التي تؤلف العدد N إلى شرائح ابتداءً من الرقم ذي المنزلة صفر. وكان يضع علامة على طرف كل شريحة، هي عبارة عن صفر صغير يضعه فوق الرقم الذي يحدد هذا الطرف. فعلى هذا الأساس يشير الصفر الصغير ذو الرتبة ج إلى المرتبة الجيمية المُعَدّة للجذر النوني المقابلة للعدد N.

ملاحظة ٣: الرقم ذو المنزلة العشرية صفر (في كتابة N)، منزلته بالنسبة إلى

---

(٤٣) التعبير الذي استعمله المؤلف بالفرنسية هو «Place affectée» (الموضع المهيّأ) وليس «المرتبة». (المترجم).

(٤٤) أو أيضاً «مرتبة آخر الجذور المقابلة للعدد». (المترجم).

الطوسي هي 1. لذلك يجب أن نتذكر بأن الموضع الجيمي بحسب التحديد 2 هو الموضع الـ $(j+1)^e$، أي المنسوب لِ $(j+1)$ بحسب الطوسي. «والموضع الأخير» الذي هو الموضع الجيمي حيث $j=p$، هو بالنسبة إلى الطوسي الموضع الجيمي حيث $j=p+1$.

تعريف ٣: لنأخذ عددين طبيعيين N و N'، مختلفين أو متساويين، ولنفرض أن m هي المرتبة العشرية لِ N وأنّ m' هي المرتبة العشرية لِ N'، وأنّ ℓ وَ n عددان طبيعيان مخالفان للصفر يحققان: $n<m$ وَ $\ell<m'$.

إنّ المرتبة الجيمية j^e المعدة للجذر النوني n^e المقابل لِ N والمرتبة الجيمية المعَدّة للجذر اللامي (ℓ^e) المقابل لِ N' نقول إنّهما موضعان «سميّان» (يحملان الاسم نفسه). وكذلك يقال «سميّتان» للمنزلة العشرية الجيمية داخل N وللمنزلة العشرية الجيمية داخل N'. نقول كذلك «سميتين» للمرتبة الجيمية المعدة للجذر النوني المقابلة للعدد N وللمرتبة الجيمية المعدّة للجذر اللامي المقابل للعدد N'.

مثال: لنأخذ العددين: N = ٣٤٩٨٧٣٩١٠٧٨١ وَ N' = ٧٩٥٤١٢٣٤ .

في هذه الحالة يكون $m=11$ وَ $m'=7$. ولنأخذ $n=3$ وَ $\ell=2$ ، وإذا حددنا المراتب المعدة للجذر التكعيبي المقابلة لِ N والمراتب المعدة للجذر (التربيعي) المقابلة لِ N'، وذلك بوضع صفر صغير فوق طرف كل شريحة، نحصل على:

$N=$ ٣٤٩̊٨٧٣̊٩١٠̊٧٨١̊ ؛

$N'=$ ٧٩̊٥٤̊١٢̊٣٤̊ .

إن هذه الكتابة البيانية تسمح بالرؤية الفورية للمراتب (المعدّة) للجذر التكعيبي ولمراتب الجذر التربيعي، السمية. فالمرتبة الثالثة المعدّة للجذر التكعيبي المقابلة لِ N ـ وهي المنزلة العشرية السادسة، انظر الرقم «٣»، السابع من اليمين في كتابة N ـ، والمرتبة الثالثة المعَدّة للجذر التربيعي المقابلة للعدد N' ـ وهي المنزلة العشرية الرابعة؛ انظر الرقم «٤» الخامس من اليمين في كتابة N' ـ، هما مرتبتان سميّتان.

فعندما يكون $N=N'$، $n=2$، $j=p$، فإن المرتبة العشرية الجيمية تسمى «المرتبة السميّة لآخر المراتب المعدّة للجذر»، وهي ما يسمّيه الطوسي «المرتبة السميّة للجذر الأخير»؛ وإذا كان $n=3$ فهي تسمى «المرتبة السميّة لآخر المراتب المعَدّة للجذر التكعيبي» وهي ما يسميه الطوسي «المرتبة السمية للكعب الأخير».

وقد نلتقي في ما سيتبع بعض التعريفات التي ليست سوى تطبيقات من التعريف ٣ السابق.

القسم الأول

الفصل الاول

الحل العددي للمعادلات وطريقة روفيني ـ هورنر

قسم مهم من «رسالة» الطوسي مخصص للحل العددي للمعادلات. إن هذا الموضوع الرياضي بدأ يتشكّل مع العمل على استخراج الجذر النوني لعدد صحيح وتطور من ثَمَّ، ليشمل حل المعادلات الكثيرة الحدود. لذلك ليس من المستغرب في شيء أن يشكّل أحد الأجزاء المكوِّنة لرسالة تتناول بالضبط هذه المعادلات.

ولسنا هنا في صدد إعادة كتابة تاريخ هذا الموضوع، لكننا سنستعيد أفكار الطوسي وطرقه لشرحها والتعليق عليها؛ هذه الأفكار التي حال دون النفاذ إليها خطأ تسبب في العديد من الأخطاء. إن التوصل إلى هذه الاستعادة، استوجب تغييراً في اللغة وإدخالاً متعمّداً لمصطلحات تناسب أفكار الكاتب وتكون مؤهلة لإبراز المحطات المختلفة في تفكيره. فلا شك إذاً أننا لن نُقَدِّم هنا سوى قراءة في «الرسالة» للقسم الذي يعالج هذا الموضوع. وقد أردنا لهذه القراءة أن تكون، بقدر الإمكان، القراءة الأكثر أمانة للمسائل التي طرحها الطوسي وللوسائل التي اخترعها لحلها.

لنأخذ المعادلة:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (٠ ـ ١)$$

حيث المعاملات كلّها في $\mathbb{Z}$.

وَلنكتب (٠ ـ ١) على الشكل الذي اتّبعه الطوسي

$$g(x) = h(x) \qquad (٠ ـ ٢)$$

حيث $g(x)$ تشير إلى مجموع الحدود ذات المعاملات الموجبة وَ $-h(x)$ تشير إلى مجموع الحدود ذات المعاملات السالبة في $f(x)$. وهنا يميز الطوسي بين حالات ثلاث:

الحالة (١): $(c = 0)$؛ في هذه الحالة يعود حلّ المعادلة (٠ ـ ١) إلى حل معادلة من الدرجة الثانية.

الحالة (٢): $(c < 0)$؛ في هذه الحالة $-c > 0$، وسيكون $-c$ إذاً معاملاً في $h(x)$ وتحوز المعادلة (٠ ـ ١) على جذر موجب على الأقل.

الحالة (٣): $(c > 0)$؛ في هذه الحالة، يوجد c في $g(x)$ وقد لا يكون لِـ(٠ ـ ١) أي جذر موجب؛ وقد يكون لها جذر موجب، مزدوج أو بسيط؛ وأخيراً يمكن أن يكون لها جذران موجبان مختلفان.

ولكي يحدِّد الجذر الأكبر، يعمد الطوسي إلى تبديل أفيني للمتغير، فتؤول المسألة إلى معادلة من الحالة (٢)، ذات جذر موجب واحد فقط. هذا الجذر الموجب الوحيد الذي يحصل عليه عندئذٍ، يقابل، نظراً لتبديل المتغيّرات، الجذر الأكبر المطلوب للمعادلة الأساسية. أما الجذر الأصغر في المعادلة الأساسية، فيقابله جذر سالب في المعادلة المحوَّلة. وهنا نذكِّر بأن الجذر السالب لا وجود له بالنسبة إلى الطوسي.

إنّ مخطط فصلنا هذا ينتظم إذاً بشكل طبيعي: فقرة أولى تطرح المسألة بشكل إجمالي. من ثَم تعالج الفقرات ٢، ٣ و ٤، الحالة الثانية المذكورة سابقاً. والفقرة الخامسة تعالج الحالة الأخيرة $(c > 0)$. أما الفقرة السادسة، النهائية، فهي مخصصة لإعادة تركيب لوحات الطوسي على الشكل الذي كانت عليه قبل حذفها في القرن الثالث عشر من قبل المجهول الذي سبق ذكره في المقدمة.

إنّ تفحص المراحل المتتالية لعرض الطوسي سيسمح بتبيان ما يلي:

١ ـ لم يكتفِ الطوسي بإدخال خوارزمية للحل، بل حاول صياغة نظرية رياضية لتبرير هذه الخوارزمية وتطبيقها.

٢ ـ إن الأقسام المكوّنة لهذه النظرية، وتبعاً لذلك فإن المراحل المختلفة لعرض الطوسي، هي أقسام متفاوتة من حيث الدقة الرياضية ومن حيث العمومية.

٣ ـ الخوارزمية التي أدخلها الطوسي هي مثلى (Optimale) بالمعنى الحالي للكلمة؛ فهي تؤدّي إلى احتساب الجذر المطلوب بشكل فعلي و«اقتصادي» (أي، بمراحل حسابية قليلة لا تقتضي وقتاً طويلاً لإنجازها (المترجم)).

٤ ـ الخوارزمية ليست سوى المخطط العملي المنسوب إلى روفيني ـ هورنر[١].

هذا ما سبق أن أكّدناه وما سنبرهنه بدقة في الفصل الحالي. فهذه الخوارزمية إذن ليست خاصة بالمعادلات التكعيبية، ويمكن تعميمها فوراً على المعادلات الكثيرة الحدود.

---

(١) Roshdi Rashed, «Résolution des équations numériques et algèbre Sharaf Al-dīn al-Ṭūsī - Viète,» *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 12, no. 3 (1974), pp. 244 - 290.

أولاً: مسألة المعادلات العددية

يعالج الطوسي في «الرسالة» المعادلات من الدرجة الأصغر أو المساوية لِ ٣. لكن صياغته يمكن تعميمها بشكل فوري إلى ما يعود لحل المعادلة:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \,.\, x^{n-i} = 0, \qquad (١ \text{ - } ١)$$

حيث $a_i \in \mathbf{Z}$، $a_0 = 1$، $a_n \neq 0$.

إن دراسة هذه المعادلة تتطلب إدخال بعض الوسائط التي ستظهر الفائدة منها في الفقرات التالية:

بالنسبة إلى أي معامل a_i ($a_i \neq 0$ وَ $1 \leq i \leq n$)، نسمّي m_i المرتبة العشرية[٢] لِـ a_i ونفرض أن القسمة الإقليدسية لِـ m_i على i تعطي:

$$m_i = i.p_i + q_i \; ; \qquad (٢ \text{ - } ١)$$

حيث $0 \leq q_i < i$.

وبما أن العدد الطبيعي a_n يلعب دوراً أساسياً في هذه الدراسة، فسوف نشير بـ N، m، p، q، بالتتالي، إلى الأعداد $|a_n|$، m_n، p_n وَ q_n. ولكي لا نبتعِد عن روح «الرسالة» سنكتب f غالباً على شكل فرق بين كثيرتي حدود g و h ذات معاملات موجبة؛ لذلك نستطيع كتابة المعادلة (١ ـ ١) على الشكل التالي:

$$g(x) = h(x) \qquad (١ \text{ - } ١)'$$

لكنّنا اعتبرنا أساساً أن $a_0 = 1$؛ لذا فإنّ درجة $g(x)$ هي n بينما درجة $h(x)$ هي، قطعاً، أصغر من n. وكما فعلنا سابقاً سوف نميّز بين حالتين:

الأولى: $a_n < 0$؛ وهذا يعني أن ($N = |a_n|$) هو حدّ من حدود $h(x)$؛ وفي هذه الحالة يوجد دائماً جذر موجب على الأقلّ.

الثانية: $a_n > 0$؛ وهذا يعني أن $N = a_n$ هو حد من حدود $g(x)$. وفي هذه الحالة تجوز الاحتمالات التي سبق ذكرها.

---

(٢) إذا كان c هو عدد الأرقام العشرية التي تؤلف عدداً موجباً a، فإن المرتبة العشرية لـ a هي $c - 1$ أي أيضاً: $E[log_{10}\, a]$.

لنفرض، من جهة أخرى أن المعادلة (١ ـ ١) تحوز على حلّ هو s توسيعه العشري هو التالي:

$$s = \sum_{i=0}^{r} s_i \qquad (١ ـ ٣)$$

حيث $s_i = \sigma_i \, 10^{r-i}$.

لكي نحتسب s، يكفي أن نحتسب بالتتالي الأرقام s_i. إن طريقة الطوسي لهذا الاحتساب تحوي قسمين: القسم **الأول** يخصصه لاحتساب σ_0. أما في القسم **الثاني** فيشكل معادلة يكون $(s - s_0)$ جذراً لها، وانطلاقاً من هذه المعادلة الجديدة يبحث عن σ_1؛ ويشكّل من جديد معادلة يكون $s_1 - (s - s_0)$ جذراً لها. وهكذا يعيد العملية نفسها ما يَلْزَم من المرّات. هذا هو مسار طريقة الطوسي التي ستفحصها فيما سيتبع.

ثانياً: تحديد الرقم الأول من الجذر الموجب المطلوب

من السهل إيجاد σ_0 في حالة معادلة، سواء أكانت كثيرة الحدود أم لا، إذا ما اتّبعنا طرقاً تحليلية تسمح بحصر الجذر المطلوب داخل فسحة مناسبة وتسمح بالتالي بحصر أول أرقامه (بدءاً من اليسار).

لكن الطريق التي اتّبعها الطوسي كانت مختلفة تماماً. صحيح أنه توسّل حَصْر الجذر المطلوب ضمنَ فسحة مناسبة؛ ألا أنه عمل على مواجهة حالات عدة آخذاً بالاعتبار ترتيب معاملات المعادلة (١ ـ ١) بحسب قيمها المطلقة. ولنذكر منذ الآن بأن الصعوبة الكبرى التي وجدها الطوسي، والتي لم تتكشف له إلا عند نهاية بحثه، كانت كثرة الحالات المختلفة التي عليه مواجهتها. فسرعان ما يتزايد عدد هذه الحالات عندما يتجاوز n العدد ٣، وهذا ما يجعل المناقشة صعبة إن لم نَقُل عقيمة. وزيادة على ذلك، وحتى لو توقفنا فقط عند المعادلات التكعيبية، سرعان ما نكتشف أن المعطيات التي تخص معاملات المعادلة (١ ـ ١) والتي بالنظر إليها تتحدّد الحالات التي يجب مواجهتها، هي معطيات لا تفي بالمطلوب. فهذه المعطيات نفسها بإمكانها أن تؤدّي إلى حالة معينة في مثل ما، كما إلى حالة من نوع آخر في مثل ثانٍ. إلا أن هذه الصعوبة التي اعترضته عند محاولته تبرير خوارزميته وشرح كيفية تحديد الرقم الأول من الجذر المطلوب، لم تمنعه من إبراز فكرة «كثير الحدود المهيمن»؛ وهو بهذا الإبراز، يدفع بنظرية المعادلات إلى الأمام، لكن باتجاهات مغايرة. ولا يسعنا إلا أن نذكّر أن الطوسي يختم طريقته بالاعتراف بنوع من التردُّد بخصوص هذه الصعوبة. ولنتناول حالياً نصّ الطوسي.

لنفترض أولاً أن المعادلة (١ ـ ١) تحوز على جذر موجب وحيد هو s، معطى على شكل المعادلة (١ ـ ٣). ولنفترض أيضاً أن s هو جذر بسيط (غير مزدوج أو أكثر

من مزدوج). إن هذا الشرط محقق حكماً في حالات عدة، منها الحالة ($a_n < 0$ و$a_i \geq 0$ لكل i حيث $1 \leq i < n$) ومنها الحالة $a > 0,\ b > 0$ و$x^3 + a\,x^2 = b\,x + N$.

وقد يكون محققاً، تبعاً للقيم الفعلية للمعاملات (الموجبة) a وَ b، في المعادلة:

$$x^3 + b\,x = a\,x^2 + N.$$

إنّ شرط وجود جذر موجب واحد بسيط، بالاستناد إلى تواصل f، يقضي بأن تُغيّر $f(x)$ إشارتها مرّة واحدة على $\mathbb{R}_+$. وبشكل أكثر تحديداً، فإنّ لدينا ما يلي:

(٢ ـ ١) إذا كان $\left.\begin{matrix} 0 < x_1 < s \\ \text{وَ} \\ 0 < x_2 < s \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} x_1 > s \\ \text{وَ} \\ x_2 > s \end{matrix}\right\}$ يكون $(f(x_1)\ .\ f(x_2) > 0)$

(٢ ـ ٢) إذا كان $\left.\begin{matrix} x_1 < s \\ \text{وَ} \\ x_2 > s \end{matrix}\right\}$ يكون $(f(x_1)\ .\ f(x_2) < 0)$.

لكن، بما أن لدينا:

(٢ ـ ٣) $$0 < \sigma_0\ 10^r \leq s < (\sigma_0 + 1)\ .\ 10^r$$

تكون اللامتساوية

(٢ ـ ٤) $$f(\sigma\ .\ 10^r)\ .\ f[(\sigma + 1)\ .\ 10^r] \leq 0$$

محققة بـ $\sigma = \sigma_0$ (المساواة في (٢ ـ ٤) تتحقق عند كون $s = \sigma_0\ .\ 10^r$، وهذا ما سنستبعده في ما سيتبع). وبشكل أدق، يمكننا أن نؤكّد النتيجة التالية: «الرقم الوحيد الذي يحقق اللامتساوية (٢ ـ ٤) هو σ_0».

وللبرهان، نفترض أن σ رقم مخالف لِ σ_0. من البديهي أن $\sigma < \sigma_0$، تعطي:

$$\sigma\ .\ 10^r < (\sigma + 1)\ 10^r \leq \sigma_0\ .\ 10^r < s,$$

وأن $\sigma > \sigma_0$ تعطي:

$$s < (\sigma_0 + 1)\ .\ 10^r \leq \sigma\ .\ 10^r < (\sigma + 1)\ .\ 10^r$$

لهذا، وَبناء على (٢ ـ ١) يكون لدينا، في كلتا الحالتين، أي مهما كان σ:

$$f(\sigma\ .\ 10^r)\ .\ f((\sigma + 1)\ .\ 10^r) > 0.$$

ولنعد الآن إلى المعادلات (١ ـ ١) ($a_0 = 1$، $a_n = N \neq 0$، $a_i \in \mathbb{Z}$) ذات الجذر الموجب الواحد البسيط.

في هذه المعادلات، نرى بسهولة أن العلاقتين (٢ ـ ١) وَ (٢ ـ ٢) تأخذان الشكل التالي:

$$\left.\begin{array}{r} 0 < x < s \Longrightarrow f(x) < 0 \\ x > s \Longrightarrow f(x) > 0 \end{array}\right\} \qquad (٢ ـ ٢')$$

لذلك، فعندما يكون $\sigma = \sigma_0$ يكون لدينا، بناء لما سبق، وباعتبار $s \neq \sigma_0 \,.\, 10^r$:

$$f((\sigma_0 + 1) \,.\, 10^r) > 0 \text{ وَ } f(\sigma_0 + 10^r) < 0 \qquad (٢ ـ ٥)$$

وهو، أخذاً في الاعتبار (١ ـ ١)، ما نستطيع كتابته:

$$g((\sigma_0 + 1) \,.\, 10^r) > h((\sigma_0 + 1) \,.\, 10^r) \text{ وَ } g(\sigma_0 \,.\, 10^r) < h(\sigma_0 \,.10^r) \quad (٢ ـ ٦)$$

ملاحظة ٢ ـ ١: لنفرض أن $a_i \geq 0$ لأجل كل i حيث ($1 \leq i \leq n-1$) وأنّ ($a_n = -N < 0$). عند ذلك يُكتب الشرط (٢ ـ ٦) كما يلي:

$$g(\sigma_0 \,.\, 10^r) < N < g((\sigma_0 + 1)\, 10^r) \qquad (٢ ـ ٧)$$

وفي هذه الحالة يمكن تحديد σ_0 بشكلٍ وحيد، كونه الرقم الأكبر بين الأرقام σ التي تحقق الشرط $g(\sigma \,.\, 10^r) < N$.

لذلك، من الممكن، نظرياً على الأقل، تحديد σ_0 و r انطلاقاً من $f(x)$، وذلك بواسطة هذه، أو تلك، من العلاقات من (٢ ـ ٤) إلى (٢ ـ ٧).

لكن، في كل هذه العلاقات، استعملنا جميع حدود f، بينما كانت الفكرة الرئيسة للطوسي تدعو إلى التوقف عن الاستعانة بكل الحدود، لكي نستخدم فقط عدداً محدوداً منها. وفي الواقع، يوجد عامة، كثير حدود f_1، مؤلّفاً من بعض حدود f، متعلّقاً بـ s وبحيث تكون العلاقة:

$$f_1((\sigma_0 + 1) \,.\, 10^r) > 0 \text{ وَ } f_1(\sigma_0 \,.\, 10^r) < 0 \qquad (٢ ـ ٨)$$

مكافئة للعلاقة (٢ ـ ٥).

إذا ما كتبنا f_1 على شكل فرق ($g_1 - h_1$) بين كثيري حدود g_1 وh_1 بمعاملات موجبة، تصبح (٢ ـ ٨) مكافئة للعلاقة:

$$g_1((\sigma_0 + 1) \,.\, 10^r) > h_1((\sigma_0 + 1) \,.\, 10^r) \text{ وَ } g_1(\sigma_0 \,.\, 10^r) < h_1(\sigma_0 \,.\, 10^r) \; (٢ ـ ٩)$$

هكذا نرى أنه بقدر ما يكون عدد حدود f التي يتألّف منها f_1 قليلاً، بقدر ما يسهل تحديد σ_0. إن فكرة الطوسي هذه تبرِّر إذن التعريف التالي:

تعريف: لنأخذ المعادلة (١ ـ ١) ولنفرض أن s هو أحد جذورها الموجبة.

نقول عن كثير حدود f_1 إنّه «مهيمن» بالنسبة إلى s عند تحقق الشروط التالية:

(أ) حدود f_1 هي حدود من f؛

(ب) (٢ ـ ٥) و (٢ ـ ٨) متعادلتان؛

(ج) لا يمكن اختصار f_1، بمعنى أننا إذا حذفنا أياً من حدود f_1، يصبح الشرط (ب) غير محقق.

عندما نكتب f_1 على شكل فرق $(g_1 - h_1)$ بين كثيري حدود بمعاملات موجبة g_1 وَ h_1، نقول عن g_1 و h_1 إنهما «مهيمنان بالنسبة إلى s».

ملاحظة ٢ ـ ٢: لنفرض أن g_1 و h_1 كثيرا حدود مهيمنان بالنسبة إلى s وان h_1 مُختَصَر إلى N، $(h_1 = N)$. في هذه الحالة تكتب (٢ ـ ٩) على الشكل التالي:

$$g_1(\sigma_0 \,.\, 10^r) < N < g_1((\sigma_0 + 1) \,.\, 10^r) \qquad (٢ ـ ١٠)$$

ولكي نبحث عن كثيري الحدود (g_1 وَ h_1) ينبغي أن نعود إلى المعادلة (١ ـ ١) وإلى الوسائط m_i، p_i و q_i التي أدخلناها في الفقرة الأولى. فإنّ معرفة المراتب العشرية للأعداد $|a_i \,.\, s^{n-i}|$، حيث $(a_i \neq 0)$، والمنازل العشرية لأرقامها، هي أساسية لتحديد كثيرات الحدود المهيمنة. لكن s مجهول، وكذلك المراتب العشرية للأعداد $|a_i \,.\, s^{n-i}|$ والمنازل العشرية للأرقام التي تؤلّفها. ولكي يحلّ هذه المسألة، يعمد الطوسي إلى مقارنة مراتب الوسائط. وقبل البدء بالمقارنة، وتسهيلاً لها، لنحقق التجانس ولنعتبر الـ $|a_i \,.\, s^{n-i}|$ كمجسمات [٣] عدد أبعادها n، يمكن كتابتها:

$$\left(|a_i|^{\frac{1}{i}}\right)^i \,.\, s^{n-i} \qquad (٢ ـ ١١)$$

حيث $(a_i \neq 0)$ وَ $(1 \leq i \leq n)$.

هذا يقودنا إلى مقارنة المراتب p_i للجذور الـ i إيّة (i ièmes) لِـ $|a_i|$ أي لِـ $(|a_i|^{\frac{1}{i}})$. فبمقارنة هذه المراتب الواحدة بالأخرى، بما فيها $p_n = P$، تنتج معلومات قيِّمة، ستظهر الفائدة منها في حالات عديدة، عند البحث عن كثيرات الحدود المهيمنة.

وينبغي الإشارة إلى أن هذه المقارنة التي تنتظم بموجبها المراتب المذكورة بحسب

---

(٣) فوق ـ مكعبات (hypercubes). (المترجم).

درجات كبرها، لا تمكِّن وحدها من فصل الحالات التي يتوجب مواجهتها. إن تعذّر فصل الحالات هذا يرجع بشكل رئيس إلى أن مختلف أرقام $|a_i|^{\frac{1}{i}}$ وَ s وبخاصة الأرقام الأولى تساهم أيضاً - ولو بدرجات متفاوتة - وبشبه استقلالية بعضها عن بعض، وبحسب درجات كبرها، بتشكيل مراتب المجسمات (٢ - ١١) وَ s^n ومراتب حاصل جمع أي مجموعة من بينها. إن هذه المساهمة تتعلق إذن بالمِثال المعالج حتى ولو فُرِضت على الـ p_i شروط ثابتة. مثال على ذلك: إذا كان r هو مرتبة s وكان $\sigma = 9$، تكون مرتبة s^n هي $(n-1) + nr$، إذا لم يكن n كبيراً جداً. وبالمقابل إذا كان $\sigma_0 = 1$، تكون مرتبة s^n هي nr فقط. وهذا الأمر يبقى صحيحاً بالنسبة إلى بقية المجسمات الواردة في (٢ - ١١).

وبالرغم من عدم إمكان فصل الحالات هذه، يتوجب علينا، مع الطوسي، مواجهة حالات عدة مصنّفة فقط بحسب درجات كبر الـ p_i. عندئذٍ نستطيع أن نبرهن أن هذه الحالات ليست منفصلة، بعكس ما كان يعتقده الطوسي، على ما يبدو، على الأقل في بداية «رسالته».

الحالة الأولى:

$$p > p_i \quad (1 \leq i \leq n-1) \qquad (٢ - ١٢)$$

هذه اللامتساويات تكافئ اللامتساويات التالية:

$$ip > ip_i + q_i = m_i \quad (1 \leq i \leq n-1) \qquad (٢ - ١٣)$$

كان الطوسي يعتقد، على ما يبدو، أن المجسمات (٢ - ١١) حيث $(1 \leq i \leq n-1)$ المتعلقة بـ $g(s)$ هي ذات مراتب عشرية أصغر من مرتبة s^n وأن المجسمات (٢ - ١١) المتعلقة بِـ $h(s)$ هي من مراتب عشرية أصغر من مرتبة N. يستنتج إذن أن s_0^n لا يتأتى إلا من أرقام الشريحة الأخيرة من N، أي أن x^n و N هما مهيمنان (بالنسبة إلى s). ولو لم نأخذ في الاعتبار ما أتينا على ذكره قبل قليل، بخصوص مساهمة أرقام s وَ $|a_i|^{\frac{1}{i}}$ في تشكّل مراتب المجسمات (٢ - ١١)، لَمِلْنا إلى استنتاج مماثل لاستنتاج الطوسي. لكن هذا الاستنتاج ليس صحيحاً دائماً. فالشروط (٢ - ١٢) التي يضعها الطوسي، غير كافية لإيجاد كثيرات الحدود المهيمنة، بشكل منهجي. فكثيرات الحدود هذه تتعلق بالمثال المعالج. فعندما يكون p أكبر «بما يكفي» من الـ p_i، يحصل من دون شك أن $(g_1(x) = x^n)$ وَ $(h_1(x) = N)$ هما مهيمنان. عندئذٍ نستطيع أن نبرهن أن $r = p$ وبأن σ_0 يتحدد بواسطة (٢ - ١٠) التي تعاد كتابتها في هذه الحالة على الشكل التالي:

$$(\sigma_0 \ . \ 10^r)^n < N < ((\sigma_0 + 1) \ . \ 10^r)^n \qquad (٢ - ١٤)$$

يبقى أن نحدد بالضبط المقصود بتعبير «بما يكفي» السابق ذكره. وهذا التحديد ليس في إمكاننا؛ فهو يختلف من معادلة إلى أخرى. لذلك سنعالج بصورة منهجية أنواع المعادلات التي درسها الطوسي مُقَدِّمين لكل نوع منها، أولاً المثال الذي قدّمه المؤلّف ومتبعينه من ثمّ بأمثلة معاكسة.

وكما سنرى، يقدِّمُ الطوسي أنواعاً ثمانية من المعادلات تحوي جميع المعادلات التي يكون فيها $c > 0$ (باستثناء المعادلة $x^3 - N = 0$ التي تعود لاستخراج الجذر التكعيبي لعدد ما). الأنواع السبعة الأولى لها جذر موجب واحد حكماً. أما المعادلات من النوع الثامن فلها جذرٌ موجبٌ على الأقل (انظر الملاحظة (٢ ـ ٣) في ما بعد). والأنواع الباقية هي إما معادلات يمكن إعادتها إلى معادلات من الدرجة الثانية، وإما معادلات يكون فيها $c > 0$ ويمكن إعادتها بواسطة تحويل أفيني للمتغيِّر، إلى معادلات تحويها الأنواع الثمانية السابقة (انظر الفقرة خامساً من هذا الفصل).

النوع ١: $x^3 + ax = N$؛ وهنا: $a_1 = 0$، $a_2 = a$، $a_3 = -N$.

(١) مثال الطوسي: $a = 36$، $N = 33087717$، $s = 321$.

في هذا المثال $p = 2$، $p_2 = 0$ (الصفر)، فيكون شرط الطوسي (٢ ـ ١٢) محققاً. نستطيع أن نبرهن أن x^3 وَ N مهيمنان، ونحصل، بمساعدة (٢ ـ ١٤) على $r = 2$ وَ $\sigma_0 = 3$.

(٢) $a = 832571$، $N = 1150770090$، $s = 790$.

هنا يكون: $p = 3$ وَ $p_2 = 2$، شرط الطوسي محقق. لو كان x^3 وَ N مهيمنين لحصل معنا $r = 3$، $\sigma_0 = 1$ وهذا خطأ. نلاحظ هنا أن كثير الحدود الوحيد المهيمن بالنسبة إلى الجذر $s = 790$ (إلى جانب N) هو: $g(x) = x^3 + ax$.

(٣) $a = 9999$، $N = 1006992000$، $s = 999$.

هنا يكون: $p = 3$؛ $p_2 = 1$؛ وشرط الطوسي محقق. لو كان x^3 و N مهيمنين لحصل $r = 3$، $\sigma_0 = 1$ وهذا خطأ.

النوع ٢: $x_3 = ax + N$.

وهنا: $a_1 = 0$ (الصفر) $a_2 = -a$، $a_3 = -N$.

(١) مثال الطوسي: $a = 963$، $N = 32767038$، $s = 321$.

في هذا المثال $p = 2$، $p_2 = 1$، شرط الطوسي محقق. نستطيع أن نبرهن أن x^3 وَ N مهيمنين في هذه الحالة، وبناءً على (٢ ـ ١٤) نحصل على $r = 2$، $\sigma_0 = 3$.

(٢) $a = 9999$، $N = 7284142$، $s = 211$.

وهنا $p = 2$، $p_2 = 0$ فشرط الطوسي مؤمَّن. ونستطيع أن نبرهن أنه لو كان x^3 وN مهيمنين لحصل معنا $r = 2$ و $\sigma_0 = 1$ وهذا خطأ.

(٣) $a = 99$، $N = 990100$، $s = 100$.

وهنا $p = 1$، $p_2 = 0$ (صفر)، شرط الطوسي محقق. لو كان x^3 و N مهيمنين لحصل معنا $r = 1$، $\sigma_0 = 9$ وهذا خطأ.

النوع ٣: $x^3 + ax^2 = N$.

وهنا $a_1 = a$، $a_2 = 0$.

(١) مثال الطوسي: $a = 30$، $N = 36167391$، $s = 321$.

وهنا $p = 2$؛ $p_1 = 1$ وشرط الطوسي محقق. نستطيع أن نبرهن أن x^3 و N مهيمنان وهذا ما يعطي $r = 2$ وَ $\sigma_0 = 3$.

(٢) $a = 90$، $N = 1852389$، $s = 99$.

وهنا $p = 2$، $p_1 = 1$ وشرط الطوسي مؤمّن. لو كان x^3 و N مهيمنين لحصل $r = 2$ وَ $\sigma_0 = 1$، وهذا خطأ.

النوع ٤: $x^3 = ax^2 + N$، $a_1 = a$، $a_2 = 0$.

(١) مثال الطوسي $a = 30$، $N = 29984931$، $s = 321$.

هنا $p = 2$، $p_1 = 1$ وشرط الطوسي محقق. نستطيع أن نبرهن أن x^3 و N هما بالفعل مهيمنان وهذا يعطي $r = 2$، $\sigma_0 = 3$.

(٢) $a = 99$، $N = 323341102$، $s = 721$.

هنا $p = 2$، $p_1 = 1$ وشرط الطوسي محقق. لو كان x^3 و N مهيمنين لكان $r = 2$ و $\sigma_0 = 6$ وهذا خطأ.

(٣) $a = 9$، $N = 910000$، $s = 100$.

هنا $p = 1$، $p_1 = 0$ وشرط الطوسي محقق. بالإمكان برهنة أنه لو كان x^3 و N مهيمنين، لكان $r = 1$ وَ $\sigma_0 = 9$ وهذا خطأ.

النوع ٥: $x^3 + ax^2 + bx = N$، $a_1 = a$، $a_2 = b$.

(١) مثال الطوسي: $a = 12$، $b = 102$، $N = 34345395$، $s = 321$.

هنا $p = 2$، $p_1 = 1$، $p_2 = 1$. شرط الطوسي إذن مؤمّن. نستطيع برهنة أن x^3 وN مهيمنان وهذا يعطي $r = 2$ و $\sigma_0 = 3$.

(٢) $a = 90$، $b = 1000$، $N = 1903552$، $s = 98$.

هنا $p = 2$، $p_1 = 1$، $p_2 = 1$، وشرط الطوسي محقق. لو كان x^3 و N مهيمنين لكان $r = 2$ وَ $\sigma_0 = 1$، وهذا خطأ.

(٣) $a = 90$، $b = 9999$، $N = 1037427020$، $s = 980$.

هنا $p = 3$، $p_1 = p_2 = 1$، وشرط الطوسي محقق. لو كان x^3 و N مهيمنين لَحصل معنا $r = 3$، $\sigma_0 = 1$ وهذا خطأ.

النوع ٦: $x^3 = ax^2 + bx + N$، $a_1 = -a$، $a_2 = -b$.

(١) مثال الطوسي: $a = 30$، $b = 600$، $N = 29792331$، $s = 321$.

وهنا $p = 2$، $p_1 = p_2 = 1$، شرط الطوسي محقق، ونستطيع أن نبرهن أن x^3 وN مهيمنان، وهذا يعطي $r = 2$، $\sigma_0 = 3$.

(٢) $a = 90$، $b = 1000$، $N = 23481471$، $s = 321$.

هنا أيضاً $p = 2$ وَ $p_1 = p_2 = 1$، وشرط الطوسي محقق. لكن، لو كان x^3 و N مهيمنان لكان $r = 2$ و $\sigma_0 = 2$ وهذا خطأ.

(٣) $a = 99$، $b = 987$، $N = 928314230$، $s = 1010$.

هنا $p = 2$، $p_1 = p_2 = 1$، وشرط الطوسي محقق. لو كان x^3 و N مهيمنين لكان $r = 2$ و $\sigma_0 = 9$ وهذا خطأ.

النوع ٧: $x^3 + ax^2 = bx + N$، $a_1 = a$، $a_2 = -b$.

(١) مثال الطوسي: $a = 30$، $b = 60$، $N = 36148131$، $s = 321$.

هنا $p = 2$، $p_1 = 1$، $p_2 = 0$، وشرط الطوسي مؤمّن. نستطيع أن نبرهن أن x^3 وَ N مهيمنان وهذا يعطي $r = 2$ و $\sigma_0 = 3$.

(٢) $a = 1$، $b = 9999$، $N = 26233284$، $s = 308$.

وهنا $p = 2$، $p = 0$، $p_2 = 1$، وشرط الطوسي محقق. لو كان x^3 و N مهيمنين لحصلنا على $r = 2$ و $\sigma_0 = 2$ وهذا خطأ.

(٣) $a = 95$، $b = 111$، $N = 1890405$، $s = 99$.

هنا $p = 2$، $p_1 = p_2 = 1$، وشرط الطوسي محقق. ولو كان x^3 وَ N مهيمنين لحصلنا على $r = 2$ وَ $\sigma_0 = 1$ وهذا خطأ.

النوع ٨: $x^3 + bx = ax^2 + N$، $a_1 = 0$، $a_2 = b$.

(١) مثال الطوسي: $a = 30$، $b = 300$، $N = 30081231$، $s = 321$.

هنا $p = 2$، $p_1 = p_2 = 1$، وشرط الطوسي محقق وَ x^3 و N مهيمنان وهذا يعطي $r = 2$، $\sigma_0 = 3$.

(٢) $a = 99$، $b = 100$، $N = 22907202$، $s = 321$.

وهنا $p = 2$، $p_1 = p_2 = 1$، وشرط الطوسي إذن محقق. لو كان x^3 و N مهيمنين لكان $r = 2$ و $\sigma_0 = 2$ وهذا خطأ.

(٣) $a = 99$، $b = 423$، $N = 929738330$، $s = 1010$.

هنا $p = 2$؛ $p_1 = p_2 = 1$، وشرط الطوسي محقق. ولو كان x^3 و N مهيمنين لحصلنا على $r = 2$، $\sigma_0 = 9$ وهذا خطأ.

الحالة الثانية:

(٢ ـ ١٥) يوجد جزء، A (غير فارغ) من المجموعة $\{1, 2, ..., n\}$ يحقق الشرطين التاليين:

$$\begin{cases} [i \in A \ , \ j \in A] \Longrightarrow p_i = p_j \\ \\ [i \in A \ , \ j \notin A] \Longrightarrow p_i > p_j \end{cases}$$

مع الملاحظة أن مكمل A في المجموعة المذكورة $\complement A$ يمكن أن يكون فارغاً.

هنا أيضاً، إذا لم نأخذ في الاعتبار ما ذكرناه في الحالة الأولى، قد ينتج لدينا ميل إلى الاعتقاد بأن كثير الحدود هو المؤلف من الحدود $a_i \cdot x^{n-i}$ حيث $a_i \in A$ هو مهيمن. لكن، كما سبق أن ذكرنا، كان موقف الطوسي بشأن هذه النقطة، ينقصه الوضوح. فقد وصل إلى حد تأكيد غياب قاعدة عامة بهذا الخصوص. وسوف نبين، بالفعل، أن هذه الشروط لا تؤدي إلى أي قانون عام في مجال البحث عن كثيرات الحدود المهيمنة. سنتابع إذن تفحّص الأنواع التي درسها الطوسي. الشروط (٢ ـ ١٥) التي وضعها تحققها الأمثلة التي عالجها. لكن، هنا أيضاً، تُظهِر الأمثلة المعاكسة التي سنقدّمها أن هذه الشروط غير كافية.

النوع ١: $x^3 + ax = N$، $a_1 = 0$، $a_2 = a$، $a_3 = -N$.

من البديهي أن N هو، حكماً، مهيمن في مثل هذه المعادلة، فما علينا سوى البحث عن كثير الحدود المهيمن الآخر.

(١) مثال الطوسي: $a = 1203321$، $N = 419342202$، $s = 321$.

هنا $p = 2$، $p_2 = 3$؛ $A = \{2\}$ يحقق شرط الطوسي (٢ ـ ١٥) وَ ax مهيمن. يحدد الطوسي r على أنه المرتبة العشرية لِـ $[N/a]$(٤) ويحدد σ_0 بواسطة العلاقة:

$$a \,.\, \sigma_0\, 10^r \leq N < a \,.\, (\sigma_0 + 1)\, 10^r \qquad (٢ ـ ١٦)$$

ويجد $r = 2$ وَ $\sigma_0 = 3$.

(٢) $a = 1000000$، $N = 994432000$، $s = 680$.

وهنا $p = 2$، $p_2 = 3$. المجموعة $A = \{2\}$ تحقق شروط الطوسي، لكن ax ليس مهيمناً. وبينما r يساوي المرتبة العشرية لِـ $[N/a]$ وهي 2، نجد أن (٢ ـ ١٦) تعطي $\sigma_0 = 9$، وهذا خطأ.

(٣) $a = 100000$، $N = 11130301$، $s = 101$.

هنا $p = p_2 = 2$؛ $A = \{2, 3\}$ تحقق شروط الطوسي و ax مهيمن؛ a و N يحدّدان r و σ_0 كما في المثل الأول.

(٤) $a = 200000$، $N = 348981000$، $s = 610$.

هنا $p = p_2 = 2$؛ $A = \{2, 3\}$ تحقق شروط الطوسي إلا أن ax ليس مهيمناً. ومن السهل رؤية أن a و N وحدهما لا يحدّدان r كما لا يحدّدان σ_0. وكثير الحدود المهيمن في هذا المثل هو $g(x) = x^3 + ax$.

(٥) $a = 100000$، $N = 61180231$، $s = 311$.

هنا $p = p_2 = 2$، والمجموعة $A = \{2, 3\}$ تحقق شروط الطوسي؛ ax ليس مهيمناً؛ وx^3 وحده (من دون ax) مهيمن. ونلاحظ أن a وَ N يحدّدان r.

النوع ٢: $x^3 = ax + N$، $a_1 = 0$، $a_2 = -a$، $a_3 = -N$.

في هذا النوع، x^3 مهيمن، حكماً، فما علينا سوى التفتيش عن كثير الحدود المهيمن الآخر.

(١) مثال الطوسي: $a = 102021$، $N = 237420$، $s = 321$.

هنا $p = 1$، $p_2 = 2$؛ $A = \{2\}$. تحقق شروط الطوسي وax مهيمن في هذه الحالة حيث يحدد الطوسي r و σ_0 بالعلاقتين:

$$\sigma_0 \,.\, 10^{3r} < a \,.\, \sigma_0 \,.\, 10^r \qquad \text{وَ} \qquad (\sigma_0 + 1)^3\, 10^{3r} > a((\sigma_0 + 1) \,.\, 10^r)$$

---

(٤) $E_{(n)} = [n]$ هو الجزء الصحيح من أي عدد n.

اللتين تختصران في هذه الحالة بالعلاقة:

$$\sigma_0^2\ 10^{2r} < a < (\sigma_0+1)^2\ 10^{2r} \qquad (٢ \text{ - } ١٧)$$

(٢) $a = 39999$، $N = 954142$، $s = 211$.

هنا $p = 1$، $p_2 = 2$. $A = \{2\}$ تحقق شروط الطوسي، بينما ax ليس مهيمناً، وإذا طبقنا (٢ ـ ١٧) كما فعل الطوسي في المثل السابق نحصل على $\sigma_0 = 1$ وهو خطأ. وكثير الحدود المهيمن هنا هو $h(x) = ax + N$.

(٣) $a = 10000$، $N = 160875000$، $s = 550$.

هنا $p = p_2 = 2$. $A = \{2, 3\}$ تحقق شروط الطوسي. يمكن أن نرى أن N مهيمن وأننا نحصل على r و σ_0 من (٢ ـ ١٤).

(٤) $a = 10001$، $N = 2112110$، $s = 154$.

هنا $p = p_2 = 2$. $A = \{2, 3\}$ تحقق شروط الطوسي لكن ax وحده (من دون N) مهيمن. كما أن N وحده مهيمن.

النوع ٣: $x^3 + ax^2 = N$؛ $a_1 = a$، $a_2 = 0$، $a_3 = -N$.

بالنسبة إلى هذا النوع أيضاً، N مهيمن، حكماً.

(١) مثال الطوسي: $a = 3000$، $N = 342199161$، $s = 321$.

في هذا المثال $p = 2$، $p_1 = 3$. $A = \{1\}$ تحقق شروط الطوسي وax^2 هو فعلاً مهيمن و r و σ_0 يتحددان إذن بالعلاقة:

$$a\ \sigma_0\ 10^{2r}\ \leq\ N\ <\ a(\sigma_0+1)^2\ 10^{2r} \qquad (٢ \text{ - } ١٨)$$

التي تعطي $r = 2$، $\sigma_0 = 3$. لكننا نلاحظ بأن الطوسي، في هذا المثال، استعمل كثير الحدود $(g(x) = x^3 + ax^2)$ بكامله لاحتساب r وَ σ_0.

(٢) $a = 1000$، $N = 10771299$، $s = 99$.

هنا $p = 2$، $p_1 = 3$. $A = \{1\}$ يحقق شروط الطوسي. لكنّ ax^2 ليس مهيمناً، فاستناداً إلى (٢ ـ ١٨) نجد هنا $r = 2$ و $\sigma_0 = 1$ وهذا خطأ. كثير الحدود المهيمن هنا هو $(g(x) = x^3 + ax^2)$.

(٣) $a = 100$، $N = 360672000$، $s = 680$.

هنا $p = p_1 = 2$. $A = \{1, 3\}$ تحقق شروط الطوسي لكن ax^2 ليس مهيمناً، فاستناداً إلى (٢ ـ ١٨) نجد $r = 3$ و $\sigma_0 = 1$، وهذا خطأ.

(٤) $a = 10$، $N = 331056$، $s = 66$.

هنا $p = p_1 = 1$. $A = \{1,\ 3\}$ يحقق شرط الطوسي، لكن ax^2 ليس مهيمناً؛ المهيمن هو x^3.

النوع ٤: $x^3 + ax^2 = N$؛ $a_1 = -a$، $a_2 = 0$، $a_3 = N$.

نلاحظ أولاً أن x^3 مهيمن في هذا النوع من المعادلات.

(١) مثال الطوسي: $a = 312$، $N = 927369$، $s = 321$.

هنا $p = 1$، $p_1 = 2$. $A = \{1\}$ يحقق شروط الطوسي و ax^2 مهيمن بالفعل. ويحدد الطوسي r و σ_0 بالعلاقة:

$$\sigma_0^3\ 10^{3r} < a\ \sigma_0^2\ 10^{2r} \quad \text{وَ} \quad (\sigma_0+1)^3 10^{3r} > a(\sigma_0+1)^2 10^{2r}$$

التي تؤول في مثالنا إلى:

$$\sigma_0\ 10^r < a < (\sigma_0 + 1)\ 10^r \qquad (\text{٢ ـ ١٩})$$

وهذا يعني أن σ_0 هو الرقم الأول من a.

(٢) $a = 299$، $N = 181202$، $s = 301$.

هنا $p = 1$، $p_1 = 2$. $A = \{1\}$ تحقق شروط الطوسي، لكن ax^2 ليس مهيمناً. فلو طبقنا (٢ ـ ١٩) في هذا المثال لحصل $\sigma_0 = 2$، وهذا خطأ.

(٣) $a = 10$، $N = 604032$، $s = 88$.

هنا $p = p_1 = 1$؛ $A = \{1,\ 3\}$ تحقق شروط الطوسي، لكن ax^2 (وحده) ليس مهيمناً، لكننا نستطيع أن نبرهن أن N مهيمن.

النوع ٥: $x^3 + ax^2 + bx = N$؛ $a_1 = a$، $a_2 = b$، $a_3 = -N$.

نلاحظ أن N مهيمن في هذا النوع.

(١) مثال الطوسي: $a = 6$، $b = 3000000$، $N = 996694407$، $s = 321$.

هنا $p = 2$، $p_1 = 0$، $p_2 = 3$. $A = \{2\}$ تحقق شروط الطوسي و bx مهيمن. يحدد الطوسي r على أنّه المرتبة العشرية لِ $[N/b]$. ومن دون أن يذكر ذلك صراحة، يبدو أنه يحدّد σ_0 بالعلاقة:

$$b.\sigma_0\ 10^r \le N < (b+1)\ \sigma_0\ 10^r \qquad (\text{٢ ـ ٢٠})$$

(٢) $a = 999$، $b = 1500000$، $N = 823840000$، $s = 400$.

هنا $p = 2$، $p_1 = 2$، $p_2 = 3$. $A = \{2\}$ تحقق شروط الطوسي، لكن bx ليس مهيمناً. فلو طبقنا (٢ ـ ٢٠) لحصلنا على $r = 2$ و$\sigma_0 = 5$، وهذا خطأ (جزئياً).

(٣) $a = 999$، $b = 1000000$، $N = 109761498$، $s = 99$.

هنا $p = 2$، $p_1 = 2$، $p_3 = 3$. $A = \{2\}$ نحقق شروط الطوسي، لكن bx ليس مهيمناً، فمرتبة $[N/b]$ هي 2 وهي تختلف عن $r = 1$، وَ (٢ ـ ٢٠) لا يمكن تحقيقها.

(٤) مثال الطوسي: $a = 30000$، $b = 30$، $N = 3124315791$، $s = 321$.

هنا $p = 3$، $p_1 = 4$، $p_2 = 0$. $A = \{1\}$ يحقق شروط الطوسي وَ ax^2 مهيمن بالفعل. يحدد الطوسي r على أنه المرتبة العشرية لِـ $[N/a]^{\frac{1}{2}}$،وهذا يعطي $r = 2$. ومن دون أن يعبّر بصراحة، يبدو أنه يحدد σ_0 بواسطة العلاقة:

$$a.\sigma_0^2 10^{2r} < N < a\ (\sigma_0 + 1)^2\ 10^{2r} \qquad (٢ ـ ٢١)$$

ممّا يعضي $\sigma_0 = 3$.

(٥) $a = 1000$، $b = 9999$، $N = 44858810$، $s = 190$.

هنا $p = 2$، $p_1 = 3$، $p_2 = 1$. $A = \{1\}$ تحقق شروط الطوسي، لكن ax^2 ليس مهيمناً. يتحدّد $r = 2$ بواسطة N وَ a؛ لكن تطبيق (٢ ـ ٢١) يعطي $\sigma_0 = 2$، وهذا خطأ.

(٦) $a = 100$، $b = 10000$، $N = 694407$، $s = 43$.

هنا $p = 1$، $p_1 = p_2 = 2$. $A = \{1, 2\}$ تحقق شروط الطوسي و $(ax^2 + bx)$ هو بالفعل مهيمن.

(٧) $a = 100$، $b = 10000$، $N = 605151000$، $s = 810$.

هنا $p = p_1 = p_2 = 2$. $A = \{1, 2, 3\}$ تحقق شروط الطوسي، لكن $(ax^2 + bx)$ ليس مهيمناً، بينما بإمكاننا برهان هيمنة x^3.

(٨) $a = 100$، $b = 10000$، $N = 3641000$، $s = 110$.

هنا $p = p_1 = p_2 = 2$. $A = \{1, 2, 3\}$ تحقق شروط الطوسي و $(ax^2 + bx)$ مهيمن. وبالإمكان برهان أن x^3 هو أيضاً مهيمن ويعطي $r = 2$ و $\sigma_0 = 1$.

النوع ٦: $x^3 = ax^2 + bx + N$؛ $a_1 = -a$؛ $a_2 = -b$؛ $a_3 = -N$.

نضع

$$h(x) = ax^2 + bx + N,$$

ونلاحظ أن x^3 هو هنا مهيمن، بالضرورة. نبدأ أولاً بشرح تفكير الطوسي بخصوص هذا النوع، هذا التفكير الذي يؤول إلى ما يلي:

لدينا

$$s^3 = as^2 + bs + N,$$

وهذا يعني أنّ

$$as^2 = \lambda\ s^3 = (\lambda s)\ s^2,$$
$$bs = \mu\ s^3 = (\mu s)\ s^2,$$
$$N = \gamma\ s^3 = (\gamma s)\ s^2,$$

حيث

$$\lambda + \mu + \gamma = 1;$$

ممّا يعطي

$$s = \lambda s + \mu s + \gamma s.$$

ويبيّن الطوسي أنّ:

$$E[\gamma s/10^r] = \sigma_0 \Longrightarrow p > p_1\ ,\ p > p_2\ ; \qquad (٢ \text{ - } ٢٢)$$

$$E[\mu s/10^r] = \sigma_0 \Longrightarrow p_2 > p\ ,\ p_2 > p_1\ ;$$

$$E[\lambda s/10^r] = \sigma_0 \Longrightarrow p_1 > p\ ,\ p_1 > p_2\ ;$$

حيث $E[x]$ تشير إلى الجزء الصحيح من العدد x؛ ويستنتج أن الحدود، N، bx أو ax^2 تكون مهيمنة (بالتالي) عندما تكون العلاقات في المعادلة (٢ ـ ٢٢) صحيحة. لكن s مجهول وكذلك الأجزاء γs، μs، λs، وبالتالي، لا نملك أية معلومة مسبقة عنها. لكن p، p_1 و p_2 معروفة. هذا ما يجعل المعادلة (٢ ـ ٢٢) أكثر ملاءمة إذا كتبت على الشكل التالي:

$$(p \leq p_1 \text{ أو } p \leq p_2) \Longrightarrow E[\gamma s/10^r] < \sigma_0\ ; \qquad (٢ \text{ - } ٢٢')$$

$$(p_2 \leq p \text{ أو } p_2 \leq p_1) \Longrightarrow E[\mu s/10^r] < \sigma_0\ ;$$

$$(p_1 \leq p \text{ أو } p_1 \leq p) \Longrightarrow E[\lambda s/10^r] < \sigma_0\ .$$

فإذا كان $p \geq p_1$ وَ $p \geq p_2$، نحصل، استناداً إلى (٢ ـ ٢٢)َ، على:

$$E[\lambda s/10^r] < \sigma_0 \text{ وَ } E[\mu s/10^r] < \sigma_0$$

من دون أن نحصل على $E[\gamma s/10^r] = \sigma_0$. ويمكننا إبداء ملاحظات مشابهة في الحالة

($p_1 \geq p_2$ و $p_1 \geq p$) كما في الحالة ($p_2 > p_1$ و $p_2 > p$). وهذا ما يبدو أن الطوسي لم يلاحظه. وفي ما يلي من الأمثلة تتضح هذه الوضعيات التي أشرنا إليها.

(١) مثال الطوسي: $a = 99$، $b = 70200$، $N = 340902$، $s = 321$.

هنا $p = 1$، $p_1 = 1$، $p_2 = 2$. $A = \{2\}$ تحقق شروط الطوسي. لكن الطوسي لا يعتبر bx مهيمناً سوى بشكل جزئي. فهو يعتبر أن b تحدّد r على أساس أن r هو مرتبة $b^{\frac{1}{2}}$ ـ وهذا ليس صحيحاً بشكل عام كما سنرى في المثال ٢ ـ لكن b لا تحدد σ_0. فتحديد σ_0 يَعتمد أولاً على تحديد σ':

$$\sigma'^2 \,.\, 10^{2r} < b < (\sigma' + 1)^2 \,.\, 10^{2r}$$

وإذا كان $(\sigma' + 1)$ يحقق:

$$\sigma^3 10^3 > h(\sigma 10^r)$$

يأخذ $\sigma_0 = (\sigma' + 1)$ وإلا، إذا كانت σ' تحقق اللامتساوية السابقة، يأخذ $\sigma_0 = \sigma'$، وإلا فيجرّب $\sigma' - 1$، وهكذا دواليك. ولنلاحظ هنا أن bx ليس مهيمناً، وهذا ما يؤكده الطوسي بحق.

(٢) $a = 9$، $b = 9285$، $N = 707$، $s = 101$.

هنا $p = 0$، $p_1 = 0$، $p_2 = 1$. $A = \{2\}$ تحقق شروط الطوسي، لكن مرتبة $b^{\frac{1}{2}}$ تساوي 1 وهي بالتالي مختلفة عن $r = 2$ (راجع المثال السابق) وهو ما يظهر أن bx ليس مهيمناً.

(٣) $a = 9$، $b = 100000$، $N = 48792$، $s = 321$.

هنا $p = 1$، $p_1 = 0$، $p_2 = 2$. المجموعة $A = \{2\}$ تحقق شروط الطوسي. بالإمكان تبيُّن أن bx مهيمن ويحدد r و σ_0.

(٤) مثال الطوسي: $a = 300$، $b = 6000$، $N = 237861$، $s = 321$.

هنا $p = 1$، $p_1 = 2$، $p_2 = 1$. $A = \{1\}$ تحقق شروط الطوسي؛ ax^2 مهيمن ويحدّد الطوسي r وَ σ_0 بـ:

$$\sigma_0^3 \, 10^{3r} < a\sigma_0^2 \, 10^{2r} \quad \text{وَ} \quad (\sigma_0 + 1)^3 \, 10^{3r} > a(\sigma_0 + 1)^2 \, 10^{2r}$$

وهذه العلاقة تؤول إلى العلاقة:

$$\sigma_0 \, 10^r \leq a < (\sigma_0 + 1) \, 10^r \qquad (٢ ـ ٢٣)$$

التي ينتج منها أن r هو مرتبة a وأن σ_0 هو أول رقم من a، أي الرقم 3.

(٥) $a = 899$، $b = 9554$، $N = 414960$، $s = 910$.

هنا $p = 1$، $p_1 = 2$، $p_2 = 1$. المجموعة $A = \{1\}$ تحقق شروط الطوسي، لكن (٢ ـ ٢٣) لا تنطبق هنا وَ ax^2 ليس مهيمناً.

(٦) $a = 350$، $b = 117000$، $N = 336000$، $s = 560$.

هنا $p = 1$، $p_1 = 2$، $p_2 = 2$. $A = \{1, 2\}$ تحقق شروط الطوسي، ونستطيع تبيُّن أن $(ax^2 + bx)$ مهيمن.

(٧) $a = 560$، $b = 10750$، $N = 493000$، $s = 580$.

هنا $p = 1$، $p_1 = p_2 = 2$. $A = \{1, 2\}$ تحقق شروط الطوسي، بينما ax^2 هو كثير حدود مهيمن.

النوع ٧: $x^3 + ax^2 = bx + N$؛ $a_1 = a$، $a_2 = -b$، $a_3 = -N$.

(١) مثال الطوسي: $a = 3$، $b = 102000$، $N = 643284$، $s = 321$.

هنا $p = 1$، $p_1 = 0$، $p_2 = 2$. $A = \{2\}$ تحقق شروط الطوسي. نلاحظ فوراً مع الطوسي أن x^3 و bx مهيمنان. نستطيع إذن تحديد σ_0 وَ r بواسطة (٢ ـ ١٧) بإحلال b مكان a، وهذا ما يعطي $\sigma_0 = 3$ و $r = 2$.

(٢) $a = 999$، $b = 1000000$، $N = 326514900$، $s = 790$.

هنا $p = 2$، $p_1 = 2$، $p_2 = 3$. $A = \{2\}$ تحقق شروط الطوسي، لكن بالإمكان أن نبرهن أن x^3 و bx ليسا مهيمنين، كما أن ax^2 و bx غير مهيمنين. ولا نستطيع تطبيق العلاقة التي استخدمها الطوسي في المثال السابق.

(٣) مثال الطوسي: $a = 3000$، $b = 300$، $N = 342102861$، $s = 321$.

هنا $p = 2$، $p_1 = 3$، $p_2 = 1$. $A = \{1\}$ تحقق شروط الطوسي، ومن الواضح أن ax^2 و N ميهمنين.

في هذا المثال r هو بالنسبة إلى الطوسي المرتبة العشرية للعدد $E(N/a)^{\frac{1}{2}}$، لكنه لا يشرح بوضوح طريقته لتحديد σ_0. ونلاحظ أيضاً أن x^3 و N مهيمنان، ويبدو أن هذين الحدين هما اللذان يسمحان للطوسي بتحديد σ_0.

(٤) $a = 100$، $b = 9999$، $N = 133070$، $s = 70$.

هنا $p = 1$، $p_1 = 2$، $p_2 = 1$. $A = \{1\}$ تحقق شروط الطوسي. نلاحظ أن ax^2 و N غير مهيمنين وأنّ x^3 و N كذلك غير مهيمنين.

النوع ٨: $x^3 + bx = ax^2 + N$؛ $a_1 = -a$، $a_2 = b$، $a_3 = -N$.

(١) مثال الطوسي: $a = 30$، $b = 3.10^6$، $N = 992984931$، $s = 321$.

هنا $p = 2$، $p_1 = 1$، $p_2 = 3$. $A = \{2\}$ تحقق شروط الطوسي. نلاحظ أن bx و N مهيمنان. نستطيع، إذن، أن نحدد σ_0 و r بواسطة $E(N/b)$ حيث نجد $\sigma_0 = 3$ و $r = 2$.

(٢) $a = 99$، $b = 10^4$، $N = 175602$، $s = 21$.

هنا $p = 1$، $p_1 = 1$، $p_2 = 2$. $A = \{2\}$ تحقق شروط الطوسي، لكن بالإمكان أن نبرهن أن bx و N غير مهيمنين، كما أن bx وَ ax^2 غير مهيمنين.

(٣) مثال الطوسي: $a = 321$، $b = 300$، $N = 96300$، $s = 321$.

هنا $p = 1$، $p_1 = 2$، $p_2 = 1$. $A = \{1\}$ تحقق شروط الطوسي. نلاحظ أن ax^2 وx^3 مهيمنان؛ ونستطيع تحديد σ_0 و r بواسطة a، حيث نجد $\sigma_0 = 3$ و $r = 2$.

(٤) $a = 199$، $b = 999$، $N = 239800$، $s = 200$.

هنا $p = 1$، $p_1 = 2$، $p_2 = 1$. $A = \{1\}$ تحقق شروط الطوسي. بالإمكان أن نبرهن أن ax^2 و x^3 غير مهيمنين.

ملاحظة ٢ ـ ٣:

١ ـ بعد أن أكّد الطوسي أنه في حال $A = \{i\}$ يكون $a_i x^{n-i}$ مهيمناً، يبدو أنه تنبّه إلى أن المعطيات نفسها يمكن أن تؤدي إلى حالات مختلفة، وذلك بحسب المثل المطروح للمعالجة، حيث كتب: «وهذه الأشياء وإن كانت من خواص هذه التقديرات، لكن المطلوب الخارج من هذه المسألة: فلا يتعيّن أن يكون إما مطلوب الكعب للعدد وإما أحد مطلوبي القسمة في أحد المسطّحين، بل في كل واحدة من الصور، يحتمل أن يكون أزيد من آخر الجذر ويحتمل أن يكون أنقص، فنحتاج في استخراجه إلى زيادة استقصاء» (ص ١٠٦ سطر ١٢ ـ ١٦ من نص رسالة الطوسي حول المعادلات (١ ـ ٢٠)).

٢ ـ المعادلة من النوع ٨ يمكن أن تحوز على جذر واحد أو على ثلاثة جذور موجبة. وجرياً على عادته لا يأخذ الطوسي بالاعتبار سوى حالة الجذر الواحد.

ثالثاً: تحديد الأرقام الأخرى للجذر ومخطط احتسابها

لِنَعُدْ الآن إلى المفهوم الذي أدخلناه في الفقرة الأولى. بعد أن يحدّد الطوسي σ_0، يرمي إلى تحديد استقرائي لمتوالية، (E_k)، من المعادلات الكثيرة الحدود، بواسطة الصيغ التالية:

$$(E_0) \qquad f_0(x) = f(x) = 0,$$

$$(E_k) \qquad f_k(x) = f_{k-1}(x + s_{k-1}) = 0, \quad (1 \le k \le r).$$

نستطيع أن نتحقق فوراً من أن جذور f_k حيث $(1 \le k \le r)$ هي نفسها جذور f_{k-1} بإنقاص s_{k-1} من كل جذرٍ منها. إن جذور (E_k) هي إذن جذور (E_0) بإنقاص $(s_0 + s_1 + ... + s_{k-1})$ من كل منها. ومن جهة أخرى، من البديهي أن s_r جذر للمعادلة (E_r).

وقد رأينا أن بالإمكان، بشكلٍ أو بآخر، إيجاد σ_0 وَ r وبالتالي s_0، انطلاقاً من (E_0). لنفرض أنّه، انطلاقاً من (E_i)، بالإمكان تحديد σ_i، $(1 \le i \le k-1)$. ولنبرهن أن بالإمكان حينئذٍ تحديد σ_k انطلاقاً من (E_k)؛ (ونكون بهذا قد برهنّا (استقرائياً) أن بالإمكان تحديد σ_0، σ_1 . . . و σ_r).

والبرهان يأتي من كَوْن:

$$s_k + ... + s_r = s - (s_0 + s_1 + ... + s_{k-1})$$

هو جذر للمعادلة E_k وأن أول أرقامه (العشرية) هو σ_k؛ لذلك يمكن تحديد σ_k بتطبيق نتائج الفقرة السابقة على f_k.

إنّ توسيع تايلور لكثير الحدود $f_{k-1}(x + s_{k-1}) = f_k(x)$، يعطي المعادلة (E_k) الشكل التالي:

$$x^n + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f_{k-1}^{(n-1)}(s_{k-1}) + ... + x f_{k-1}^{(0)}(s_{k-1}) + f_{k-1}(s_{k-1}) = 0 \; .$$

وغالباً[٥] ما يشكِّل الحدان الأخيران، كثير حدود مهيمناً، الأمر الذي يسمح بتحديد s_k بالعلاقة:

$$s_k = [-f_{k-1}(s_{k-1}) / f_{k-1}^{(1)}(s_{k-1})] \qquad (٣ \text{ـ} ١)$$

وهي صيغة كان الطوسي يطبّقها منهجياً عندما يكون $k > 0$.

يمكن إذن تلخيص مسار الطوسي بما يلي: «المعادلة (E_0) تسمح، في مرحلة أولى، باحتساب s_0، أي σ_0. بعد ذلك وبشكل استقرائي، نشكِّل، في مرحلة ثانية، المعادلات (E_k)، $1 \le k \le r$ الأمر الذي يسمح باحتساب الـ σ_k تتابعاً، وإجمالاً بواسطة (٣ ـ ١).

لكن، ولكي يكون هذا المسعى فعّالاً، ينبغي إيجاد خوارزمية تساعد على التشكيل الاستقرائي للمعادلات (E_k). إن خوارزمية من هذا النوع، يجب أن تسمح باحتساب معاملات (E_k) انطلاقاً من معاملات (E_{k-1}). إنّها، كما سنرى، الطريقة الشهيرة المعروفة بخوارزمية روفيني ـ هورنر.

---

(٥) ولكن بالإمكان وبسهولة، إيجاد أمثلة معاكسة، مثلاً:

$$x^3 + 30x^2 - 1200x - 9153 = 0 \; ; \; (s = 27).$$

نُذكّر بإيجاز، بأن هذه الطريقة هي خوارزمية تسمح باحتساب منهجي، بالشكل الأبسط والأسرع[٦]، لمعاملات معادلة يكون جذورها جذور معادلة أخرى، بإنقاص عدد ثابت من كل منها. نستطيع تطبيق هذا المخطط على معادلتنا لننقص من أحد جذورها رقمه الأول؛ ونطبّقه مرة ثانية لننقص من جذر المعادلة الجديدة، رقمه الأول، أي الرقم الثاني من جذر المعادلة الأساسية (التي سبق أن تعاملنا معها)، وهكذا دواليك.

لنأخذ، انتقالاً إلى الفِعل، المعادلة كثيرة الحدود

$$F(x) = A_0x^N + A_1x^{N-1} + ... + A_{N-1}x + A_N = 0 \quad (٣ - ٢)$$

ولنأخذ عدداً ثابتاً Δ. عن طريق اعتماد تبديل المتغيرات $x \to x + \Delta$ تُكتب المعادلة (٣ - ٢) على الشكل التالي:

$$\frac{x^N}{N!}F^{(N)}(\Delta) + \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} \cdot F^{(N-1)}(\Delta) + ... + \frac{x}{1!}F^{(1)}(\Delta) + F(\Delta) = 0 \quad (٣ - ٣)$$

وإذا ما سمّينا، لكلّ i، حيث $(0 \leq i \leq n)$:

$$B_i = \frac{1}{(N-i)!}F^{(N-i)}(\Delta) \quad (٣ - ٤)$$

يكون

$$B_0 = \frac{1}{N!}F^{(N)}(\Delta) = A_0.$$

ومن البديهي أن جذور المعادلة (٣ - ٣) هي جذور المعادلة (٣ - ٢) بإنقاص Δ من كل منها (أي من كلٍّ من هذه الجذور).

إنّ المخطط البياني التالي يسمح بالتشكيل المنهجي لكلّ عناصره الأخرى انطلاقاً من عناصر الخط الأفقي الأول وهي معاملات (٣ - ٢). إن العناصر التي تحتاج إلى تحديد في هذا المخطط البياني هي الـ $B_{i,k}$. كلّ من هذه العناصر $B_{i,k}$ هو مجموع العنصرين اللذين يقعان فوقه مباشرة. وبالإمكان التحقق من أن معاملات المعادلة (٣ - ٣) ليست سوى عناصر القطر المائل الأيمن (Diagonale) لهذا المخطط:

$$B_0 = \frac{1}{N!}f^{n}(\Delta) = A_0,$$
$$B_i = B_{N-i,i} = \frac{1}{(N-i)!}F^{(N-i)}(\Delta),$$
$$1 \leq i \leq N;$$

إن N، Δ والمعاملات A_0، . . .، A_n الخاصة بالمعادلة (٣ - ٢) تُسمى «مداخل» المخطط البياني وتسمّى B_0، . . .، B_N «مخارج» هذا المخطط.

(٦) «الأكثر اقتصادية»، بالمعنى المعلوماتي الحديث. (المترجم).

A_o	A_1	A_2	$\dots A_{N-1}$	A_N
	$\frac{\Delta A_o}{B_{o,1}}$	$\frac{\Delta B_{o,1}}{B_{o,2}}$	$\frac{\Delta B_{o,N-2}}{B_{o,N-1}}$	$\frac{\Delta B_{o,N-1}}{B_{o,N} = B_N}$
	$\frac{\Delta A_o}{B_{1,1}}$	$\frac{\Delta B_{1,1}}{B_{1,2}}$	$\frac{\Delta B_{1,N-2}}{B_{1,N-1} = B_{N-1}}$	
	....	....	....	
	$B_{N-2,1}$			
	$\frac{\Delta A_o}{B_{N-1,1} = B_1}$			
$A_o = B_o$				

نرمز إلى المخطط السابق بـ:

$$^{(٧)}SCH(N;\ \Delta;\ A_0,\ \dots,\ A_N)$$

ويستحسن أن نرمز إليه بكل بساطة بـ SCH إذا كنا لا نخشى أي اختلاط في المعنى. كما نشير بـ

$$SCH(n; \delta;\ c_0,\ c_1,\ \dots,\ c_n)$$

إلى المخطط الذي ينتج عنه عندما يكون $N = n$، $\Delta = \delta$ و $A_i = c_i$ لأجل كل i حيث $(1 \le i \le m)$.

لِنَعُدْ الآن إلى المعادلات (E_k) حيث $1 \le k \le r$ ولنسمِّ $a_{i,k}$ $(1 \le i \le n)$ معاملات المعادلة (E_k). لكي نشكِّل هذه المعادلات نطبِّق المخطط البياني السابق، مع المعطيات التالية:

$$A_i = a_i \ \text{،}\ \Delta = s_0 \ \text{،}\ N = n$$

حيث الـ a_i هي معاملات $f_0(x)$، أي معاملات المعادلة (١ ـ ١). نحصل إذن على الكرّة (0)، الصفر[٨]. المخارج هنا هي المعاملات $a_{i,1}$ للمعادلة (E_1)، الأمر الذي يسمح باحتساب σ_1. ومن البديهي أننا بحاجة إلى $(r-1)$ كرّة من هذا النوع، حيث تكون المداخل في الكرّة رقم k، $(1 \le k \le r-1)$:

$$\Delta = s_k \quad \text{،} \quad N = n$$

---

(٧) SCH هي الأحرف الأولى من «Schéma»، أي من عبارة «مخطط بياني».

(٨) وهي الكرّة الأولى.

بالإضافة إلى مخارج الكرّة رقم $(k-1)$، أي المعاملات $a_{i,k}$ التي تخص المعادلة (E_k)، المخارج التي نحصل عليها هي معاملات المعادلة (E_{k+1}): وهو ما يسمح باحتساب σ_{k+1}. هكذا يكون لدينا الخوارزمية التالية:

ALG-1[٩]:

الخطوة ١:

- تشكيل SCH_0: $SCH_0 = SCH(n;\ s_0;\ a_0,\ \dots,\ a_n)$

- تشكيل (E_1) واحتساب σ_1.

الخطوة ٢:

- ابتداءً من $(k=1)$ وحتى $k=(r-1)$، تشكيل SCH_k:

$$SCH_k = SCH(n;\ s_k;\ a_{0,k},\ a_{1,k},\ \dots,\ a_{n,k})$$

- تشكيل (E_{k+1}) واحتساب σ_{k+1}.

ملاحظة ٣ ـ ١: استخراج الجذر النوني لعدد صحيح: الطريقة التي سنعرضها بإيجاز في هذه الفقرة، كان يطبقها الرياضيون في نهاية القرن العاشر لاستخراج الجذر التكعيبي ومن ثم لاستخراج الجذر النوني، أي لحل المعادلة:

$$x^n - N = 0$$

ويبدو أن طريقة الطوسي[١٠] هي تعميم لهذه الطريقة.

لنفرض أن s هي الجزء الصحيح من $N^{\frac{1}{n}}$ وأن (s_i)، $0 \le i \le r$ هي متتالية من أعداد صحيحة موجبة، غير محددة بـ (١ ـ ٣) لكنها تحقق:

$$\sum_{i=0}^{r} s_i \ \le\ s.$$

في هذه الحالة تأخذ المعادلة (E_0) الشكل التالي:

$$(E_0) \qquad f_0(x) = x^n - N = 0\ ;$$

---

(٩) ALG رقم 1، وALG اختصار لكلمة «Algorithme» أي «خوارزمية».

(١٠) لحل المعادلات كثيرة الحدود. (المترجم).

وبطريقة استقرائية على (E_k) و (s_i)[١١]، يحصل ما يلي:

$$(E_k) \qquad f_k(x) = f_{k-1}(x + s_{k-1}) = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} (s_0 + ... + s_{k-1})^p . x^{n-p} + [(s_0 + ... + s_{k-1})^n - N] = 0.$$

إنّ مخارج SCH_{k-1}: $SCH_{k-1} = SCH(n; s_{k-1};\ a_{0,\, k-1},\ ...,\ a_{n,\, k-1})$ هي إذن:

$$(r.1) \begin{cases} a_{p,\, k} = \binom{n}{p} (s_0 + ... + s_{k-1})^p \ , \ (a \leq p \leq n-1) \\ \\ a_{n,\, k} = (s_0 + s_1 + ... + s_{k-1})^n - N \end{cases}$$

من الواضح أننا، في هذه الحالة، لا نحتاج إلى تشكيل المخططات البيانية، لأننا بحاجة إلى مخارجها فقط، وهي الـ $a_{p,\, k}$. ومن الواضح أيضاً أن أهمّ هذه المخارج لحلّ (E_0) هي المخارج $a_{n,\, k}$.

وإذا وضعنا

$$N_k = N - (s_0 + s_1 + ... + s_{k-1})^n = -a_{nk}$$

يتبيّن أن:

$$N_{k+1} = N_k - [(s_0 + s_1 + ... + s_k)^n - (s_0 + s_1 + ... + s_{k-1})^n] =$$
$$N_k - [\tbinom{n}{1}] (s_0 + s_1 + ... + s_{k-1})^{n-1} . s_k + \tbinom{n}{2} (s_0 + ... + s_{k-1})^{n-2} s_k^2 + ... + s_k^n].$$

في هذه الحالة[١٢] إذن، يعود بناء المخطط البياني السابق، إلى الاحتساب المتتابع للأعداد N_k. فإذا توصلنا إلى $N_r = 0$ يكون الجذر النوني للعدد N هو $(s_0 + s_1 + ... + s_r)$، وإلا، فإن هذا الجمع هو قيمة تقريبية للجذر.

لنأخذ الآن مثالي الجذر التربيعي والجذر التكعيبي للعدد N. في حال $n = 2$ يعود الاحتساب إلى:

$$\begin{cases} N_0 = N; \\ N_k = N_{k-1} - 2(s_0 + s_1 + ... + s_{k-2}) s_{k-1} - s_{k-1}^2, \ 1 \leq k \leq r \ ; \end{cases}$$

---

(١١) استناداً لصيغة ذي حدي نيوتن يمكن الوصول إلى نفس النتيجة. (المترجم).

(١٢) أي في حالة استئصال الجذر النوني. (المترجم).

في حال $n = 3$، يعود الاحتساب إلى:

$$\begin{cases} N_0 = N; \\ N_k = N_{k-1} - 3(s_0 + s_1 + ... + s_{k-2})^2 s_{k-1} - 3(s_0 + ... + s_{k-2}).s_{k-1}^2 - s_{k-1}^3. \end{cases}$$

وهذه النتائج كانت موجودة في القرن العاشر.

لنعد الآن إلى الحالة العامة، لكي نتفحّص التعديلات التي أدخلها الطوسي على المخطط السابق. يمكننا القول بأن هذه التعديلات طبيعية، فقد شكلت إلى حدّ ما تبسيطاً لهذا المخطط، وفي تفحصنا هذا سوف نعمل على مرحلتين.

نبدأ بالتحقق من أن تأثير المدخل A_0 في $SCH(N;\ \Delta;\ A_0,\ A_1,\ ...\ ,\ A_n)$ على المخارج، باعتبارها كثيرات حدود تتعلق بـ Δ، ينحصر فقط في تشكيل حدودها الأولى (أي ذات القوّة الأعلى بالنسبة إلى Δ) وهي:

$$A_0,\ \binom{N}{1}\Delta A_0,\ \binom{N}{2}\Delta^2 A_0,\ ..., \qquad (٣ - ٥)$$

$$\binom{N}{N-1}\Delta^{N-1}A_0,\ \binom{N}{N}\Delta^N A_0 = \Delta^n A_0.$$

فإذا ما حفظنا هذه الحدود في الذاكرة، نستطيع اختصار المخطط المذكور من دون التأثير في فعاليته أو في كميّة المعلومات التي يقدمها. وإذا ما حذفنا المدخل A_0 وجميع العناصر المشتقة منه، أي العناصر الواردة في (٣ ـ ٥) والتي نحفظها في الذاكرة، تصبح مخارج

$$SCH(N-1;\ \Delta;\ A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n)$$ (١٣)

كالتالي:

$$B_1 - \binom{N}{1}\Delta A_0,\ B_2 - \binom{N}{2}\Delta^2 A_0,\ ...\ ,\ B_N - \Delta^N.A_0 \qquad (٣ - ٦)$$

ولإيجاد مخارج $SCH(N;\ \Delta;\ A_0,\ ...,\ A_n)$، نأخذ A_0 (كمخرج أول) ونضيف إلى المخارج (٣ ـ ٦)، بالتالي، الحدود الأخرى (غير A_0) الواردة في (٣ ـ ٥).

لكن، لكي نتمكن من تتبع مسار الطوسي ومن تسهيل المقارنة بين طريقته والطريقة العامة، سوف نحصر دراستنا في المجال الخاص ببحثه، أي في مجال معادلات الدرجة الثالثة ($N = 3$)، الأمر الذي يقودنا إلى المخطط:

---

(١٣) $SCH(N-1;\ \Delta;\ A_1,\ ...,\ A_n)$ يرمز إلى المخطط المختصر. (المترجم).

ذي الجدول التالي:

A_1	A_2	A_3
	$\frac{\Delta A_1}{\Delta A_1 + A_2}$	$\frac{\Delta(\Delta A_1 + A_2)}{\Delta(\Delta A_1 + A_2) + A_3 = B_3 - \Delta^3 A_o}$
	$\frac{\Delta A_1}{2\Delta A_1 + A_2 = B_2 - 3\Delta^2 A_o}$	
$A_1 = B_1 - 3\Delta A_o$		

$$SCH(2;\ \Delta;\ A_1,\ A_2,\ A_3)$$

وعلماً بأن المخرج الأول للمخطط $SCH(3;\ \Delta; A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3)$ هو A_0، يمكن الحصول على المخارج الأخرى بإضافة $3\Delta A_0$، $3\Delta^2 A_0$، $\Delta^3 A_0$، بالتتابع، إلى مخارج $SCH(2;\ \Delta;\ A_1,\ A_2,\ A_3)$.

قبل تطبيق ما سبق، بهدف تشكيل المعادلات (E_k) في حالة المعادلة التكعيبية، يُستحسن تخفيف الاصطلاحات بشكلٍ ما، وتسمية (E_0) المعادلة:

$$(E_0) \qquad f_0(x) = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

حيث $a_0 = 1$؛ $a_1 = a$، $a_2 = b$، $a_3 = c$ (١٤)؛ كما تستحسن كتابة (E_k) على الشكل:

$$(E_K) \qquad {}^{(15)} f_k(x) = x^3 + a_k x^2 + b_k x + c_k = 0.$$

لكي نشكل المعادلة (E_k) نبدأ بالمخطط $SCH(2;\ s_0;\ a,\ b,\ c)$ ونكون بذلك قد أنجزنا الكرّة رقم (0) - صفر - المخارج هي إذاً:

$$a_1 - 3s_0\ ,\ b_1 - 3s_0^2\ ,\ c_1 - s_0^3,$$

وهو ما يسمح باحتساب معاملات (E_1) وبالتالي s_1.

نعيد الكرّة على المنوال نفسه $(r-1)$ مرة. والمداخل التي نعتمدها في الكرّة رقم k، بالإضافة إلى $N = 2$ وَ $\Delta = s_k$، هي مخارج الكرّة رقم $(k-1)$، يضاف إليها، بالتالي: $3s_{k-1}$، $3s_{k-1}^2$، s_{k-1}^3. المخارج التي نحصل عليها هي إذن:

$$a_{k+1} - 3s_k\ ,\ b_{k+1} - 3s_k^2\ ,\ c_{k+1} - s_k^3\ ;$$

الأمر الذي يساعد على احتساب معاملات (E_{k+1}) أي a_{k+1}، b_{k+1}، c_{k+1} ومن ثم s_{k+1}.

---

(١٤) انسجاماً مع كتابة المعادلة (١ - ١). (المترجم).

(١٥) بكتابة f_k على هذا الشكل، يكون لدينا $a = a_0$، $b = b_0$، $c = c_0$.

وهكذا يكون لدينا الخوارزمية التالية:

ALG-2:

الخطوة ١:

- تشكيل SCH'_0: $SCH'_0 = SCH(2;\ s_0;\ a,\ b,\ c)$.
- زيادة $3s_0$، $3s_0^2$، s_0^3 إلى مخارجه بالتالي[١٦]؛ تشكيل (E_1) واحتساب s_1.

الخطوة ٢:

- بدءاً بـ $k = 1$ وانتهاءً بـ $k = (r-1)$، تشكيل:

$$SCH'_k = SCH(2;\ s_k;\ a_k;\ b_k,\ c_k),$$

- إضافة $3s_k$، $3s_k^2$، s_k^3، بالتالي، إلى المخارج.
- تشكيل E_{k+1} واحتساب s_{k+1}.

يكتب SCH'_k على الشكل التالي:

a_k	b_k	c_k
	$\dfrac{s_k a_k}{s_k a_k + b_k}$	$\dfrac{s_k(s_k a_k + b_k)}{s_k(s_k a_k + b_k) + c_k = f_k(s_k) - s_k^3 = c_{k+1} - s_k^3}$
	$\dfrac{s_k a_k}{2 s_k a_k + b_k = b_{k+1} - 3 s_k^2}$	
$a_k = a_{k+1} - 3 s_k.$		

SCH'_k

حيث نستنتج أننا ضربنا a_k مرّتين متتاليتين بـ s_k و b_k، مرّة واحدة بـ s_k وضربنا c_k، صفر مرّة بـ s_k. لكن $s_k = \sigma_k 10^{r-k}$. نستطيع إذن ضرب a_k، b_k، c_k بالتالي بـ $(10^{r-k})^2$، 10^{r-k} وَ 1 وإحلال σ_k مكان s_k في عمليات الضرب المقابِلة في تشكيل SCH'_k. لكنّ ضرب عدد ما بقوى العشرة السالبة أو الموجبة يعود، تتالياً، إلى إزاحة أرقامه يميناً أو شمالاً، عدداً من المراتب العشرية يعادل قوة العشرة التي نضرب بها. إنّ هذه الإزاحة يميناً أو يساراً لا تستلزم عمليات إضافية، سواء على الرمل (التخت) أم على الورق أو على الآلة الحاسبة أو الحاسوب. أضف إلى ذلك، أن كل تغيير في

---

(١٦) على مخارجه. (المترجم).

مداخل مخطط ما، يؤثر، مبدئياً، في مخارجه. فإذا شكلنا المخطط التالي:

$$SCH''_k = SCH(2;\ \sigma_k;\ a_k 10^{2(r-k)},\ b_k 10^{r-k},\ c_k)$$

نحصل على:

$$\begin{array}{lll}
a_k 10^{2(r-k)} & b_k 10^{r-k} & c_k \\
 & \dfrac{\sigma_k a_k 10^{2(r-k)}}{(s_k a_k + b_k)10^{r-k}} & \dfrac{\sigma_k (s_k a_k + b_k)10^{r-k} = s_k(s_k a_k + b_k)}{s_k(s_k \,.\, a_k + b_k) + c_k = c_{k+1} - s_k^3} \\
 & \dfrac{\sigma_k a_k 10^{2(r-k)}}{(2 s_k a_k + b_k)10^{r-k} = (b_{k+1} - 3 s_k^2)10^{r-k}} & \\
a_k 10^{2(r-k)} = (a_{k+1} - 3 s_k)10^{2(r-k)} & &
\end{array}$$

SCH''_k

إن مقارنة مخارج SCH''_k ومخارج SCH'_k تظهر أن الأولى مطابقة للثانية مع إزاحة إلى اليسار تعادل $2(r-k)$، $(r-k)$، وصفر منزلة عشرية، بالتتالي. نستطيع إذن، عن طريق إزاحات بسيطة مناسبة، أن نستهدي، انطلاقاً من المخارج الجديدة، إلى مخارج SCH'_k.

من جهة أخرى، مداخل SCH''_{k+1}، انطلاقاً من تحديدها، هي، بالإضافة إلى 2 وَσ_{k+1}:

$$a_{k+1}10^{2(r-(k+1))},\ b_{k+1}10^{r-(k+1)},\ c_{k+1}, \qquad (٣ - ٧)$$

التي هي مخارج SCH''_k، مضاف إليها بالتتالي:

$$\left.\begin{array}{r}
3s_k 10^{2(r-k)} = 3\sigma_k 10^{3(r-k)}, \\
3s_k^2 10^{r-k} = 3\sigma_k^2 10^{3(r-k)}, \\
s_k^3 = \sigma_k^3 10^{3(r-k)},
\end{array}\right\} \qquad (٣ - ٨)$$

ومن ثم، مُزاحة يميناً، بالتتالي: ٢، ١ وصفر منزلة عشرية. ونستطيع أيضاً الحصول على (٣ - ٧) عن طريق البدء بإزاحة مخارج SCH''_k يميناً ٢، ١ وصفر منزلة عشرية بالتتالي، ومن ثم إضافة الحدود الواردة في (٣ - ٨) متتالية، مزاحة بدورها يميناً: ٢، ١ وصفر منزلة عشرية، بالتتالي.

ملاحظة ٣ - ٢: إذا أخذنا ما سبق في الاعتبار من دون أن نحذف العدد ١ (وهو قيمة A_0)، نحصل على المخطط SCH'''_k التالي:

	1	2	3	4
(k.1)	$10^{3(r-k)}$	$a_k 10^{2(r-k)}$	$b_k 10^{r-k}$	c_k
(k.2)		$\underline{\sigma_k 10^{3(r-k)} [= s_k 10^{2(r-k)}]}$	$\underline{\sigma_k (a_k + s_k) 10^{2(r-k)}}$	$\sigma_k \{s_k(a_k+s_k)+b_k\} 10^{r-k} = c_{k+1}$
(k.3)		$(a_k + s_k) 10^{2(r-k)}$	$\{s_k(a_k+s_k)+b_k\} 10^{r-k}$	
(k.4)		$\underline{\sigma_k 10^{3(r-k)}}$	$\underline{\sigma_k (a_k + 2s_k) 10^{2(r-k)}}$	
(k.5)		$(a_k + 2s_k) 10^{2(r-k)}$	$\{s_k(2a_k+3s_k)+b_k\} 10^{r-k} = b_{k+1} 10^{r-k}$	
(k.6)		$\underline{\sigma_k 10^{3(r-k)}}$		
		$(a_k + 3s_k) 10^{2(r-k)} = a_{k+1} 10^{2(r-k)}$		

$$SCH_k''' = SCH\ (3;\ \sigma_k\ ;\ 10^{3(r-k)},\ a_k 10^{2(r-k)},\ b_k 10^{r-k},\ c_k)$$

وكان الطوسي يستعمل أحياناً مثل هذا الجدول [راجع مثال ٣ في الفقرة التالية «خامساً»]، عندما لا يكون هناك حدودٌ للاحتفاظ بها في الذاكرة. ولكي نُعيد هذا الجدول كرّة أخرى، نأخذ كمدخل لِـ SCH'''_{k+1}، العدد $10^{3[r-(k+1)]}$؛ من ثم نأخذ مخارج SCH'''_k بعد إزاحتها(١٧) بالتالي: ٢، ١ وصفر منزلة عشرية.

وعند كون الـ a_k أعداداً سالبة، وعندما يكون الطرح $(-a_k - is_k)$ ممكناً، $(i = 1,\ 2,\ 3)$، يحتسب الطوسي الأعداد $(-a_k - is_k)$ أي نقيض $(a_k + is_k)$. إنّه يحتسب بشكلٍ خاص c_{k+1} بواسطة الصيغة:

$$c_{k+1} = c_k - s_k[s_k(-a_k - s_k)] + s_k\ b_k$$

ولنذكر أخيراً أن $10^{3(r-k)}$ لا تظهر في جدول الطوسي كما لا تظهر فيها العناصر $(k.2, 2)$، $(k.4, 2)$، $(k.5, 2)$ بشكلٍ صريح، بل مجموعة مباشرة مع ما قبلها.

ملاحظة ٣ ـ ٣: في المخطط SCH''_k، يظهر العنصر $a_k\ 10^{2(r-k)}$ لكي يُضرب بـ σ_k. لكن، يمكن أن نبرهن استقرائياً أنّ:

$$a_k = a + 3(s_0 + s_1 + ... + s_{k-1})$$

وهو ما يُعطي:

$$\sigma_k\ a_k\ 10^{2(r-k)} = [a + 3(s_0 + s_1 + ... + s_{k-1})].\ \sigma_k\ .\ 10^{2(r-k)} \quad (٣ \text{ ـ } ٩)$$

وإلى هذه الصيغة، كثيراً ما كان الطوسي يلجأ، عند احتسابه لِـ $\sigma_k . a_k\ 10^{2(r-k)}$ من دون أن يحتسب a_k بحد ذاتها. وسوف نعود إلى هذه المسألة في الفقرة القادمة.

إن الملاحظتين السابقتين تسمحان بتعديل، هو الأخير، للخوارزمية المذكورة لكي نحصل بالذات، على الخوارزمية التي استعملها الطوسي. نزيد هنا بأن الطوسي، عند تشكيله لجدوله، كثيراً ما كان يلجأ إلى فنون حسابية خاصة بعصره [راجع الفقرة القادمة]. ونكتفي الآن بتلخيص مسار عمله: لكي يحتسب σ_1، σ_2، . . . ، σ_r يشكل، بادىء ذي بدء

$$SCH''_0 = SCH(2;\ \sigma_0;\ a\ 10^{2r},\ b\ 10^r,\ c)$$

حيث يحصل على المخارج

$$(a_1 - 3s_0)\ 10^{2r},\ (b_1 - 3s_0^2)\ 10^r,\ c_1 - s_0^3$$

وهنا يصبح من الممكن احتساب $a_1 10^{2r}$، $b_1 10^r$، c_1. عند ذلك يحتسب الطوسي σ_1، غالباً عن طريق (٣ ـ ١)، التي تصبح في هذه الحالة:

$$\sigma_1 = E[-c_1/b_1 10^r].$$

ثم يعيد الكرّة على المنوال نفسه $(r - 1)$ مرة، متخذاً كمداخل لمخطط الكرّة رقم

---

(١٧) يميناً. (المترجم).

$k+1$، الأعداد 2، σ_{k+1} ومخارج المخطط k، مضافاً إليها الحدود المحتفظ بها (٣ ـ ٨) ومزاحة من ثم، يميناً ٢، ١ وصفر منزلة عشرية بالتتالي. هذا ما يسمح باحتساب معاملات (E_{k+2}) ومن ثم باحتساب σ_{k+2}، $1 \leq k \leq r-2$.

وعلى الرغم من أن أمثلة الرسالة تقتصر على حالة الجذور الصحيحة، إلا أن الطريقة تسمح باحتساب جذور غير صحيحة؛ إن هذا التأكيد لا يرتكز فقط على الإمكانيات النظرية لهذه الطريقة، بل على كونها اتُّبِعت من قِبَل من أتوا بعد الطوسي لإيجاد مثل هذه الجذور. وفي كل الأحوال، من المستحسن إدخال تعديلات طفيفة عليها لِتطبيقها في احتساب القيم التقريبية للجذر الموجب. لنفرض أن الجزء الصحيح s من هذا الجذر الموجب معطى بالعلاقة (١ ـ ٣) وهو ما نحتسب أرقامه المتتالية بالطريقة المبينة أعلاه. نصل عند ذلك إلى المعادلة (E_r) التي تُحدد رقم الآحاد $s_r = \sigma_r$ للعدد s. وهنا، انطلاقاً من (E_r)، وعن طريق تطبيق المخطط SCH، نشكل المعادلة

$$(E_{r+1}) \qquad f_{r+1}(x) = f_r(x+s_r) = 0.$$

القسم الكسري من جذر (١ ـ ١) هو جذر لهذه المعادلة. إن تبديل المتغير:

$$x \longrightarrow \left(\frac{1}{10}\right) . x,$$ [١٨]

يُحوِّل (E_{r+1}) إلى معادلة هي (E'_{r+1}) ذات جذور مساوية لجذور (E_{r+1}) بضرب كلٍّ منها بِـ 10. القسم الكسري من جذر (١ ـ ١)، مضروب بعشرة، هو إذن جذر للمعادلة (E'_{r+1}). نستطيع، إذن، تطبيق ما تقدّم عليها، للحصول على الجزء الصحيح من هذا الجذر. نحصل على القيمة التقريبية الأولى للقسم الكسري المطلوب، عن طريق إزاحته إلى اليمين منزلة عشرية واحدة. وهكذا، نعيد الكرّة تقليصاً وتمديداً، العدد الذي نرغبه من المرّات.

نستطيع الآن تلخيص المراحل المختلفة من طريقة الطوسي: فعن طريق تبديل المتغير: $x \to 10^{r-k}.x$، تأخذ المعادلة:

$$(E_k) \qquad f_k(x) = x^3 + a_k x^2 + b_k x + c_k = 0,$$

الشكل التالي:

$$\begin{aligned}(E'_k) \qquad g_k(x) &= f_k(10^{r-k}.x)\\ &= 10^{3(r-k)}x^3 + 10^{2(r-k)}a_k x^2 + 10^{(r-k)}b_k x + c_k = 0;\end{aligned}$$

وجذور (E'_k) هي جذور (E_k) مقلّصة بنسبة هي $10^{-(r-k)}$. وجذر (E_k) التالي:

$$s_k + s_{k+1} + \ldots + s_r = \sigma_k 10^{r-k} + \ldots + \sigma_{r-1}.10 + \sigma_r,$$

---

(١٨) إذا كانت f دالة حقيقية متواصلة بمتغير حقيقي x وكان a عدداً حقيقياً موجباً، نقول عن الدالة φ_a حيث لكل x: $\varphi_a(x) = f(a^{-1}.\, x)$، إنّها تمدد للدالة f بنسبة تساوي a.

مثلاً، يقابله العدد

$$t_k = \sigma_k + 10^{-1}\sigma_{k+1} + ... + 10^{-(r+k)}\sigma_r,$$

ذو القسم الصحيح σ_k. على هذا الأساس تلعب (E_k) و (E'_k) الدور نفسه في تحديد σ_k الذي كان الطوسي يحدده إجمالاً عن طريق الحدّين الأخيرين من (E'_k).

من جهة أخرى، لدينا:

$$g_{k+1}(10x) = f_{k+1}(10^{r-(k+1)}.10x) = f_{k+1}(10^{r-k}x) =$$
$$f_k(10^{r-k}x + \sigma_k) = f_k[(x+\sigma_k)10^{r-k}] = g_k(x+\sigma_k).$$

وهذا يعني أن (E'_{k+1}) لها جذور (E'_k) نفسها، لكن بإنقاص σ_k من كل منها، ومن ثم بتمديدها بنسبة تساوي العشرة، أي بإزاحتها يساراً منزلة عشرية واحدة (ذلك لأن جذور E'_{k+1} هي جذور $g_{k+1}(10x)$، بضرب كل منها بـ 10 (المترجم)).

لكن معاملات (E'_k) هي $10^{3(r-k)}$ ومداخل المخطط SCH''_k (باستثناء 2 و σ_k). فالكرّة رقم k من خوارزمية الطوسي تعطي، إذاً، معاملات $g_k(x+\sigma_k) = g_{k+1}(10x)$. يكفي، إذاً، اعتماد تقليصات بنسبة 10^{-3}، 10^{-2}، 10^{-1} وَ 1، أي إزاحة معاملات $g_{k+1}(x)$ يميناً عدداً من المنازل العشرية هو بالتالي: 3، 2، 1، 0 منزلة عشرية، وهذه المعاملات هي باستثناء $10^{3(r-(k+1))}$، مداخل SCH''_{k+1}.

وهناك ملاحظة لا بد من تسجيلها، تظهر جلياً من خلال مجرى الدراسة الطويلة نوعاً ما، التي قدّمها الطوسي. وهذه الملاحظة هي أن المعارف الممتازة التي ملكها الطوسي لم تقتصر فقط على خصائص العمليات الجبرية على الأعداد والتعابير الجبرية أو على الأعداد العشرية لكنها احتوت أيضاً معرفة بصيغة ذي الحدين[١٩] ـ التي كانت موجودة في نهاية القرن العاشر ـ؛ كما تضمنت كذلك معرفة بتوسيع (تايلور) لكثيرات الحدود. هذه المعارف سمحت للطوسي بتشكيل استقرائي للمعادلات (E_k) مستعملاً بشكل خاص التوسيع:

$$f_k(x) = f_{k-1}(x+s_{k-1}) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} f_{k-1}^{(\ell)}(s_{k-1}) \ . \ x^\ell.$$

حيث تنتج معاملات هذا التوسيع من توسيع ذوات الحدّين:

$$(x+s_{k-1})^3, \quad a_k(x+s_{k-1})^2, \ b_k(x+s_{k-1}),$$

الموجودة في $f_{k-1}(x+s_{k-1})$، ومن اختزال الحدود المتشابهة، بعد ذلك.

إن معرفة الطوسي بالأعداد العشرية، سمحت له باستعمال طريقة الإزاحة يميناً أو يساراً التي تلائم هذا النوع من الحسابات، سواء على الورق أو على «لوح الرمل». فلقد

---

(١٩) «ذي حدي نيوتن».

رأينا أن الإزاحات تبعاً لخوارزميته، لم تكن تطبق فقط في مداخل ومخارج كلّ من المخططات SCH''_k، بل أيضاً في تشكيل هذه المخططات. وفي الواقع، خلال تنفيذ خوارزمية الطوسي، يجري احتساب عبارات من الشكل:

$$f_k(s_k) - f_k(0) = f_{k-1}(s_{k-1} + s_k) - f_{k-1}(s_{k-1})$$

$$= s_k \sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{s_k^{\ell-1}}{\ell!}\right) f_{k-1}^{(\ell)}(s_{k-1}) \qquad (٣ \text{ـ} ١٠)$$

وعبارات من الشكل:

$$s_{k+1} f_k^{(1)}(s_k) = s_{k+1} \sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{s_k^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\right) f_{k-1}^{(\ell)}\ (s_{k-1}). \qquad (٣ \text{ـ} ١١)$$

إن مقارنة (٣ ـ ١٠) و (٣ ـ ١١) تظهر أن الأخيرة تنتج من ضرب حدود الأولى بالتتالي بـ 1، 2، 3، . . . ، n ومن ثم بضرب مجموع الحدود الحاصلة بـ $\frac{s_{k+1}}{s_k}$؛ وهذا الضرب الأخير يعود إلى الضرب بـ $\frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k}$ ومن ثم بإزاحة العدد يميناً منزلة عشرية واحدة؛ ذلك لأن المرتبة العشرية لـ s_{k+1} هي أقل (بواحد) من مرتبة s_k. ويستعمل الطوسي أيضاً طريقة مشابهة لاحتساب التعابير ذات الشكل:

$$\frac{s_{k+1}^{\ell}}{\ell!} f_k^{(\ell)}\ (s_k).$$

نشير أخيراً إلى أن الطوسي، خلال تطبيق المخطط SCH، يحتسب (٣ ـ ١٠) بمساعدة العبارة:

$$s_k \left\{ f_{k-1}^{(1)}(s_{k-1}) + s_k \left[\frac{1}{2!} f_{k-1}^{(2)}(s_{k-1}) + s_k \left(\frac{1}{3!}\ f_{k-1}^{(3)}(s_{k-1}) + \ldots + s_k \left(\frac{1}{n!}\ f_{k-1}^{(n)}(s_{k-1}) \right) \right) \right] \right\},$$

وهذا يقدّم ضرباً بـ s_k، أقل عدد ممكن من المرات.

رابعاً: تشكيل الجدول

في الفقرة السابقة تَبيّن أن جدول الطوسي يتألف من المخططات SCH''_k $(0 \leq k \leq r)$ مع بعض التعديلات الطفيفة. وعلى الرغم من أن هذه التعديلات لا تؤثر في جوهر الجدول، إلا أن علينا تبيينها بوضوح لكي يأخذ هذا الجدول موقعه بأكبر دِقة ممكنة. لنستعرض، إذن، التعديلات التي أتى بها الطوسي إلى SCH''_k.

لا يحتسب الطوسي المدخل $a_k\ 10^{2(r-k)}$ بحد ذاته. إن مدخل SCH''_k هذا، هو مخرج

للمخطط SCH''_{k-1} (بإضافة حد محفوظ، ومن ثم بإزاحة إلى اليمين (المترجم)). هذا المدخل يساعد على تشكيل $a_k 10^{2(r-k)}.\sigma_k$. وهذا فعلاً هو العدد الذي يحتسبه الطوسي مباشرة خلال تشكيل SCH''_k من دون استخدام SCH''_{k-1}، وذلك بواسطة العلاقة:

$$a_k\sigma_k\ 10^{2(r-k)} = \sigma_k\ [a\ 10^{2(r-k)} + 3(\sigma_0\ 10^{3r-2k} + \sigma_1\ 10^{3r-2k-1} + ... + \sigma_{k-1}\ 10^{3r-2k-(k-1)})],$$ [٢٠]

التي تكتب على الشكل:

$$a_k\ \sigma_k\ 10^{2(r-k)} = \sigma_k \left[a.10^{2(r-k)} + 3\sum_{i=0}^{k-1} \sigma_i\ 10^{3r-2k-i}\right]. \quad (٤ \text{ - } ١)$$

ملاحظة ٤ ـ ١: توحي العلاقة (٤ ـ ١) باستبدال المدخل $a_k\ 10^{2(r-k)}$ للمخطط SCH''_k بالمدخل $a\ 10^{2(r-k)}$ وبوضع σ_i في المنزلة العشرية $3r - 2k - i$، $(0 \le i \le k-1)$. وهذا يسمح، من أجل احتساب $a_k\sigma_k 10^{2(r-k)}$ بضرب كل من الحدود a، σ_1، σ_2، ...،σ_{k-1}، في المنزلة التي وُضع فيها، بـ σ_k. ويجب أن نلاحظ أن هذه العملية لا تحتاج في تنفيذها إلى أيّ وقت إضافي لأن σ_0، σ_1، . . . ، σ_{k-1} هي مسجّلة في كل الأحوال.

ملاحظة ٤ ـ ٢: ما من شك بأن الطوسي يستنتج أن عليه أن يضرب دائماً s_k وَ s_k^2 بـ 3، لكي يحصل على الحدود المحتفظ بها. ولكي يختصر إلى مرّة واحدة، عدد المرات التي يضرب بها بـ 3، يختزل في أمثلته العددية، مداخل جداوله إلى ثلث كل منها، باستثناء c_k. هذا الاختزال الذي يصلح عندما تكون المداخل غير محددة وعندما يمثل الجدول مخططاً، لا يبقى صالحاً عند إسناد قيم محددة عددية، لهذه القيم غير المحددة، اللهم إلا في حال كون القيم المسندة تقتسم بديهياً على 3 كما هي الحال في أغلب الأمثلة التي اختارها الطوسي.

ملاحظة ٤ ـ ٣: العلاقة (٣ ـ ٨) تظهر أنه، للحصول على الحدود المحتفظ بها، يكفي وضع σ_k نهائياً في المنزلة العشرية $3(r-k)$. فللحصول على $s_k\ 10^{2(r-k)}$، $s_k^2\ 10^{r-k}$، s_k^3، يكفي احتساب σ_k^2 و σ_k^3 ووضعها في المنزلة العشرية (الجديدة (المترجم)) لِـ σ_k أو، عرضياً (عند الاقتضاء)، في منزلة أعلى.

لذلك، إذا ما أخذنا في الاعتبار الملاحظتين (٤ ـ ١) و (٤ ـ ٣) يتحول SCH''_k إلى الجدول TAB_k. وإذا أخذنا في الاعتبار الملاحظات (٤ ـ ١)، (٤ ـ ٢) و (٤ ـ ٣)، فعندها يتحول SCH''_k إلى الجدول TAB'_k.

---

(٢٠) نذكّر بأن a_k يمكن تحديدها بالعلاقة:
$a_k = a + 3(s_0 + s_1 + ... + s_{k-1});\ s_i = \sigma_i\ 10^{r-i};\ 0 \le i \le r.$ (المترجم).

	1	2	3
(k,o)	$\sigma_i 10^{3r-2k-i}\ (0 \leqslant i \leqslant k)$		
$(k,1)$	$a10^{2(r-k)}$	$b_k 10^{r-k}$	c_k
$(k,2)$		$\sigma_k \left\{ a10^{2(r-k)} + 3\sum_{i=o}^{k-1} \sigma_i 10^{3r-2k-i} \right\} = a_k \sigma_k 10^{2(r-k)}$	$\sigma_k(a_k s_k + b_k)10^{r-k}$
$(k,3)$		$(a_k s_k + b_k)10^{r-k}$	$c_{k+1} - s_k^3$
$(k,4)$		$a_k s_k 10^{r-k}$	
$(k,5)$		$(2a_k s_k + b_k)10^{r-k} = (b_{k+1} - 3s_k^2)10^{r-k}$	

TAB_k

	1	2	3
(k,o)	$\sigma_i 10^{3r-2k-i}\ (0 \leqslant i \leqslant k)$		
$(k,1)$	$a' 10^{2(r-k)}$	$b'_k 10^{r-k}$	c_k
$(k,2)$		$\sigma_k \left\{ a' 10^{2(r-k)} + \sum_{i=o}^{k-1} \sigma_i 10^{3r-2k-i} \right\} = a'_k \sigma_k 10^{2(r-k)}$	$3\sigma_k(a'_k s_k + b'_k)10^{r-k}$
$(k,3)$		$(a'_k s_k + b'_k)10^{r-k}$	$c_{k+1} - s_k^3$
$(k,4)$		$a'_k s_k 10^{r-k}$	
$(k,5)$		$(2a'_k s_k + b'_k)10^{r-k} = (b'_{k+1} - s_k^2)10^{r-k}$	

TAB'_k

ونلاحظ أننا، للحفاظ على c_{k+1}، يجب أن نضرب $(a'_k s_k + b'_k)$ بـ $3\sigma_k$؛ وهذا ما يجب القيام به. فاختزال a و b إلى الثلث يؤثر خطياً (بشكل خطي) في الأعمدة التي يقع فيها كل منها وهذا ما لا يحصل بالنسبة إلى العمود الذي يقع فيه c_k. ويستعمل الطوسي، بحرية، هذا، أو ذلك، من الجدولين TAB_k و TAB'_k. لكن ذلك لا يمنعنا من وصف جدوله الذي نسميه TAB، مستعملين فقط TAB'_k، ذلك لأنه الجدول الأكثر استعمالاً في «الرسالة».

معلوم أن مداخل TAB'_k هي:

$$2,\ \sigma_i\ 10^{3r-2k-i}\ \ (0 \leq i \leq k),\ \ a'\ 10^{2(r-k)},\ b'_k\ 10^{r-k},\ c_k$$

وسوف نحصر تسمية «مداخل» بالمدخلين الأخيرين فقط، أما المداخل الأولى فلا نأتي على ذكرها صراحة.

لكي نشكل اللوحة TAB'_{k+1}، نضيف إلى مخارج TAB'_k، الحدين المحتفظ بهما: $s_k^2\ 10^{r-k}$ و s_k^3 (لأجل ترتيب وضعية 3 في الحد الأول، راجع الملاحظة ٤ - ٣)، نزيحهما، من ثم، 1 وصفر منزلة عشرية بالتالي. في الوقت نفسه، نزيح يميناً، منزلتين عشريتين كلاً من الحدود a' و σ_i، $(0 \leq i \leq k)$ ونضع σ_{k+1} في المنزلة العشرية $3(r-k-1)$.

ملاحظة ٤ - ٤: لكي يضع عدداً في TAB، يتخذ الطوسي مُنطَلَقاً هو المنزلة العشرية nr؛ يمكن r أن يساوي p؛ يمكنه أيضاً أن يكون أصغر من p أو أكبر من p. في الحالة الأخيرة، نضع أصفاراً (أي عدداً من الأرقام مساوية للصفر) بعددٍ كافٍ إلى يسار الحد الثابت. وعدد هذه الأصفار هو:

$$nr - (np + q) = n(r - p) - q.$$

الجدول TAB يشمل الجداول TAB'_k $(0 \leq k \leq r)$ مجتمعة.

والملاحظ أن مختلف الجداول التي أقامها الطوسي والمتعلقة بمختلف أنواع المعادلات، قد بنيت منهجياً ومع المحافظة على شكلها الموحد، مع فوارق تفصيلية طفيفة: فقد يختلف الترتيب الأفقي من لوحة إلى أخرى؛ كما أن إحدى الخطوات في جدول ما يمكن أن توجد مجزأة إلى خطوات تفصيلية في لوحة أخرى، والعكس صحيح.

تشكيل TAB لمعادلة معينة يؤول بشكل أساسي إلى تنفيذ الخطوات التالية:

١ - تشكيل TAB'_0:

(١ - ١): وضع مداخل TAB'_0 أي عناصره ذات الإحداثيات $(0, 0)$، $(0, 1, 1)$، $(0, 1, 2)$،

$(0, 1, 3)$. هذه الخطوة يمكن تفصيلها كما يلي:

(١ ـ ١ ـ ١): كتابة القيمة المطلقة للثابت، ($N = |c|$) وتحديد المنازل $3j$ حيث $0 \leq j \leq p$. هذا المدخل (بفارق إشارة، + أو −) يوجد في القسم الأعلى من الجدول. لكن، طالما يمكن تحديد r (راجع الفقرة ٢)، فإذا كان $r > p$ نضيف $3(r-p) - q$ صفراً إلى اليسار (ملاحظة ٤ ـ ٤) ونحدد المنازل $3(p+1)$، $3(p+2)$، . . . ، $3r$.

(١ ـ ١ ـ ٢): وضع $b'10^r$.

نحتسب الفرق $(2r - m_2)$. يمكن أن يكون هذا الفرق موجباً أو سالباً. عند ذلك، ابتداءً من المنزلة العشرية $3r$ (ملاحظة ٤ ـ ٤)، نعدّ باتجاه اليسار أو باتجاه اليمين $|2r - m_2|$ منزلة عشرة ونضع الرقم الأول من b'. لكن هذه المنزلة تقابل المرتبة العشرية $3r - (2r - m_2) = r + m_2$ وهي مرتبة $b'10^r$. هذا المدخل يوضع في القسم الأوسط من الجدول.

(١ ـ ١ ـ ٣): وضع $a'10^{2r}$:

نحتسب $(r - m_1)$ ونعدّ من ثَم، ابتداءً من المنزلة $3r$، يساراً أو يميناً $|r - m_1|$ منزلة عشرية، وحيث نتوقف، نضع الرقم الأول من a'. هذه المنزلة العشرية تقابل المرتبة العشرية $3r - (r - m_1) = 2r + m_1$ وهو مرتبة $a'10^{2r}$. هذا المدخل يوضع في القسم الأسفل من الجدول.

(١ ـ ١ ـ ٤): وضع σ_0.

عند احتساب σ_0 (بحسب الفقرة ٢)، نضعه في المنزلة العشرية $3r$.

(١ ـ ٢): احتساب الحد المحفوظ $s_0^3 = \sigma_0^3\, 10^{3r}$ (راجع الملاحظة ٤ ـ ١)؛ ذلك لكي نحتسب من ثم $(N - s_0^3) = -(c + s_0^3)$.

(١ ـ ٣): احتساب المداخل الأخرى لِـ TAB_0 وإضافة الحد $s_0^2\, 10^r = \sigma_0^2\, 10^{3r}$ للمخرج $(b' - s_0^2)10^r$. تؤخذ بالاعتبار الملاحظتان ٤ ـ ١ و ٤ ـ ٢، خلال مجرى الحسابات جميعها.

٢ ـ تشكيل TAB'_k، $(1 \leq k \leq r - 1)$:

(٢ ـ ١): وضع مداخل TAB'_k.

(٢ ـ ١ ـ ١): إزاحة a'، انطلاقاً من وضعيته الأساسية في TAB'_{k-1}، منزلتين عشريتين.

(٢ ـ ١ ـ ٢): إزاحة b' منزلة عشرية واحدة انطلاقاً من وضعيته في TAB'_{k-1}.

(٢ ـ ١ ـ ٣): إزاحة كل من الحدود σ_0، σ_1، ...، σ_{k-1}، منزلتين عشريتين انطلاقاً من وضعيتها في TAB'_{k-1}.

(٢ ـ ١ ـ ٤): وضع σ_k في المنزلة $3(r-k)$.

(٢ ـ ٢): احتساب الحد المحتفظ به $s_k^3 = \sigma_k\ 10^{3(r-k)}$ (راجع الملاحظة ٤ ـ ١)، من ثم احتساب $-c_{k+1} - s_k^3$.

(٢ ـ ٣): احتساب $\sigma_k\ a'_k\ 10^{2(r-k)}$ حسب الصيغة (٤ ـ ١):

$$a'_k\ \sigma_k\ 10^{2(r-k)} = \left\{a'\ 10^{2(r-k)} + \sum_{i=0}^{k-1} \sigma_i\ 10^{3r-2k-i}\right\}\sigma_k.$$

(٢ ـ ٤): احتساب بقية عناصر TAB'_k وإضافة الحد الإضافي $s_k^2\ 10^{r-k} = \sigma_0^2\ 10^{3(r-k)}$ إلى المخرج $(b'_k - s_k^2)\ 10^{r-k}$.

يبقى علينا أن نبني جدول الطوسي ـ TAB ـ وسنتحقق من أن هذا الجدول ليس سوى تتالٍ من الجداول TAB'_k $(0 \leq k \leq r)$. نبني أولاً TAB مع تفريق الخطوات في TAB'_k بعضها عن بعض، الأمر الذي يسمح بتمييز الواحد عن الآخر؛ من ثم نعود ونجمع ما بين هذه الخطوات لكي نحصل على TAB، بحسب مفهوم الطوسي بالضبط.

تثبيتاً للأفكار، سننتقل إلى التطبيق في الحالة $r = 2$، أي في حالة $s = s_0 + s_1 + s_2$. الأسطر العليا في TAB سيشار إليها بالزوج $(k, 0)$ التي تشير إلى السطر (الأفقي) 0 (صفر) من TAB'_k. السطور الأخرى التي تمثل عناصر من الـ TAB'_k، سيشار إلى عناصرها بالثلاثية (k, i, j) التي تشير إلى العنصر الموجود على السطر i والعمود j في TAB'_k. ونشير بـ $(k, i, j)_+$ إلى العنصر نفسه، مضافاً إليه الحد المحتفظ به الذي يتلاءم معه. من جهة أخرى، نشير بـ $(TAB'_k)_+$ إلى TAB'_k بعد إضافة الحدود المحتفظ بها إلى مخارجه (راجع الصفحة التالية، TAB_0، $(TAB_1)_+$، $(TAB_2)_+$).

وسنلاحظ أن متابعة العمليات المذكورة أو إيقافها، أمر يتعلّق بقيمة c_k. فإذا ما توصلت الحسابات خلال عملية تشكيل TAB، إلى $c_k = 0$، نستنتج أن $k = r$ وأن سياق العمليات انتهى؛ بمعنىً آخر، نتوقف عن متابعة تشكيل الـ TAB'_k التالية.

(0.0) $\xleftarrow{3r}\sigma_o$

(0.1.3) $N = c$

$-\xleftarrow{3r}\sigma_o^3 = -s_o^3$ *

(0.2.3) $-\xleftarrow{r}(a's_o+b')\sigma_o \times 3$

$(0.3.3)_+$ $N-(as_o+b)s_o-s_o^3 = \rightarrow$

(0.1.2) $\xleftarrow{r} b'$

(0.2.2) $(\xleftarrow{2r}a')\sigma_o = \xleftarrow{r}a's_o$

(0.3.2) $\xleftarrow{r}(a's_o+b')$

$\xleftarrow{3r}\sigma_o^2 = \xleftarrow{r}s_o^2$ *

(0.4.2) $(\xleftarrow{2r}a')\,\sigma_o = \xleftarrow{r}a's_o$

$(0.5.2)_+$ $\xleftarrow{r}\{(2a's_o+b')+s_o^2\} =$

$= \xleftarrow{r}b_1 = \rightarrow$

(1.0) $\xleftarrow{3r-2}\sigma_o \xleftarrow{3(r-1)}\sigma_1$

(1.1.3) $-\ c_1$

$-\xleftarrow{3(r-1)}\sigma_1^3 = -s_1^3$ *

(1.2.3) $-\xleftarrow{r-1}(a_1's_1+b_1')\sigma_1 \times 3$

$(1.3.3)_+$ $-c_1-(a_1s_1+b_1)s_1-s_1^3 = \rightarrow$

(1.1.2) $\xleftarrow{r-1} b_1'$

(1.2.2) $(\xleftarrow{2r-2}a')\sigma_1 + (\xleftarrow{3r-2}\sigma_o)\sigma_1$

(2.0) $\xleftarrow{r}\sigma_o \xleftarrow{r-1}\sigma_1\,\sigma_2$

(2.1.3) $-\ c_2$

$-\sigma_2^3 = s_2^3$ *

(2.2.3) $-(a_2's_2+b_2')\sigma_2 \times 3.$

$(2.3.3)_+$ $-c_2-(a_2s_2+b_2)s_2-s_2^3 = 0$

TAB$_o$	(TAB$_1$)$_+$	(TAB$_2$)$_+$
	(1.3.2) $\xleftarrow{r-1}(a's_1+b'_1)$ $\xleftarrow{3(r-1)}\sigma_1^2 = \xleftarrow{r-1}s_1^2$ *	
	(1.4.2) $(\xleftarrow{2r-2}a')\sigma_1+(\xleftarrow{3r-2}\sigma_o)\sigma_1$	
	(1.5.2)$_+$ $\xleftarrow{r-1}\{2a'_1s_1+b'\} = \xleftarrow{r-1}b'_2 = \rightarrow$	
		(2.1.2) b'_2
		(2.2.2) $a'\sigma_2+(\xleftarrow{r}\sigma_o)\sigma_2+$ $+(\xleftarrow{r-1}\sigma_1)\sigma_2$
		(2.3.2) $a'_2s_2+b'_2$ $\sigma_2^2 = s_2^2$ *
		(2.4.2) $a'\sigma_2+(\xleftarrow{r}\sigma_o)\sigma_2+$ $+(\xleftarrow{r-1}\sigma_1)\sigma_2$
		(2.5.2)$_+$ $(2a'_2s_2+b'_2)+s_2^2$
(0.1.1) $\xleftarrow{2r}a'$		
	(1.1.1) $\xleftarrow{2r-2}a'$	
		(2.1.1) a'

(*) عبارة محتفظ بها.

إذا ما جمّعنا هذه الجداول في جدول واحد، نحصل على جدول الطوسي. ولكي نواكب، عن كثب، مساره، سنوضحه مستخدمين أحد أمثلته بالذات. فلقد حلّ الطوسي المعادلة:

$$x^3 + 12x^2 + 102x = 34\ 345\ 395$$

مستخدماً الجدول التالي، الذي أوضحنا خطواته المتتالية بالأرقام.

(2.0)	$\xleftarrow{r} \sigma_o \xleftarrow{r-1} \sigma_1 \sigma_2$	3 2 1
(1.0)	$\xleftarrow{3r-2} \sigma_o \xleftarrow{3r-1} \sigma_1$	3 2
(0.0)	$\xleftarrow{3r} \sigma_o$	3
		o o o
(0.1.3)	$N = -c$	3 4 3 4 5 3 9 5
	$-\xleftarrow{3r} \sigma_o^3 = -s_o^3$	— 2 7
(0.2.3)	$-\xleftarrow{r}(a's_o + b')\sigma_o \times 3$	— 1 1 1 0 6
$(0.3.3)_+$	$N - (as_o + b) - s_o^3 =$	
(1.1.3)	$-\ c_1$	6 2 3 4 7 9 5
	$-\xleftarrow{3(r-1)} \sigma_1^3 = -s_1^3$	— 8
(1.2.3)	$-\xleftarrow{r-1}(a'_1 s_1 + b'_1)\sigma_1 \times 3$	— 5 9 1 0 8 4
$(1.3.3)_+$	$-c_1 - (a_1 s_1 + b_1)s_1 - s_1^3 =$	
(2.1.3)	$-\ c_2$	3 1 5 9 5 5
	$-\sigma_2^3 = s_2^3$	1
(2.2.3)	$-(a'_2 s_2 + b'_2)\sigma_2 \times 3$	3 1 5 9 5 4
$(2.3.3)_+$	$-c_2 - (a_2 s_2 + b_2)s_2 - s_2^3 = 0$	0 0 0 0 0 0
(0.1.2)	$\xleftarrow{r} b'$	3 4
(0.2.2)	$(\xleftarrow{2r} a')\sigma_o = \xleftarrow{r} a's_o$	1 2
(0.3.2)	$\xleftarrow{r}(a's_o + b')$	1 2 3 4
	$\xleftarrow{3r} \sigma_o^2 = \xleftarrow{r} s_o^2$	9
(0.4.2)	$(\xleftarrow{2r} a')\sigma_o = \xleftarrow{r} a's_o$	1 2
$(0.5.2)_+$	$\xleftarrow{r}\{(2a's_o + b') + s_o^2\} = \xleftarrow{r} b'_1$	9 2 4 3 4
(1.1.2)	$\xleftarrow{r-1} b'_1$	9 2 4 3 4
(1.2.2)	$(\xleftarrow{2r-2} a')\sigma_1 + (\xleftarrow{3r-2} \sigma_o)\sigma_1$	6 8
(1.3.2)	$\xleftarrow{r-1}(a'_1 s_1 + b'_1)$	9 8 5 1 4
	$\xleftarrow{3(r-1)} \sigma_1^2 = \xleftarrow{r-1} s_1^2$	4
(1.4.2)	$(\xleftarrow{2(r-2)} a')\sigma_1 + (\xleftarrow{3r-2} \sigma_o)\sigma_1$	6 8
$(1.5.2)_+$	$\xleftarrow{r-1}(2a'_1 s_1 + b'_1) + s_1^2\} = \xleftarrow{r-1} b'_2$	1 0 4 9 9 4
(2.1.2)	b'_2	1 0 4 9 9 4
(2.2.2)	$a'\sigma_2 + (\xleftarrow{r} \sigma_o)\sigma_2 + (\xleftarrow{r-1} \sigma_1)\sigma_2$	3 2 4
(2.3.2)	$a'_2 s_2 + b'_2$	1 0 5 3 1 8
(0.1.1)	$\xleftarrow{2r} a'$	4
(1.1.1)	$\xleftarrow{2r-2} a'$	4
(2.1.1)	a'	4

ملاحظة ٤ ـ ٥ : كل ما سبق وتحقق بالنسبة إلى معادلة الدرجة الثالثة يمكن تطبيقه كاملاً على معادلات الدرجة الثانية:

$$x^2 + ax + b = 0.$$

لنفرض أن:

$$s = s_0 + s_1 + s_2 + ... + s_r$$

حيث $s = \sigma_k\ 10^{r-k}$، $(1 \leq k \leq r)$ هو جذر موجب لهذه المعادلة. هنا يستعمل الطوسي الجدول الكامل (راجع الملاحظة ٣ ـ ٢) المسمى جدول روفيني ـ هورنر، مع الإزاحات التي أشرنا إليها في الملاحظة التي تتناول مداخل المخطط. عندئذٍ نحصل على الجدول التالي:

$(k.o)$	$\sigma_i 10^{2r-k-i}\ (0 \leqslant i \leqslant k)$	
$(k.1)$	$a_k 10^{r-k}$	b_k
$(k.2)$	$\sigma_k 10^{2(r-k)}$	$(a_k+s_k)10^{r-k} \times \sigma_k$
$(k.3)$	$(a_k+s_k)10^{r-k}$	$b_k+(a_k+s_k)s_k = b_{k+1}$
$(k.4)$	$\sigma_k 10^{2(r-k)}$	
$(k.5)$	$(a_k+2s_k)10^{r-k} = a_{k+1}10^{r-k}$	
	1	2

خامساً: الحالة $c > 0$

في الفقرات السابقة عالجنا مسألة حلّ المعادلة:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (٥ ـ ١)$$

في الحالة $c < 0$؛ أما في هذه الفقرة فسوف نواجه الحالة $c > 0$.

يبرهن الطوسي أن المعادلة (٥ ـ ١)، في هذه الحالة، يمكنها أن تحوز على جذرين موجبين، كما يجوز ألا يكون لها أي جذر موجب. لكن، في هذه الحالة بالتحديد، لا يمكن تطبيق الخوارزميات والطرق المستعملة في الفقرات السابقة بشكل تلقائي. فلنفترض أن (٥ ـ ١) تحوز على جذرين موجبين s وَ t وأن:

$$\left.\begin{aligned} E(s) &= \sigma_0\ 10^r + \sigma_1\ 10^{r-1} + ... + \sigma_r; \\ E(t) &= \tau_0\ 10^p + \tau_1\ 10^{p-1} + ... + \tau_p; \end{aligned}\right\} \qquad (٥ ـ ٢)$$

عندما يكون $r = p$ وَ $\sigma_0 = \tau_0$ ويكون v أي عدد يحقق:

$$s < v < t$$

يكون لدينا

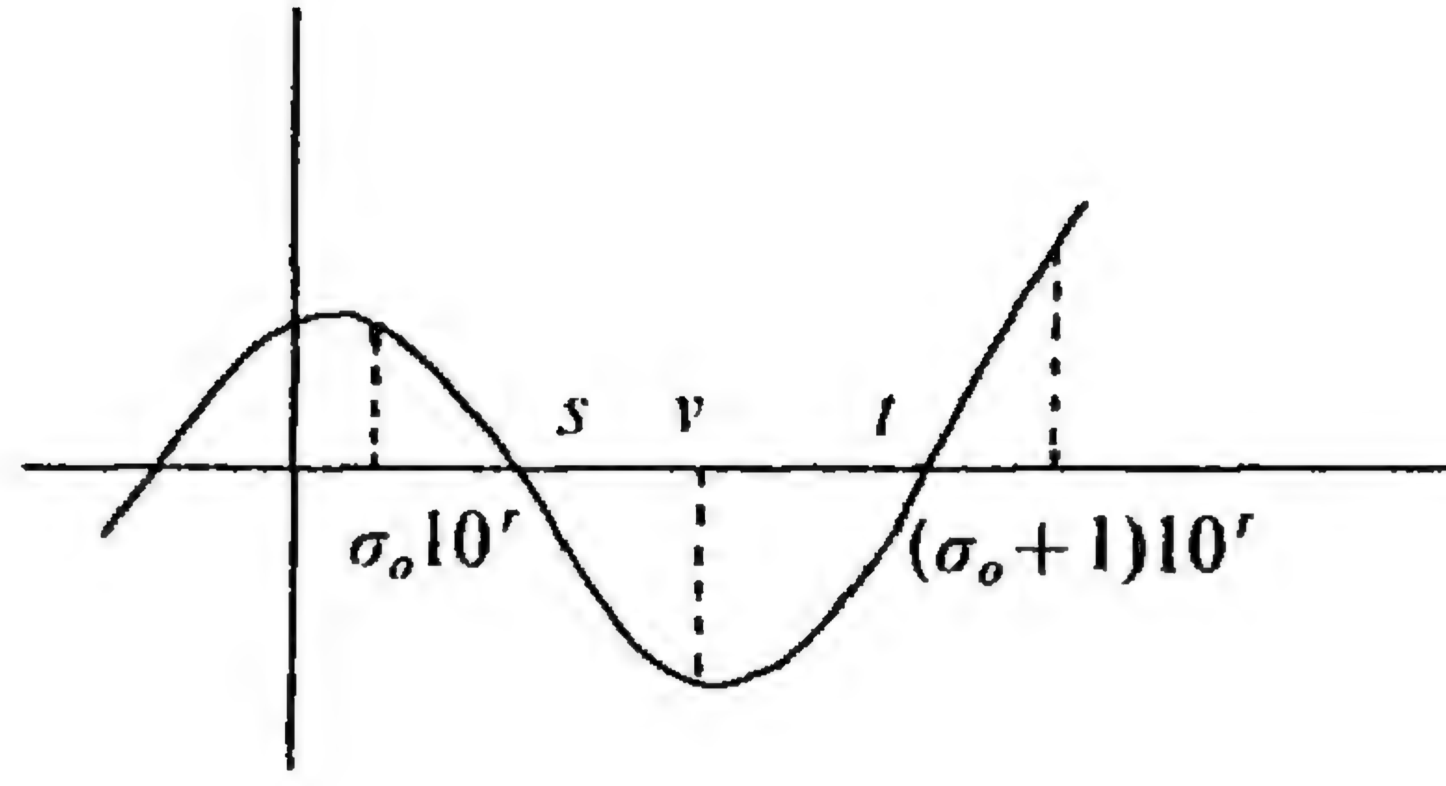
$$\sigma_0\ 10^r < s < v < t < (\sigma_0 + 1)\ 10^r$$

فيكون

$$f(\sigma_0\ 10^r)\ f(v) < 0 \qquad \text{وَ} \qquad f(v)\ f((\sigma_0 + 1)\ 10^r) < 0$$

وبالتالي:

$$f(\sigma_0 10^r) f((\sigma_0 + 1) 10^r) > 0.$$



بالطريقة نفسها نحصل على لامتساوية مماثلة تخص t؛ وهذا يدلّ على أن اللامتساوية الأساسية (٢ ـ ٤) لا تتحقق لا بـ s ولا بـ t. لكن في حال إمكان حَصْر أحد هذين الجذرين وحده، s مثلاً، ضمن الفترة $]\sigma_0\ 10^r\ ,\ (\sigma_0 + 1)\ 10^r[$، عندها لا تغيّر $f(x)$ إشارتها سوى مرة واحدة في هذه الفترة، مارة بالصفر في النقطة s؛ في هذه الحالة تكون اللامتساوية (٢ ـ ٤) محققة، ويمكن بالتالي اعتماد دراسة مماثلة لتلك الواردة في الفقرات السابقة من أجل تحديد s و t. فمن الآن وصاعداً نفترض أن هذه الشروط تتوفر دائماً.

وإذا ما عُدْنا إلى «الرسالة»، نستنتج أن الطوسي كان يستعمل أحياناً، نتائج الفقرات السابقة لكي يحدد مباشرة الجذر الأصغر. إلا أنه كان يتحاشى اللجوء إلى هذه النتائج، عندما تعترضه أعداد سالبة، خلال تطبيقه للخوارزمية (عند عمليات الطرح مثلاً). ولهذا السبب بالتحديد، كما سنرى، يتفادى استعمال هذه النتائج عند تصدّيه لتحديد الجذر الأكبر. نشير، أخيراً، إلى أنه في كل الأحوال التي يوجد فيها جذران أحدهما غير منطّق (Irrationnel)، كان الطوسي لا يهتم إلا إلى الجذر المنطّق.

ولكي يلتف حول الصعوبة التي كان يستشعرها خلال الاحتساب من دون أن يصرّح بها، كان الطوسي، بشكل شبه دائم، يحوّل نوع المعادلة المدروسة إلى أحد الأنواع التي سبق أن عالجها في فقرات سابقة، وذلك بتحويل في المتغير: $x \rightarrow \alpha x + \beta$. المعادلة التي يحصل عليها حينئذٍ، لا تحوز سوى على جذر موجب واحد t' يقابل الجذر الأكبر t للمعادلة الأساسية. بالإمكان حينئذٍ تحديد t' بتطبيق نتائج الفقرات السابقة ونحصل على $t = at' + \beta$. أما s فيقابله جذر سالب من المعادلة المحوّلة.

ولكي نوضّح ما ذكّرنا به في هذه المقدمة سنعالج أحد أنواع المعادلات التي درسها الطوسي وهو الذي تُمَثِّله المعادلة:

$$(E) \qquad x^3 + c = ax^2 ,$$

حيث $a \in \mathbb{N}^*$ و $c \in \mathbb{N}^*$، وهي المعادلة (٥ ـ ١)، حيث $b = 0$، $c > 0$.

هنا لا يستخدم الطوسي نتائج الفقرات السابقة في البحث عن الجذر الأكبر t. وذلك من دون أن يشرح الأسباب. والسبب في ذلك يعود، على ما يبدو، إلى أن الطوسي يأخذ المعادلة (E) على الشكل:

$$(F) \qquad f(x) = c - x^2(a - x) = 0.$$

وفي ظل معطيات هذه الفقرة، من السهل أن نرى أن f موجبة في الفترة $]0, s[$ وسالبة في الفترة $]s, t[$. لكن، إذا كان:

$$\sigma_0\ 10^r < s < t_0\ 10^p < t,$$

فحينئذٍ يكون:

$$f(\sigma_0\ 10^r) > 0 \qquad \text{وَ} \qquad f(\tau_0\ 10^p) < 0.$$

وهنا، على الأرجح، يكمن السبب في استعمال الطوسي، أحياناً، نتائج الفقرات السابقة لتحديد s مباشرة وعدوله عن استعمالها لتحديد t.

نعود الآن إلى المعادلة E ونضع:

$$(٥ ـ ٣) \qquad D = A - c \ ; \ A = \left(\frac{2a}{3}\right)^2 \cdot \frac{a}{3} = \frac{4a^3}{27}.$$

يبرهن الطوسي أن $(D \geq 0)$ هو شرط ضروري وكاف لوجود جذرين موجبين. وهو، في الواقع، يفرق بين حالات ثلاث:

١ ـ $(D < 0)$: لا تحوز (E) على جذر موجب.

٢ ـ $(D = 0)$: تحوز (E) على جذر موجب واحد (مزدوج) وهو $\frac{2a}{3}$.

٣ ـ $(D > 0)$: تحوز (E) على جذرين موجبين مختلفين، أصغرهما s والأكبر t.

يبرهن الطوسي أن s وt يحققان اللامتساوية

$$0 < s < \frac{2a}{3} < t \qquad (٥ ـ ٤)$$

لتحديد t، يحوّل الطوسي (E) عن طريق تبديل أفيني للمتغير $x \to x + \frac{2a}{3}$، فتأخذ (E) الشكل التالي:

$$x^3 + ax^2 = D,$$

فيصبح بالإمكان تطبيق نتائج الفقرات السابقة؛ فللمعادلة الأخيرة جذر موجب واحد t':

$$t' = t - \frac{2a}{3},$$

الأمر الذي يسمح باستخلاص t.

مثال ١: $a = 465$ ، $c = 14\ 837\ 904$.

يجد الطوسي $D = 57\ 596$، فهو إذا أمام الحالة الثالثة. المعادلة المحوّلة تكتب كما يلي:

$$x^3 + 465x^2 = 57\ 596.$$

الجذر الوحيد (الموجب) لهذه المعادلة هو 11 وبالتالي:

$$t = 310 + 11 = 321.$$

وفي هذا المثال نجد أن s عدد غير منطّق، $298 < s < 299$. كما نشير إلى أن الطوسي، بعد أن ينهي عرض طريقته في البحث عن الجذر الأصغر للمعادلة (E)، سيتفادى هذا المثال.

في البحث عن s، يقسم الطوسي الحالة الثالثة إلى حالات ثلاث:

١ ـ $c = \frac{1}{2}A$؛ في هذه الحالة نتحقق من أن $s = \frac{a}{3}$. عندئذٍ نجد $t = \frac{a}{3} + \frac{a}{\sqrt{3}}$ وهو عدد غير منطّق لا يهم الطوسي.

٢ ـ $c < \frac{1}{2}A$؛ هنا يبرهن الطوسي أن $s < \frac{a}{3}$.

٣ ـ $c > \frac{1}{2}A$؛ ويبرهن أن $\frac{a}{3} < s < \frac{2a}{3}$.

في الحالتين ١ و ٢ يستعمل الطوسي طريقة الفقرات السابقة في البحث عن s، من دون أن يلتقي بأي عدد سالب خلال عملياته الحسابية. لكن، أخذاً بالاعتبار شكل (E) و (F)، ولكي يطبق المخطط SCH بحسب الفقرة «ثالثاً»، عليه احتساب:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\,[x^2\,(a-x)],$$

في النقطة $x = s_0$، وهو ما يساوي $(a - 3s_0)$. وهذا الفرق $(a - 3s_0)$ موجب في الحالتين ١ و ٢ إلا أنه قد يكون سالباً في الحالة ٣. في هذه الحالة يحوّل الطوسي

المعادلة (E) بواسطة التبديل الأفيني:

$$x \longrightarrow \frac{2a}{3} - x.$$

مثال ٢ : $a = 963$، $c = 66\ 152\ 322$.

وهي المعادلة (٥ ـ ١) حيث $a = -963$، $b = 0$، $c = 66\ 152\ 322$. نجد أن $D = 132\ 304\ 644 = 2c$. الجذر الأصغر هو، إذن، $\frac{a}{3} = 321$. لكن الطوسي يعود فيجد هذا الجذر عن طريق إقامة جدول لا يحتوي على حدود محتفظ بها. ذلك أنه يكرر المخطط SCH_k''' (راجع الملاحظة ٣ ـ ٢) وهذا هو جدول الطوسي المقابل لهذا المخطط.

(2.0)	3 2 1
(1.0)	3 2
(0.0)	3
(0.1.4)	6 6 1 5 2 3 2 2
(0.2.4)	— 5 9 6 7
(1.1.4)	6 4 8 2 3 2 2
(1.2.4)	— 6 1 7 3 2
(2.1.4)	3 0 9 1 2 2
(2.2.4)	— 3 0 9 1 2 2
(3.1.4)	0 0 0 0 0 0
(0.2.3) = (0.3.3)	1 9 8 9
(0.4.3)	1 0 8 9
(0.5.3)	3 0 7 8
(1.1.3)	3 0 7 8
(1.2.3)	8 6
(1.3.3)	3 0 8 6 6
(1.4.3)	4 6
(1.5.3)	3 0 9 1 2
(2.1.3)	3 0 9 1 2
(2.2.3)	2
(2.3.3)	3 0 9 1 2 2
(0.1.2)	9 6 3
(0.3.2)	6 6 3
(0.5.2)	3 6 3
(0.7.2)	6 3
(1.1.2)	6 3
(1.3.2)	4 3
(1.5.2)	2 3
(1.7.2)	3
(2.1.2)	3
(2.3.2)	2

سادساً: إعادة تركيب الجداول

أصبح بالإمكان أن نقوم بإعادة تركيب جداول «رسالة» الطوسي التي حذفها الناقل المجهول، ونكون بذلك قد «رممنا» هذه الرسالة كاملة. سنستعيد إذاً، وبالترتيب، كل الحلول العددية التي عرضها الطوسي، باستثناء تلك التي عرضناها على صورة أمثلة في الفقرات السابقة. وسنضيف على الهامش، الخطوات المقابلة في الخوارزمية التي سبق إعدادها.

$x^2 + ax = N$
$a = 31$
$N = 112\ 992$

3 2 1	(2.0)	
3 2	(1.0)	
3	(0.0)	
1 1 2 9 9 2	(0.1.2)	
− 9		
− 9 3	(0.2.2)	
1 3 6 9 2	(1.1.2) = (0.3.2)	
− 4		
− 1 2 6 2	(1.2.2)	
6 7 2	(2.1.2) = (1.3.2)	
− 1		
− 6 7 1	(2.2.2)	
0 0 0	(2.3.2)	
3 1	(0.1.1)	
3	(0.2.1)	*
3 3 1	(0.3.1)	*
3	(0.4.1)	*
6 3 1	(0.5.1)	
6 3 1	(1.1.1)	
2	(1.2.1)	*
6 5 1	(1.3.1)	*
2	(1.4.1)	*
6 7 1	(1.5.1)	
6 7 1	(2.1.1)	

الجدول رقم (١ ـ ١)

(*) منفذة دفعة واحدة.

$x^2+ax=N$	(2.0)	1
$a=2012$	(1.0)	2
$N=748\ 893$	(0.0)	3
	(0.1.2)	7 4 8 8 9 3
		−9
	(0.2.2)	−6 0 3 6
	(1.1.2) = (0.3.2)	5 5 2 9 3
		−4
	(1.2.2)	−5 2 2 4
	(2.1.2) = (1.3.2)	2 6 5 3
		−1
	(2.2.2)	−2 6 5 2
	(2.3.2)	0 0 0 0 0
	(0.1.1)	2 0 1 2
	(0.2.1)	3
	* (0.3.1)	2 3 1 2
	(0.4.1)	3
	(0.5.1)	2 6 1 2
	(1.1.1)	2 6 1 2
	(1.2.1)	2
	* (1.3.1)	2 6 3 2
	(1.4.1)	2
	(1.5.1)	2 6 5 2
	(2.1.1)	2 6 5 2

الجدول رقم (١ ـ ٢)

نذكر أن الطوسي، في حالة معادلة من الدرجة الثانية، لم يكن بحاجة إلى إزاحة خطوط القسم الأعلى من الجدول لأنه يستعمل الجدول كاملاً.

(*) منفذة دفعة واحدة.

$x^2 + b = ax$
$a = 2123$
$b = 578\,442$

(2.0)	1
(1.0)	2
(0.0)	3
(0.1.2)	— 5 7 8 4 4 2
(0.2.2)	— −5 4 6 9
(1.1.2) = (0.3.2)	−3 1 5 4 2
(1.2.2)	— −3 0 0 6
(2.1.2) = (1.3.2)	−1 4 8 2
(2.2.2)	— −1 4 8 2
(2.3.2)	0 0 0 0
(0.1.1)	−2 1 2 3
* (0.2.1)	3
* (0.3.1)	−1 8 2 3
* (0.4.1)	3
(0.5.1)	−1 5 2 3
(1.1.1)	−1 5 2 3
* (1.2.1)	2
* (1.3.1)	−1 5 0 3
* (1.4.1)	2
(1.5.1)	−1 4 8 3
(2.1.1)	−1 4 8 3

الجدول رقم (١ ـ ٣)

(*) منفذة دفعة واحدة.

$x^3 + bx = N$

$a = 0$

$b = 36$

$N = 33\,087\,717$

(2.0)	3 2 1
(1.0)	3 2
(0.0)	3
(0.1.3)	3 3 0 8 7 7 1 7
	− 2 7
(0.2.3)	− 1 0 8
$(1.1.3) = (0.3.3)_+$	6 0 7 6 9 1 7
	− 8
(1.2.3)	− 5 7 6 7 2
$(2.1.3) = (1.3.3)_+$	3 0 8 1 9 7
	− 1
(2.2.3)	− 3 0 8 1 9 6
$(2.3.3)_+$	0 0 0 0 0 0
(0.1.2)	1 2
$(0.5.2)_+$	9 1 2
(1.1.2)	9 1 2
(1.2.2)	6
(1.3.2)	9 6 1 2
	4
(1.4.2)	6
$(1.5.2)_+$	1 0 2 4 1 2
(2.1.2)	1 0 2 4 1 2
(2.2.2)	3 2
(2.3.2)	1 0 2 7 3 2

الجدول رقم (١ ـ ٤)

(*) الخطوات التي نتائجها الصفر، غير مدونة.

$x^3 + bx = \mathrm{N}$
$b = 1\ 203\ 321$
$\mathrm{N} = 419\ 342\ 202$

(2.0)	3 2 1
(1.0)	3 2
(0.0)	3
(0.1.3)	4 1 9 3 4 2 2 0 2
	− 2 7
(0.2.3)	−3 6 0 9 9 6 3
(1.1.3) = (0.3.3)$_+$	3 1 3 4 5 9 0 2
	− 8
(1.2.3)	− 2 9 8 2 6 4 2
(2.1.3) = (1.3.3)$_+$	1 5 1 1 4 8 2
	− 1
(2.2.3)	− 1 5 1 1 4 8 1
(2.3.3)$_+$	0 0 0 0 0 0 0
(0.1.2)	4 0 1 1 0 7
	9
(0.5.2)$_+$	4 9 1 1 0 7
(1.1.2)	4 9 1 1 0 7
(1.2.2)	6
(1.3.2)	4 9 7 1 0 7
	4
(1.4.2)	6
(1.5.2)$_+$	5 0 3 5 0 7
(2.1.2)	5 0 3 5 0 7
(2.2.2)	3 2
(2.3.2)	5 0 3 8 2 7

الجدول رقم (١ ـ ٥)

(*) الخطوات التي نتائجها الصفر، غير مدونة.

$x^3 = bx + N$

$b = 963$

$N = 32\ 767\ 038$

(2.0)		3 2 1
(1.0)		3 2
(0.0)		3
(0.1.3)		3 2 7 6 7 0 3 8
	—	2 7
(0.2.3)		2 8 8 9
$(1.1.3) = (0.3.3)_+$		6 0 5 5 9 3 8
	—	8
(1.2.3)	—	5 7 4 0 7 4
$(2.1.3) = (1.3.3)_+$		3 0 7 1 9 8
	—	1
(2.2.3)	—	3 0 7 1 9 7
$(2.3.3)_+$		0 0 0 0 0 0
(0.1.2)	—	3 2 1
		9
$(0.5.2)_+$		8 9 6 7 9
(1.1.2)		8 9 6 7 9
(1.2.2)		6
(1.3.2)		9 5 6 7 9
		4
(1.4.2)		6
$(1.5.2)_+$		1 0 2 0 7 9
(2.1.2)		1 0 2 0 7 9
(2.2.2)		3 2
(2.3.2)		1 0 2 3 9 9

الجدول رقم (١ ـ ٦)

$x^3 = bx + N$
$b = 102\,021$
$N = 327\,420$

(2.0)	3 2 1
(1.0)	3 2
(0.0)	3
(0.1.3)	3 2 7 4 2 0
	— 2 7
(0.2.3)	3 0 6 0 6 3
$(1.1.3) = (0.3.3)_+$	3 9 3 3 7 2 0
	— 8
(1.2.3)	— 3 7 1 9 5 8
$(2.1.3) = (1.3.3)_+$	2 0 6 1 4 0
	— 1
(2.2.3)	— 2 0 6 1 3 9
$(2.3.3)_+$	0 0 0 0 0 0
b	— 1 0 2 0 2 1
(0.1.2)	— 3 4 0 0 7
	9
$(0.5.2)_+$	5 5 9 9 3
(1.1.2)	5 5 9 9 3
(1.2.2)	6
(1.3.2)	6 1 9 9 3
	4
(1.4.2)	6
$(1.5.2)_+$	6 8 3 9 3
(2.1.2)	6 8 3 9 3
(2.2.2)	3 2
(2.3.2)	6 8 7 1 3

الجدول رقم (١ ـ ٧)

$x^3 + ax^2 = N$

$a = 30$

$N = 36\ 167\ 391$

(2.0)		3 2 1
(1.0)		3 2
(0.0)		3
(0.1.3)		3 6 1 6 7 3 9 1
	—	2 7
(0.2.3)	—	2 7
$(1.1.3) = (0.3.3)_+$		6 4 6 7 3 9 1
	—	8
(1.2.3)	—	6 1 3 2
$(2.1.3) = (1.3.3)_+$		3 2 7 3 9 1
	—	1
(2.2.3)	—	3 2 7 3 9
$(2.3.3)_+$		0 0 0 0 0 0
(0.2.2)		3
		9
(0.4.2)		3
$(0.5.2)_+$		9 6
(1.1.2)		9 6
(1.2.2)		6 2
(1.3.2)		1 0 2 2
		4
(1.4.2)		6 2
$(1.5.2)_+$		1 0 8 8
(2.1.2)		1 0 8 8
(2.2.2)	{	3 2
		1
(2.3.2)		1 0 9 1 3
(0.1.1)		1 0
(1.1.1)		1 0
(2.1.1)		1 0

الجدول رقم (١ ـ ٨)

$x^3+ax^2=N$
$a=3\,000$
$N=342\,199\,161$

(2.0)		3 2 1
(1.0)		3 2
(0.0)		3
(0.1.3)		3 4 2 1 9 9 1 6 1
	—	2 7
(0.2.3)	—	2 7
$(1.1.3)=(0.3.3)_+$		4 5 1 9 9 1 6 1
	—	8
(1.2.3)	—	4 2 9 6
$(2.1.3)=(1.3.3)_+$		2 2 3 1 1 6 1
	—	1
(2.2.3)	—	2 2 3 1 1 6
$(2.3.3)_+$		0 0 0 0 0 0 0
(0.2.2)		3
		9
(0.4.2)		3
$(0.5.2)_+$		6 9
(1.1.2)		6 9
(1.2.2)		2 6
(1.3.2)		7 1 6
		4
(1.4.2)		2 6
$(1.5.2)_+$		7 4 2 4
(2.1.2)		7 4 2 4
(2.2.2)		1 3 2
(2.3.2)		7 4 3 7 2
(0.1.1)		1
(1.1.1)		1
(2.1.1)		1

الجدول رقم (١ ـ ٩)

$x^3 = ax^2 + N$	(2.0)+(2.1.1)	3 1 1
$a = 30$	(2.0.3)	1
N = 29 984 931		3 1
	(1.0)+(1.1.1)	3 1
	(1.0.2)	2
	(1.0.1)+(1.1.1)	2 9
	(0.0)+(0.1.1)	2 9
	(0.0)	3
	(0.1.3)	2 9 9 8 4 9 3 1
	(0.2.3)	— −2 7
		— 2 7
	$(1.1.3) = (0.3.3)_+$	5 6 8 4 9 3 1
		8
	(1.2.3)	— 5 3 8 8
	$(2.1.3) = (1.3.3)_+$	2 8 8 9 3 1
		— 1
	(2.2.3)	— 2 8 8 9 3 0
	$(2.3.3)_+$	0 0 0 0 0 0
	(0.2.2)'	−9
		9
	(0.2.2)	−3
	$(0.3.2)_+$	8 7
	(0.4.2)	−3
	$(0.5.2)_+$	8 4
	(1.1.2)	8 4
	(1.2.2)	5 8
	(1.3.2)	8 9 8
	(1.4.2)	5 8
		4
	$(1.5.2)_+$	9 6 0
	(2.1.2)	9 6 0
	(2.2.2)	3 1
	(2.3.2)	9 6 3 1
	←[a]	−3
	(0.1.1)	−1
	(1.1.1)	− 1
	(2.1.1)	− 1

الجدول رقم (١ ـ ١٠)

(*) الخطوات التي نتائجها الصفر، غير مشار إليها في الجدول.

$x^3 = ax^2 + N$
$a = 312$
$N = 927\ 369$

(2.0)+(2.1.1)		217
(2.0.3)		1
		216
(1.0)+(1.1.1)		216
(1.0.2)		2
(1.0.1)+(1.1.1)		196
(0.0)+(0.1.1)		196
(0.0)		3
(0.1.3)		00927369
(0.2.3)	—	−2808
	—	27
$(1.1.3) = (0.3.3)_+$		2007369
	—	8
(1.2.3)	—	18912
$(2.1.3) = (1.3.3)_+$		108169
	—	1
(2.2.3)	—	108168
$(2.3.3)_+$		000000
(0.2.2)'		−936
		9
(0.2.2)		−312
$(0.3.2)_+$		588
(0.4.2)		−312
$(0.5.2)_+$		276
(1.1.2)		276
(1.2.2)		392
(1.3.2)		3152
		4
(1.4.2)		392
$(1.5.2)_+$		3584
(2.1.2)		3584
(2.3.2)		216
(2.4.2)		36056
هـ [a]		−312
(0.1.1)		−104
(1.1.1)	—	104
(2.1.1)	—	104

الجدول رقم (١ ـ ١١)

$x^3 + ax^2 + bx = N$

$a = 12$

$b = 102$

$N = 34\ 345\ 395$

(2.0)		3 2 1
(1.0)		3 2
(0.0)		3
(0.1.3)		3 4 3 4 5 3 9 5
	—	2 7
(0.2.3)	—	1 1 1 0 6
(1.1.3) = $(0.3.3)_+$		6 2 3 4 7 9 5
	—	8
(1.2.3)	—	5 9 1 0 8 4
(2.1.3) = $(1.3.3)_+$		3 1 5 9 5 5
	—	1
(2.2.3)		3 1 5 9 5 4
$(2.3.3)_+$		0 0 0 0 0 0
(0.1.2)		3 4
(0.2.2)		1 2
(0.3.2)		1 2 3 4
		9
(0.4.2)		1 2
$(0.5.2)_+$		9 2 4 3 4
(1.1.2)		9 2 4 3 4
(1.2.2)		6 8
(1.3.2)		9 8 5 1 4
		4
(1.4.2)		6 8
$(1.5.2)_+$		1 0 4 9 9 4
(2.1.2)		1 0 4 9 9 4
(2.2.2)		3 2 4
(2.3.2)		1 0 5 3 1 8
(0.1.1)		4
(1.1.1)		4
(2.1.1)		4

الجدول رقم (١ ـ ١٢)

$$x^3 + ax^2 + bx = N$$
$$a = 6$$
$$b = 3\ 000\ 000$$
$$N = 996\ 694\ 407$$

(2.0)		3 2 1
(1.0)		3 2
(0.0)		3
(0.1.3)		9 9 6 6 9 4 4 0 7
	—	2 7
(0.2.3)	—	9 0 0 5 4
(1.1.3) = (0.3.3)$_+$		6 9 1 5 4 4 0 7
	—	8
(1.2.3)	—	6 5 8 3 4 4
(2.1.3) = (1.3.3)$_+$		3 3 1 2 0 0 7
	—	1
(2.2.3)	—	3 3 1 2 0 0 6
(2.3.3)$_+$		0 0 0 0 0 0 0
$\xleftarrow{2}[a]$		3
(0.1.2)		1
(0.2.2)		6
(0.3.2)		1 6
		9
(0.4.2)		6
(0.5.2)$_+$		1 9 1 2
(1.1.2)		1 9 1 2
(1.2.2)		6
		4
(1.3.2)		1 9 7 2 4
		4
(1.4.2)		6 4
(1.5.2)$_+$		1 1 0 3 6 8
(2.1.2)		1 1 0 3 6 8
(2.2.2)		3 2 2
(2.3.2)		1 1 0 4 0 0 2
$\xleftarrow{4}[a]$		6
(0.1.1)		2
(1.1.1)		2
(2.1.1)		2

الجدول رقم (١ ـ ١٣)

(*) يشير الرمز $\xleftarrow{n}[a]$ إلى إزاحة العدد a، n منزلة عشرية.

$x^3 + ax^2 + bx = N$
$a = 30\,000$
$b = 30$
$N = 3\,124\,315\,791$

(2.0)		3 2 1
(1.0)		3 2
(0.0)		3
(0.1.3)		3 1 2 4 3 1 5 7 9 1
	—	2 7
(0.2.3)	—	2 7 9
$(1.1.3) = (0.3.3)_+$		3 9 7 3 0 6 7 9 1
	—	8
(1.2.3)	—	3 7 7 7 6 6
$(2.1.3) = (1.3.3)_+$		1 9 5 3 8 1 9 1
	—	1
(2.2.3)	—	1 9 5 3 8 1 9
$(2.3.3)_+$		0 0 0 0 0 0 0 0
← [b]		3
(0.1.2)		1
(0.2.2)		3
(0.3.2)		3 1
		9
(0.4.2)		3
$(0.5.2)_+$		6 9 1
(1.1.2)		6 9 1
(1.2.2)		2 6
(1.3.2)		6 2 9 6 1
		4
(1.4.2)		2 6
$(1.5.2)_+$		6 5 0 2 4 1
(2.1.2)		6 5 0 2 4 1
(2.2.2)		1 3 2
(2.3.2)		6 5 1 2 7 3
← [a]		3
(0.1.1)		1
(1.1.1)		1
(2.1.1)		1

الجدول رقم (١ ـ ١٤)

$x^3 = ax^2 + bx + N$

$a = 30 \quad b = 600$

$N = 29\ 792\ 331$

(2.0)+(2.1.1)		3 1 1
(2.0.3)		1
		3 1
(1.0)+(1.1.1)		3 1
(1.0.2)		2
(1.0.1)+(1.1.1)		2 9
(0.0)+(0.1.1)		2 9
(0.0)		3
(0.1.3)		2 9 7 9 2 3 3 1
(0.2.3)	—	−2 8 8 0 0
	—	2 7
$(1.1.3) = (0.3.3)_+$		0 5 6 7 2 3 3 1
	—	8
(1.2.3)	—	5 3 7 6 0 0
$(2.1.3) = (1.3.3)_+$		2 8 8 3 3 1
	—	1
(2.2.3)	—	2 8 8 3 3 0
$(2.3.3)_+$		0 0 0 0 0 0
$\overset{2}{\leftarrow}[b]$	—	−6 0 0
(0.1.2)		−2 0 0
(0.2.2)		−3
(0.3.2)		−3 2 0 0
		9
$(0.1.2)_+$		8 9 8 0 0
(0.2.2)		−3
$(0.3.2)_+$		8 6 8 0 0
(0.4.2)		−3
$(0.5.2)_+$		8 3 8 0 0
(1.1.2)		8 3 8 0 0
(1.2.2)		5 8
(1.3.2)		8 9 6 0 0
		4
(1.4.2)		5 8
$(1.5.2)_+$		9 5 8 0 0
(2.1.2)		9 5 8 0 0
(2.2.2)		3 1 0
(2.3.2)		9 6 1 1 0
$\overset{4}{\leftarrow}[a]$		−3 0
(1.0.1)		−1 0
(1.1.1)		−1
(2.1.1)		−1

الجدول رقم (١ ـ ١٥)

$x^3 = ax^2 + bx + N$
$a = 99$
$b = 70\,200$
$N = 340\,902$

(2.0)+(2.1.1)	2 8 8
(2.0.3)	1
	2 8 7
(1.0)+(1.1.1)	2 8 7
(1.0.2)	2
(1.0.1)+(1.1.1)	2 6 7
(0.0)+(0.1.1)	2 6 7
(0.0)	3
(0.1.3)	0 0 3 4 0 9 0 2
(0.2.3)	— −2 9 9 7 0 0
	−2 7
$(1.1.3) = (0.3.3)_+$	3 3 1 0 9 0 2
	− 8
(1.2.3)	3 1 2 8 4
$(2.1.3) = (1.3.3)_+$	1 7 4 5 0 2
	− 1
(2.2.3)	− 1 7 4 5 0 1
$(3.2.3)_+$	0 0 0 0 0 0
(0.1.2)'	− 7 0 2 0 0
(0.2.2)'	− 2 9 7
(0.3.2)'	− 9 9 9 0 0
(0.1.2)	− 2 3 4 0 0
	9
$(0.1.2)_+$	6 6 6 0 0
(0.2.2)	−9 9
$(0.3.2)_+$	5 6 7 0 0
(0.4.2)	−9 9
$(0.5.2)_+$	4 6 8 0 0
(1.1.2)	4 6 8 0 0
(1.2.2)	5 3 4
(1.3.2)	5 2 1 4 0
	4
(1.4.2)	5 3 4
$(1.5.2)_+$	5 7 8 8 0
(2.1.2)	5 7 8 8 0
(2.2.2)	2 8 7
(2.3.2)	5 8 1 6 7
← [a]	− 9 9
(0.1.1)	− 3 3
(1.1.1)	− 3 3
(2.1.1)	3 3

الجدول رقم (١ ـ ١٦)

$(0, i, j)'$ تعني استعمال a, b بدل a', b'.

$(0, i, j)+$ تعني أن حداً قد أضيف.

$x^3 = ax^2 + bx + N$
$a = 300$
$b = 6\,000$
$N = 237\,861$

(2.0)+(2.1.1)	2 2 1
(2.0.3)	1
	2 2
(1.0)+(1.1.1)	2 2
(1.0.2)	2
(1.0.1)+(1.1.1)	2
(0.0)+(0.1.1)	2
(0.0)	3
(0.1.3)	0 2 3 7 8 6 1
(0.2.3)	— −2 7 *
	— −1 8
	— 2 7 *
$(1.1.3) = (0.3.3)_+$	2 0 3 7 8 6 1
	— 8
(1.2.3)	— 1 9 2
$(2.1.3) = (1.3.3)_+$	1 0 9 8 6 1
	— 1
(2.2.3)	— 1 0 9 8 6
$(2.3.3)_+$	0 0 0 0 0 0
(0.1.2)'	−6
$(0.2.2)'_*$	−9
$(0.3.2)'_*$	−9 6
	9
(0.1.2)	−2
$(0.1.2)_+$	8 8
(0.2.2)	−3
$(0.3.2)_+$	5 8
(0.4.2)	−3
$(0.5.2)_+$	2 8
(1.1.2)	2 8
(1.2.2)	4
(1.3.2)	3 2
	4
(1.4.2)	4
$(1.5.2)_+$	3 6 4
(2.1.2)	3 6 4
(2.2.2)	2 2
(2.3.2)	3 6 6 2
4 [a]	−3
(0.1.1)	−1
(1.1.1)	−1
(2.1.1)	−1

الجدول رقم (١ ـ ١٧)

(*) خطوط أهملها الطوسي.

$x^3 + ax^2 = bx + N$
$a = 30$
$b = 60$
$N = 36\,148\,131$

(2.0)		321
(1.0)		32
(0.0)		3
(0.1.3)		36148131
$\sigma_o^3 + (0.2.3)$	—	29682
$(1.1.3) = (0.3.3)_+$		6466131
	—	8
(1.2.3)	—	61308
$(2.1.3) = (1.3.3)_+$		327331
	—	1
(2.2.3)	—	32733
$(2.3.3)_+$		000000
$\overset{2}{\leftarrow}[-b]$	—	60
(0.1.2)	—	20
$\overset{6}{\leftarrow}(\sigma_o^2/3)$		3
		29980
(0.2.2)		3
$(0.3.2) + [\overset{6}{\leftarrow}\sigma_o^2/3]$		32980
$\overset{6}{\leftarrow}(2/3)\sigma_o^2$		6
(0.4.2)		3
$(0.5.2)_+$		95980
(1.1.2)		95980
(1.2.2)		62
(1.3.2)		102180
		4
(1.4.2)		62
$(1.5.2)_+$		108780
(2.1.2)		108780
(2.2.2)	{	32
		1
(2.3.2)		109110
$\overset{4}{\leftarrow}[a]$		3
(0.1.1)		1
(1.1.1)		1
(2.1.1)		1

الجدول رقم (١ ـ ١٨)

$x^3 + ax^2 = bx + N$
$a = 3$
$b = 102\ 000$
$N = 643\ 284$

(2.0)		3 2 1
(1.0)		3 2
(0.0)		3
(0.1.3)		0 0 6 4 3 2 8 4
(0.2.3)	{	3 0 6
	—	2 7
$\overset{6}{\leftarrow}\sigma_o^3$	—	2 7
(1.1.3) = $(0.3.3)_+$		3 9 7 3 2 8 4
	—	8
(1.2.3)	—	3 7 5 7 2
(2.1.3) = $(1.3.3)_+$		2 0 8 0 8 4
	—	1
(2.2.3)	—	2 0 8 0 8 3
$(2.3.3)_+$		0 0 0 0 0 0
$\overset{2}{\leftarrow} b$		1 0 2
(0.1.2)	—	3 4
(0.2.2)		3
		9
(0.4.2)		3
$(0.5.2)_+$		5 6 6
(1.1.2)		5 6 6
(1.2.2)		6 2
(1.3.2)		6 2 6 2
		4
(1.4.2)		6 2
$(1.5.2)_+$		6 9 0 4
(2.1.2)		6 9 0 4
(2.2.2)		3 2 1
(2.3.2)		6 9 3 6 1
$\overset{4}{\leftarrow} a$		3
(0.1.1)		1
(1.1.1)		1
(2.1.1)		1

الجدول رقم (١ ـ ١٩)

$x^3 + ax^2 = bx + N$

$a = 3\,000$

$b = 300$

$N = 342\,102\,861$

(0.2)		3 2 1
(0.1)		3 2
(0.0)		3
(0.1.3)		3 4 2 1 0 2 8 6 1
(0.2.3)	{	9
	—	2 7
	—	2 7
$(1.1.3) = (0.3.3)_+$		4 5 1 9 2 8 6 1
	—	8
(1.2.3)	—	4 2 9 5 4
$(2.1.3) = (1.3.3)_+$		2 2 3 0 8 6 1
	—	1
(2.2.3)	—	2 2 3 0 8 6
$(2.3.3)_+$		0 0 0 0 0 0 0
← b	—	3
(0.1.2)	—	1
(0.2.2)		3
		9
(0.4.2)		3
$(0.5.2)_+$		6 8 9 9
(1.1.2)		6 8 9 9
(1.2.2)		2 6
(1.3.2)		7 1 5 9
		4
(1.4.2)		2 6
$(1.5.2)_+$		7 4 2 3
(2.1.2)		7 4 2 3
(2.2.2)		1 3 2
(2.3.2)		7 4 3 6 2
← a		3
(0.1.1)		1
(1.1.1)		1
(2.1.1)		1

الجدول رقم (١ ـ ٢٠)

$x^3 + bx = ax^2 + N$
$a = 30$
$b = 300$
$N = 30\ 081\ 231$

(2.0)+(2.1.1)	3 1 1
(2.0.3)	1
	3 1
(1.0)+(1.1.1)	3 1
(1.0.2)	2
(1.0.1)+(1.1.1)	2 9
(0.0)+(0.1.1)	2 9
(0.0)	3
(0.1.3)	3 0 0 8 1 2 3 1
$(0.2.3)_+$	— 2 4 3 9
$(1.1.3) = (0.3.3)_+$	5 6 9 1 2 3 1
	— 8
(1.2.3)	— 5 3 9 4
$(2.1.3) = (1.3.3)_+$	2 8 9 2 3 1
	— 1
(2.2.3)	— 2 8 9 2 3
$(2.3.3)_+$	0 0 0 0 0 0
$(0.1.2)'_+$	9 3
(0.2.2)'	−9
$(0.3.2)'_+$	8 1 3
(0.1.2)	1
	9
(0.2.2)	−3
$(0.3.2)_+$	8 7 1
(0.4.2)	−3
$(0.5.2)_+$	8 4 1
(1.1.2)	8 4 1
(1.2.2)	5 8
(1.3.2)	8 9 9
	4
(1.4.2)	5 8
$(1.5.2)_+$	9 6 1
(2.1.2)	9 6 1
(2.2.2)	3 1
(2.3.2)	9 6 4 1
ج[a]	−3
(0.1.1)	−1
(1.1.1)	−1
(2.1.1)	−1

الجدول رقم (١ ـ ٢١)

$x^3+bx=ax^2+N$
$a=30$
$b=3\times10^6$
$N=992\ 984\ 931$

(2.0)+(2.1.1)		3 1 1
(2.0.3)		1
		3 1
(1.0)+(1.1.1)		3 1
(1.0.2)		2
(1.0.1)+(1.1.1)		2 9
(0.0)+(0.1.1)		2 9
(0.0)		3
(0.1.3)		9 9 2 9 8 4 9 3 1
(0.2.3)	—	8 9 7 3
	—	2 7
$(1.1.3)=(0.3.3)_+$		6 8 6 8 4 9 3 1
	—	8
(1.2.3)	—	6 5 3 8 8
$(2.1.3)=(1.3.3)_+$		3 2 8 8 9 3 1
	—	1
(2.2.3)	—	3 2 8 8 9 3
$(2.3.3)_+$		0 0 0 0 0 0 0
		3
(0.1.2)		1
(0.2.2)		−3
(0.3.2)		9 9 7
		9
(0.4.2)		−3
$(0.5.2)_+$		1 0 8 4
(1.1.2)		1 0 8 4
(1.2.2)		5 8
(1.3.2)		1 0 8 9 8
		4
(1.4.2)		5 8
$(1.5.2)_+$		1 0 9 6 0
(2.1.2)		1 0 9 6 0
(2.2.2)		3 1
(2.3.2)		1 0 9 6 3 1
		−3
(0.1.1)		−1
(1.1.1)		−1
(2.1.1)		−1

الجدول رقم (١ ـ ٢٢)

$x^3+bx=ax^2+N$
$a=321$
$b=300$
$N=96\,300$

(2.0)+(2.1.1)		2 1 4
(2.0.3)		1
		2 1 3
(1.0)+(1.1.1)		2 1 3
(1.0.2)		2
(1.0.1)+(1.1.1)		1 9 3
(0.0)+(0.1.1)		1 9 3
(0.0)		3
(0.1.3)		0 0 9 6 3 0 0
	—	−2 8 8 9
(0.2.3)	—	9
	—	2 7
$(1.1.3)=(0.3.3)_+$		1 8 9 6 3 0 0
	—	8
(1.2.3)	—	1 7 8 5 6
$(2.1.3)=(1.3.3)_+$		1 0 2 7 0 0
	—	1
(2.2.3)	—	1 0 2 6 9 9
$(2.3.3)_+$		0 0 0 0 0 0
(0.1.2)'		3
(0.2.2)'		−9 6 3
(0.1.2)		1
		9
(0.2.2)		−3 2 1
$(0.3.2)_+$		5 8 0
(0.4.2)		−3 2 1
$(0.5.2)_+$		2 5 9
(1.1.2)		2 5 9
(1.2.2)		3 8 6
(1.3.2)		2 9 7 6
		4
(1.4.2)		3 8 6
$(1.5.2)_+$		3 4 0 2
(2.1.2)		3 4 0 2
(2.2.2)		2 1 3
(2.3.2)		3 4 2 3 3
ـه [a]		−3 2 1
(0.1.1)		−1 0 7
(1.1.1)		−1 0 7
(2.1.1)		−1 0 7

الجدول رقم (١ ـ ٢٣)

الفصل الثاني

نــقــل وتعليــق رياضــي

(المعـادلات ١ ــ ٢٠)

في مقدمة الرسالة، يعرّف الطوسي القطوع المخروطية الثلاثة ويدرس خصائص نقاطها كما يعالج بعض المسائل المتعلقة ببنائها. وسوف نلاحظ أنه في البناء الخامس برهن أن خاصية المنحني المدروس هي خاصية مميّزة، الأمر الذي يعود إلى إعطاء معادلة لهذا المنحني.

تعريفات

نشير بالحرف $\mathscr{C}$ إلى مخروط محوره AD وبـ $\mathscr{P}$ إلى سطح يمر بـ AD وبـ Q إلى سطح عمودي على $\mathscr{P}$.

تقاطع Q و $\mathscr{C}$ يقال له قِطْعٌ مخروطي؛ وتقاطع Q و $\mathscr{P}$ يقال له قطر القِطع، والأعمدة الخارجة من محيط القطع إلى القطر يقال لها خطوط الترتيب للقِطْع.

نفرض أن تقاطع $\mathscr{P}$ و $\mathscr{C}$ يُعطي المثلث ABC، حيث $AB = AC$، وأن Q يقطع AB في النقطة E بين A و B:

* وإذا كان $Q//AC$، (Q موازياً لِـ AC) يسمى القطع **مكافئاً**.

* وإذا قَطَعَ Q الخط AC من جهة الرأس A، يسمى القِطع **زائداً**.

* وإذا قطع Q الخط AC بين A و C يسمى القِطع **ناقصاً**.

* وإذا كان E هو رأس القطع المكافىء وA هو رأس المخروط فإن $2EA$ يقال له **الضلع القائم** للقطع المكافئ ويُقال لِـ EA وسيط (paramètre) القِطع.

* إذا كان E و F رأسي القطع الزائد فإن EF يسمى **القطر المجانب** للقطع الزائد.

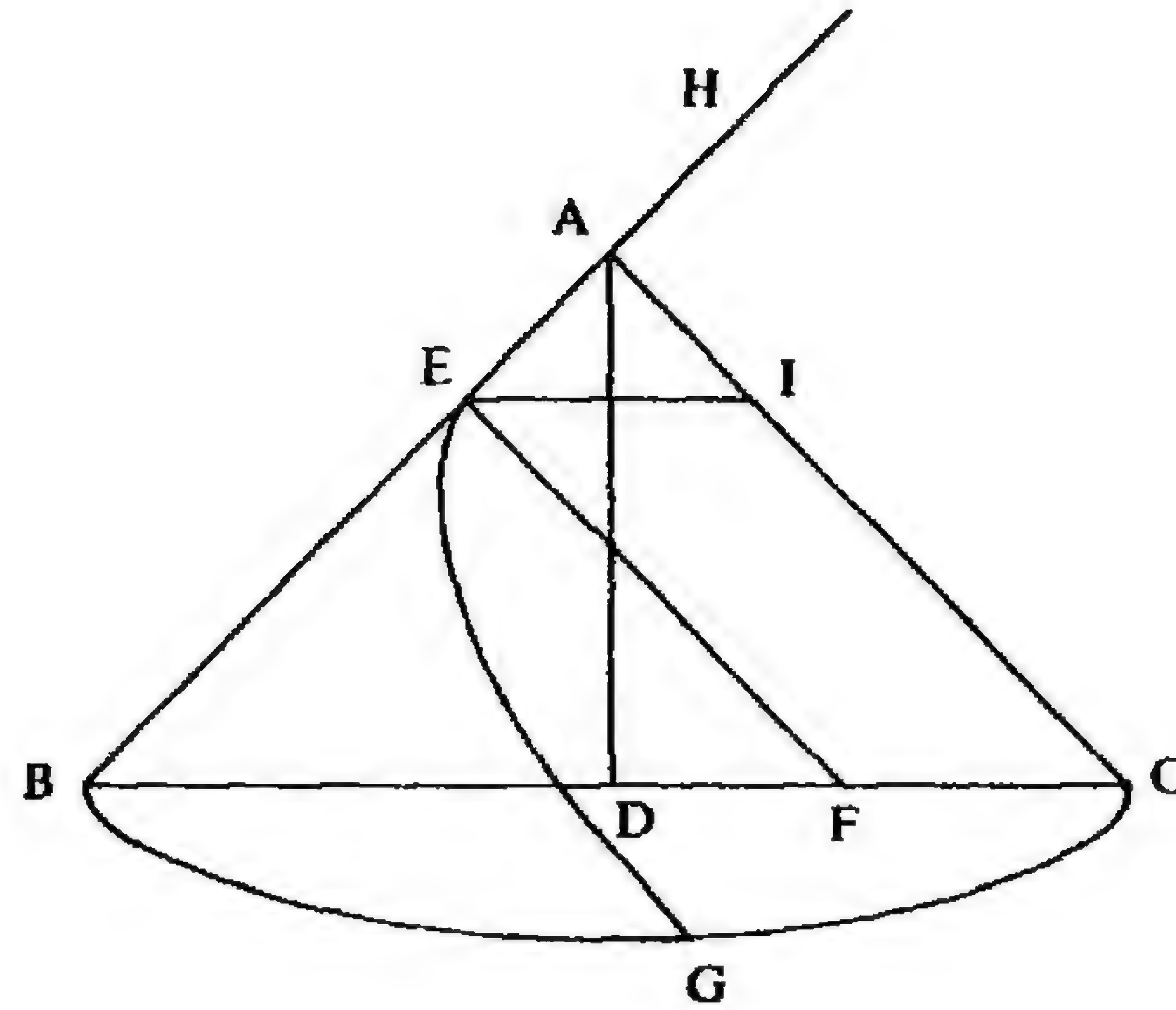
تعليق

التحديدات السابقة استخدمها الطوسي بالنسبة إلى مخروط دائري حيث $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$ (زاوية قائمة) وهذه التحديدات صالحة بالنسبة إلى أي مخروط دائري، باستثناء تعريف الضلع القائم للقطع المكافئ(*).

القضية ١

لنعتبر أن $\mathscr{P}$ قطع مكافىء ضلعه القائم a ورأسه E، ولنعتبر أن F نقطة من قطره، يقابلها خط الترتيب FG. في هذه الحالة يكون لدينا:

$$a.EF = FG^2$$



الشكل رقم (٢ ـ ١)[١]

البرهان: $GF \perp EF$ فيكون $GF \perp (ABC)$ وبالتالي $GF \perp BC$ و$GF = (EFG) \cap (BGC)$. وللبرهان على ذلك نفرض أن GF' خط موجود في السطح (BGC) وأن $GF' \perp BC$؛ عند ذلك يكون GF و GF' عمودين على BC خارجين من النقطة نفسها، وهذا محال.

(*) انظر: أبولونيوس، **المخروطات** (استنبول، مخطوطة آيا صوفيا، ٢٧٦٢)، الكتاب الأول، القضية *XI*.

(١) ترقيم الأشكال إضافة من قبلنا؛ والأحرف الأبجدية اللاتينية على الأشكال، تقابل أحرفاً عربية في النص الأصلي (أ = A؛ ب = B؛ ج = C؛ . . .).

بناء على ما تقدم يكون لدينا:

$CF . BF = GF^2$ (قدرة النقطة F بالنسبة إلى الدائرة BGC).

ولنعتبر أن I نقطة على AC بحيث يكون $EI//BC$؛ فيكون لدينا $EI = FC$ وبالتالي:

$$EI . BF = GF^2.$$

ولكن $\widehat{BEF} = \widehat{EAI} = \frac{\pi}{2}$ وبالتالي $\widehat{B} = \frac{\pi}{4}$ و $\widehat{BFE} = \frac{\pi}{4}$، مما يعطي $BE = EF$ وَ $BF^2 = 2EF^2$. ولكن $\widehat{B} = \widehat{AEI}$ و $\widehat{C} = \widehat{AIE}$، فيكون $AE = AI$ و $EI^2 = 2AE^2$، كما أن $EH^2 = 4AE^2$ وبالتالي يكون $EH^2 = 2EI^2$؛ من هنا تنتج العلاقة:

$$\frac{EH^2}{EI^2} = \frac{BF^2}{EF^2} \quad \text{وَ} \quad \frac{EH}{EI} = \frac{BF}{EF}.$$

التي تعطي

$$EH . EF = EI . BF = GF^2 ,$$

ومنها

$$a . EF = FG^2.$$

وهي خاصية تتمتع بها أية نقطة F من قطر القِطع المكافئ $\mathscr{P}$.

تعليق

في حالة مخروط دائري حيث $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$، يبرهن الطوسي أنه إذا كان $\mathscr{R}$ هو القطع المكافئ، وإذا كان (x, y) إحداثيي أية نقطة M من $\mathscr{R}$ بالنسبة إلى محورين مميزين: $x = GF$ وَ $y = EF$، عند ذلك يحقق x و y (وهما إحداثيا M) العلاقة $ay = x^2$ حيث a عدد مُعطى $(a = 2AE)$. لكن الطوسي لا يدرس القضية العكسية، أي القضية التي تنص على أن أية نقطة $M = (x, y)$ من السطح تحقق إحداثياتها العلاقة $x^2 = ay$ هي بالضرورة نقطة من القِطع المكافئ $\mathscr{R}$؛ لذلك فهو لم يعطِ معادلة لـ $\mathscr{P}$ بالشكل الكامل.

ومن جهة أخرى، في حالة مخروط دائري، بشكلٍ عام $\left(\frac{\pi}{2} \neq \widehat{BAC}\right)$، إذا وضعنا $\alpha = \widehat{BAC} = \widehat{BEF}$ يكون لدينا:

$$BF = 2EF \sin \frac{\alpha}{2} ,$$

$$EI = 2AE \sin \frac{\alpha}{2} = FC ;$$

وإذا وضعنا $EF = y$، $GF = x$، استناداً إلى العلاقة:

$$GF^2 = BF \cdot FC$$

يمكن أن نكتب:

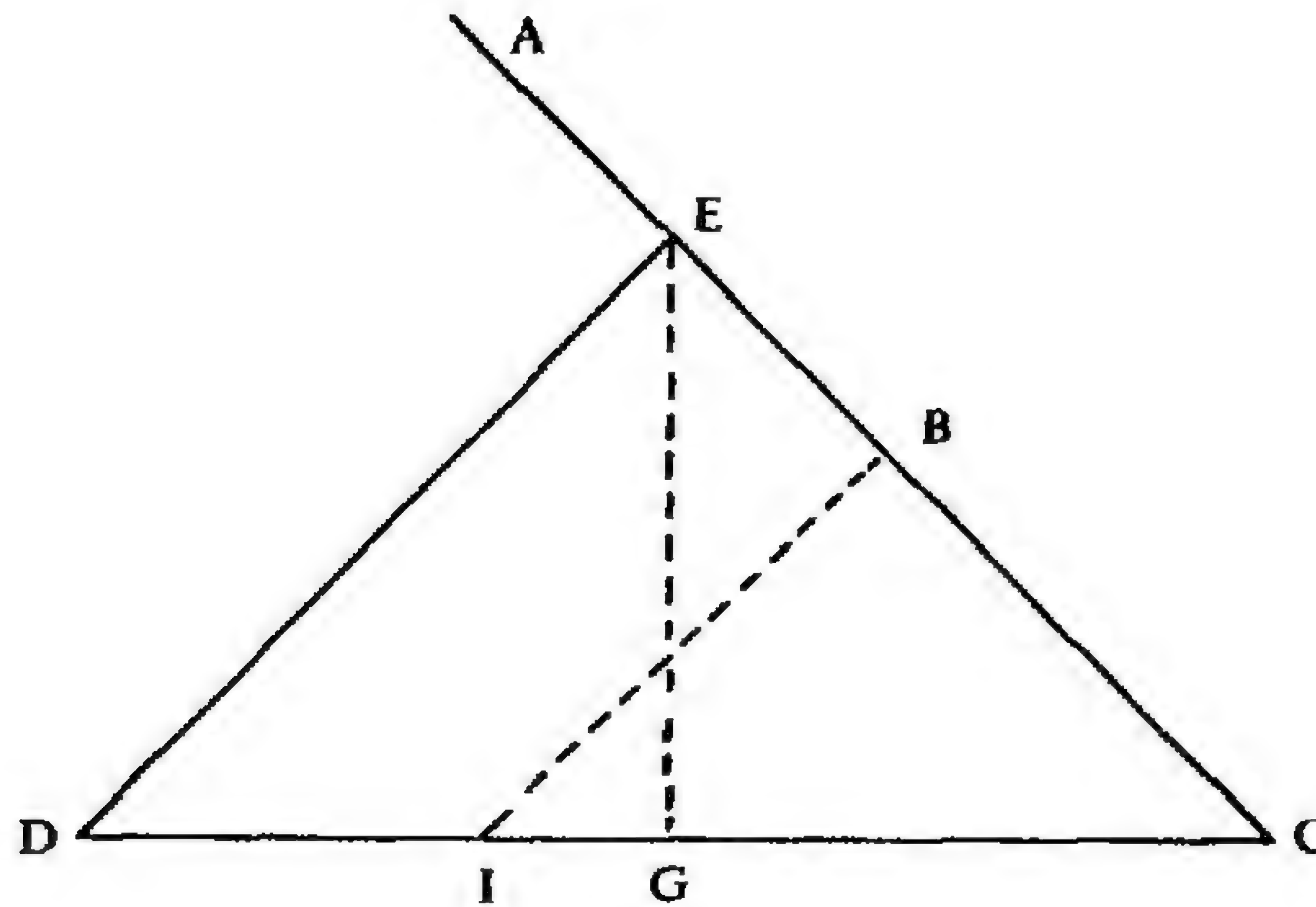
$$x^2 = y \times 4AE \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

وهذه العلاقة لها الشكل $x^2 = ay$ حيث $a = 4AE \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ وفي حال $\alpha = \frac{\pi}{2}$، $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$، نحصل على ما توصل إليه الطوسي ($a = 2AE$).

البناء الأول

بناء قطع مكافئ ضلعه القائم a:

نأخذ $AB = a$، ونسمي E منتصف AB. ومن ثم نخرج من E الخط ED، $ED \perp AB$ ونأخذ على AB النقطة C بحيث يكون $EC = ED$؛ نجمع CD وننصّفها على النقطة G (الشكل رقم (٢ ـ ٢))، فيكون $EG \perp DC$. ومن النقطة B نخرج BI، $BI // ED$، I على CD. دوران المثلث EGD[٢] حول EG (حتى انطباقه على المثلث EGC (المترجم)) يُحدِث نصف مخروط $\mathscr{C}$. إذا كان Q سطحاً يمر بـ BI، $Q \perp (EDC)$، يكون $Q \cap \mathscr{C}$ هو القطع المكافئ المطلوب.



الشكل رقم (٢ ـ ٢)

تعليق

لا يستخدم المؤلف سوى تعريف القِطع المكافئ كقطع مسطح لمخروط دائري زاويته الرأسية قائمة.

---

(٢) الدوران الوهمي («نتوهم حركة مثلث...» بحسب تعبير الطوسي). (المترجم).

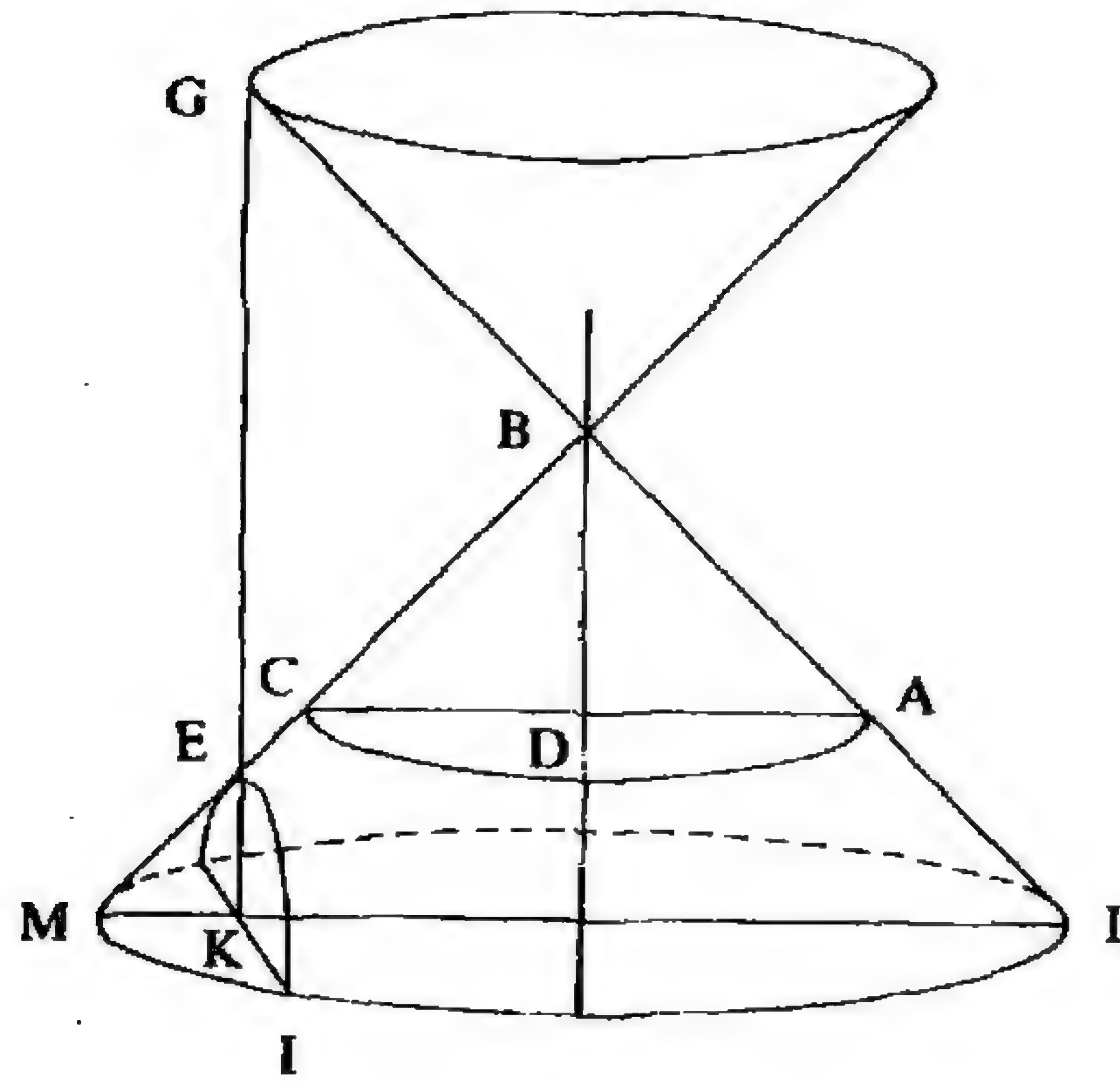
القضية ٢

لنأخذ قطعاً زائداً $\mathscr{H}$، قطره المجانب EG، ونقطة K من هذا القطر يقابلها خط الترتيب KI. عندها يكون لدينا:

$(EG + EK) . EK = IK^2$ (الشكل رقم (٢ ـ ٣))

البرهان: نسمي B رأس المخروط $\mathscr{C}$ ونأخذ $BA = BC$ و $BD \perp AC$؛ فالزاوية ABC قائمة، ودوران المثلث[٣] BDC حول BD (حتى انطباقه على المثلث BDA (المترجم)) يُحدِث نصف مخروط، وDC يحدث نصف دائرة في سطح قائم على (BAC).

لنأخذ E على BC ولنأخذ $KE//BD$. معنا $\widehat{BEG} = \widehat{EBD}$ و $\widehat{EBD} < \frac{\pi}{2}$، لذلك $\widehat{BEG} < \frac{\pi}{2}$. وبما أن $\widehat{EBA} = \frac{\pi}{2}$، يكون $\widehat{BEG} + \widehat{EBG} < \pi$. لذلك يلتقي امتداد EK امتداد AB في نقطة نسميها G.



الشكل رقم (٢ ـ ٣)

نفرض أن Q سطح يحتوي KG بحيث يكون $Q \perp (ABC)$، عند ذلك يكون لدينا القِطع الزائد $Q \cap \mathscr{C} = \mathscr{H}$ ويكون EG قطره المجانب. ونفرض أن LKM خط موازٍ لِـ AC وأن (LIM) هو السطح المحتوي على LKM، بحيث يكون

(٣) انظر الهامش رقم (٢) السابق. (المترجم).

$(LIM) \perp (ABC)$؛ فيكون التقاطع $\mathscr{C} \cap (LIM)$ دائرة. لكن $LKM \perp BD$ و$IK = Q \cap (LIM)$ لسببٍ مماثل لما ورد في القضية ١. كما أن $\widehat{EKM} = \frac{\pi}{2}$ و$\widehat{EMK} = \frac{\pi}{4}$؛ لذلك $\widehat{MEK} = \frac{\pi}{4}$ وَ $EK = KM$. وبطريقة مماثلة نحصل على $\widehat{GKL} = \frac{\pi}{2}$، $\widehat{GLK} = \frac{\pi}{4}$، لذلك $\widehat{LGK} = \frac{\pi}{4}$; و $GK = KL$. لكن

$KM \,.\, KL = KI^2$، (قدرة K)،

وبالتالي:

$$KE \,.\, KG = KI^2 \,.$$

وهذه العلاقة قائمة بالنسبة إلى أية نقطة K من القطر.

تعليق

في حالة كون المخروط دورانياً، $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$ و Q موازياً لمحور المخروط، يكون $\mathscr{H}$ قطعاً زائداً متساوي الأضلاع. ويبرهن الطوسي أنه إذا كان (x, y) إحداثيي نقطة M، من $\mathscr{H}$ بالنسبة إلى محورين متعامدين $x = OK$، $y = KI$، حيث O هي النقطة المنصّفة لِـ EG، فعندها يكون:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

حيث a هو نصف القطر المجانب، $a = OE$. ولتبيان ذلك نلاحظ أن العلاقة $KI^2 = KE \,.\, KG$ تُكتب:

$$KI^2 = (KO + OE) \,.\, (KO - OE) = KO^2 - OE^2$$

وتعطي بالتالي $y^2 = x^2 - a^2$.

وعلى غرار ما ورد في القضية ١ لا يتطرق الطوسي إلى القضية العكسية.

وفي حالة مخروط دوراني عادي $\widehat{ABC} = \alpha$ وحيث $Q // BD$ يكون لدينا:

$$LK = KG \; tg \, \frac{\alpha}{2} \quad \text{وَ} \quad KM = KE \; tg \, \frac{\alpha}{2}$$

فإذا ما وضعنا

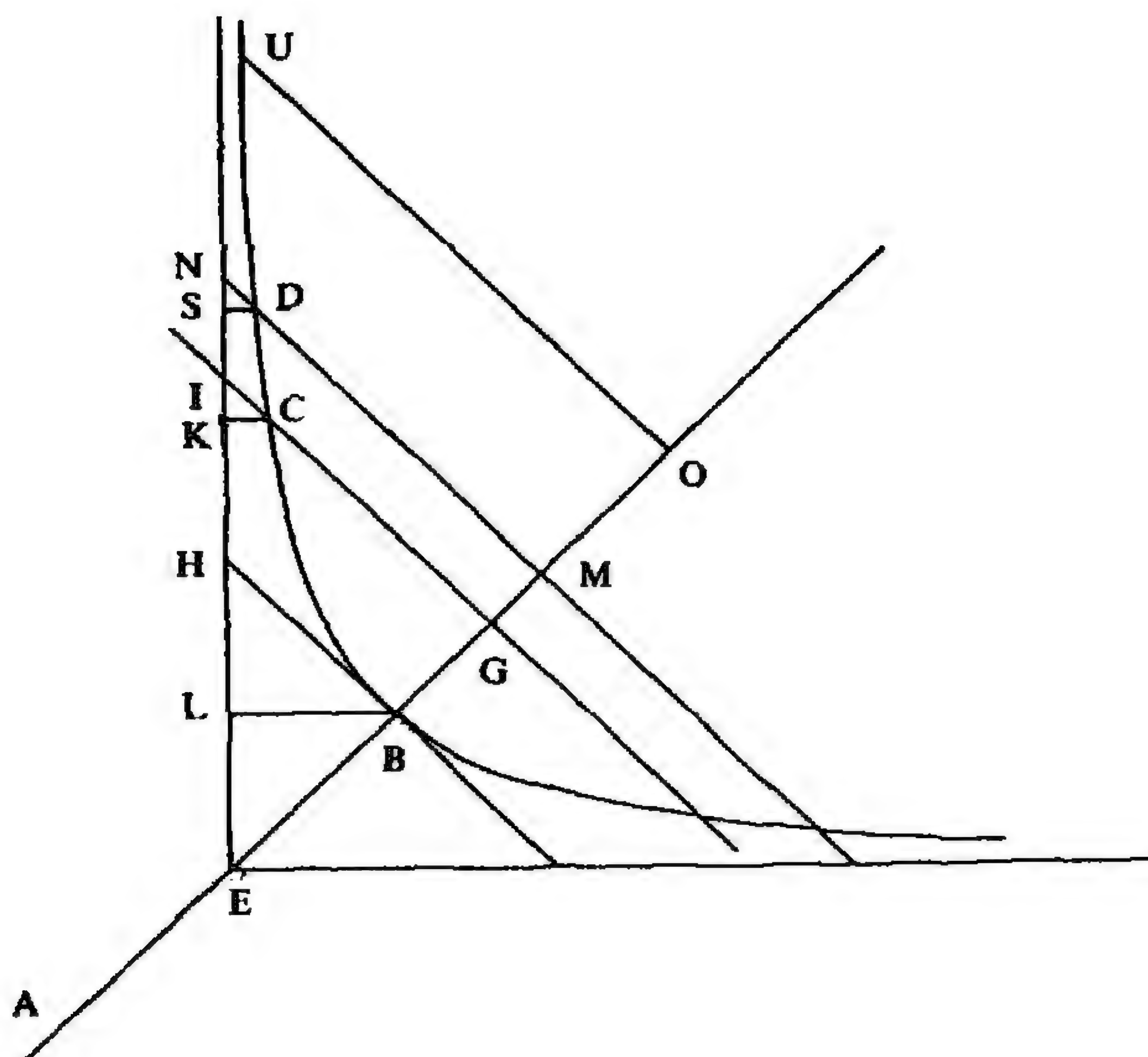
$$x = OK \,,\; y = IK \,,\; b = tg \frac{\alpha}{2} \,,\; a = OE$$

تكون العلاقة $KI^2 = KE.KG$ مكافئة للعلاقة:

$$x^2 - \frac{y^2}{b^2} = a^2 \,.$$

القضية ٣

نفرض أن $\mathscr{H}$ قطع زائد محيطه BC، قطره AM وقطره المجانب AB وأن E هي منتصف AB وأن $BH \perp AB$ بحيث يكون $BH = BE$. في هذه الحال يكون EH خطاً مقارباً للمحيط BC. (الشكل رقم (٢ ـ ٤)).



الشكل رقم (٢ ـ ٤)

البرهان: نأخذ C على $\mathscr{H}$ و $CG \perp AB$. فيكون $\widehat{EBH} = \frac{\pi}{2}$ و $\widehat{BEH} = \widehat{BHE} = \frac{\pi}{4}$. لكن $\widehat{EGC} = \frac{\pi}{2}$، لذلك فإن GC يقطع حتماً EH، في نقطة نسميها I. نأخذ K على EH، بحيث يكون $CK \perp EH$، وكذلك L على EH بحيث يكون $BL \perp EH$. فبما أن $\widehat{GEI} = \frac{\pi}{4}$ و $\widehat{EGI} = \frac{\pi}{2}$، يكون $\widehat{GIE} = \frac{\pi}{4}$، لذلك $GE = GI$، ومن هنا نحصل على:

$$(EG + GC) \cdot CI + GC^2 = GI^2 = GE^2 ,$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$AG \cdot BG + EB^2 = EG^2 ,$$

فيكون لدينا:

$$AG \cdot BG + EB^2 = (EG + GC) \cdot CI + GC^2$$

لكن

$$AG \cdot BG = GC^2 ,$$

فيكون لدينا

$$EB^2 = (EG + GC) \cdot CI ,$$

وبالتالي

$$\frac{EG + GC}{EB} = \frac{EB}{CI} .$$

وبما أن $EG + GC > EB$، يكون $EB > CI$. وبما أن $\widehat{BEL} = \frac{\pi}{4}$ و $\widehat{ELB} = \frac{\pi}{2}$، يكون $\widehat{EBL} = \frac{\pi}{4}$ و $EL = BL$ وبالتالي:

$$EB^2 = EL^2 + LB^2 = 2BL^2.$$

وبما أن $\widehat{CIK} = \frac{\pi}{4}$ وَ $\widehat{CKI} = \frac{\pi}{2}$ يكون $\widehat{ICK} = \frac{\pi}{4}$ و $CK = KI$ وبالتالي:

$$CI^2 = CK^2 + KI^2 = 2CK^2.$$

من هنا نستنتج أن $BL^2 > CK^2$ وبالتالي $BL > CK$.

وعلى غرار ما تقدم، نفرض أن D نقطة من $\mathscr{H}$ وأن $DM \perp AB$ وأن DM تقطع EH في النقطة N؛ كما نفرض أن $SD \perp EH$ بحيث تكون النقطة S على EH. عندئذٍ، إذا كان $EM > EG$ نبين بطريقة مماثلة أن $CK > DS$. هكذا يظهر إذن أن EH تقترب من $\mathscr{H}$ بلا نهاية(٤). أضِف إلى ذلك أن EH و $\mathscr{H}$ **لا يلتقيان إطلاقاً**.

فإذا فرضنا أن $\mathscr{H}$ و EH يلتقيان، نأخذ من إحدى نقاط التقائهما U، عموداً هو UO على AB فيكون $UO = OE$ وبالتالي:

$$AO \cdot OB = OU^2 = OE^2,$$

لكن لدينا

$$OE^2 = AO \cdot OB + EB^2,$$

وبالتالي

$$AO \cdot OB = AO \cdot OB + EB^2,$$

وهذا خُلف. لا يمكن إذن التقاء EH و $\mathscr{H}$.

---

(٤) لانهائياً (Indéfiniment)، «أبداً» بحسب تعبير الطوسي.

تعليق

لنفرض أن E هي النقطة المنصّفة للقطر المجانب لِـ $\mathscr{H}$ وأن $EB = a$. عندئذٍ يكون الخط المستقيم Δ الذي يمرّ بِـ E والذي يُحدِث مع المستقيم EB زاوية تساوي $\frac{\pi}{4}$، هو خط مقارب للقطع الزائد $\mathscr{H}$.

ملاحظة: قبل أن نعود إلى برهان الطوسي نسجّل معنى مفهوم الابتعاد: القول بأن النقطة C أكثر ابتعاداً من النقطة B على المنحني $\mathscr{H}$ يعادل القول بأن المسافة من النقطة E إلى المسقط العمودي لِـ C على القطر المجانب AB أكبر من المسافة من E إلى مسقط B على AB (وهو B نفسه)، أي أن $EG > EB$. وكذلك، القول بأن D أكثر ابتعاداً من C على $\mathscr{H}$ يُعادل القول إن $EM > EG$.

لنفرض أن Δ هو المستقيم EL وأن $d(X, \Delta)$ هي المسافة بين نقطة X من $\mathscr{H}$ إلى Δ. يبرهن الطوسي أن $d(C, \Delta) < d(B, \Delta)$، ويقول إن العلاقة $d(D, \Delta) < d(C, \Delta)$ تبرهن بالطريقة نفسها، إلا أن برهانه غير مكتمل.

وفي الواقع نستطيع أن نكمل هذا البرهان انسجاماً مع طريقته، كما يلي:

نعلم أن $EM = MN$ فيكون $DN = EM - MD$ وبالتالي يكون:

$$(EM + MD) \,.\, DN + MD^2 = EM^2.$$

كما أن $EA = EB$ وبالتالي $AM = EM + EB$ فيكون:

$$AM \,.\, BM + EB^2 = EM^2.$$

وبما أن $D \in \mathscr{H}$، فإن $MD^2 = MA \,.\, MB$ ومنها:

$$(EM + MD) \,.\, DN = EB^2.$$

وكذلك، بما أن $C \in \mathscr{H}$ يكون:

$$(EG + GC) \,.\, CI = EB^2.$$

مما يعطي:

$$\frac{EM + MD}{EG + GC} = \frac{CI}{DN}.$$

لكن $\frac{CI}{DN} = \frac{CK}{DS}$ (انظر المثلثين CIK و DNS) فيكون:

$$\frac{EM + MD}{EG + GC} = \frac{CK}{DS}.$$

لكننا نفترض أن D أكثر ابتعاداً من C على $\mathscr{H}$، إذن $EM > EG$، $AM > AG$

و $BM > BG'$. من هنا نستنتج أن:

$MA . MB > GA . GB$ وبالتالي $MD^2 > GC^2$ أي $MD > GC$.

يكون لدينا إذن $EM + MD > EG + GC$ ومن هنا نستنتج أن $CK > DS$. فبالنسبة إلى أي زوج (C, D) من نقاط $\mathscr{H}$ حيث يكون D أكثر ابتعاداً من C على $\mathscr{H}$، يكون لدينا إذن $d(D, \Delta) < d(C, \Delta)$. نسجل هنا بأن هذا البرهان كامل في «الكتيب» (انظر المقدمة).

بعد ذلك يبرهن الطوسي أن Δ و $\mathscr{H}$ لا يلتقيان. لكنه لا يبرهن أن ابتعاد D بغير نهاية على $\mathscr{H}$ يجعل المسافة $d(D, \Delta)$ تحِنّ(٥) إلى الصفر. وهذا ما يمكن القيام به استناداً لأسلوب الطوسي كما يلي:

لدينا

$$d(D, \Delta) = DS = \frac{DN}{\sqrt{2}} = \frac{EB^2}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{EM + MD}$$

فليكن ε عدداً موجباً صغيراً بالقدر الذي نريده. لكي نحصل على $DS < \varepsilon$، يكفي أن نجعل $\frac{1}{EM + MD} < \varepsilon_1$ حيث $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{EB^2}$.

ومهما كان وضع النقطة D على $\mathscr{H}$، يكون $EM > MD$ وبالتالي:

$$EM + MD > 2MD ,$$

فيكون

$$\frac{1}{EM + MD} < \frac{1}{2MD} ,$$

يكفي إذن جعل $\frac{1}{2MD}$ أصغر من ε_1، أي $MD > \frac{1}{2\varepsilon_1}$؛ وعند ذلك يكون لدينا:

$$ME^2 > \frac{1}{4\varepsilon_1^2} + EB^2$$

ذلك لأن

$$ME^2 = MD^2 + EB^2 .$$

وهكذا، فلكل $\varepsilon > 0$ توجد نقطة M على محور القطع الزائد $\mathscr{H}$، تحقق النقطة D التي تقابلها على $\mathscr{H}$ العلاقة $d(D, \Delta) < \varepsilon$. الخط Δ هو إذن خط مقارب لـ $\mathscr{H}$.

---

(٥) تميل إلى الصفر (تقارب الصفر). (المترجم).

القضية ٤

ليكن $\mathscr{H}$ قطعاً زائداً قمته B وخطه المقارب ES وقطره المجانب $2EB$ وليكن BL عموداً على ES ولتكن D نقطة من $\mathscr{H}$ و $SD \perp LS$. عندئذٍ يكون لدينا $ES \cdot SD = EL^2$.

البرهان: لدينا $EM = MN$ فيكون $(EM + MN)^2 = 4EM^2$ ولدينا أيضاً:

$$EN^2 = EM^2 + MN^2 = 2EM^2$$

فيكون

$$(EM + MN)^2 = 2EN^2 \quad \text{و} \quad (DS + SN)^2 = 2DN^2$$

وبالتالي

$$\frac{(EM + MN)^2}{EN^2} = \frac{(DS + SN)^2}{DN^2} ,$$

أي

$$\frac{EM + MN}{EN} = \frac{DS + SN}{DN} ,$$

وبالتالي

$$(EM + MN) \cdot DN = (DS + SN) \cdot EN .$$

لكن

$$(EM + MN) \cdot DN = (EM + MD) \cdot DN + DN^2,$$

كما أن

$$(DS + SN) \cdot EN = (DS + SN) \cdot ES + (DS + SN) \cdot SN.$$

وأن

$$(DS + SN) \cdot SN = DN^2,$$

فيكون

$$(DS + SN) \cdot ES = (EM + MD) \cdot DN = EB^2,$$

وذلك بسبب ما تقدم في القضية ٣. من هنا نحصل على:

$$DS \cdot ES = \frac{EB^2}{2} = EL^2 .$$

وكذلك، بما أن:

$$EK \cdot KC = EL^2 ,$$

يكون لدينا

$$DS \,.\, ES = EK \,.\, KC \,.$$

تعليـق

يبرهن الطوسي أنه عندما يكون $\mathscr{H}$ قطعاً زائداً متساوي الأضلاع ويكون X و Y إحداثيي نقطة D من $\mathscr{H}$ بالنسبة إلى الخطين المقاربين، فإن X و Y يحققان العلاقة:

$$X.Y = \frac{a^2}{2}$$

حيث a هو نصف القطر المجانب لـ $\mathscr{H}$.

فإذا كان x و y إحداثيي D بالنسبة لمحوري $\mathscr{H}$ يكون $x^2 - y^2 = a^2$. ولدينا:

$$X = DS = \frac{DN}{\sqrt{2}} = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$$

$$Y = ES = EN - SN = x\sqrt{2} - \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x+y}{\sqrt{2}},$$

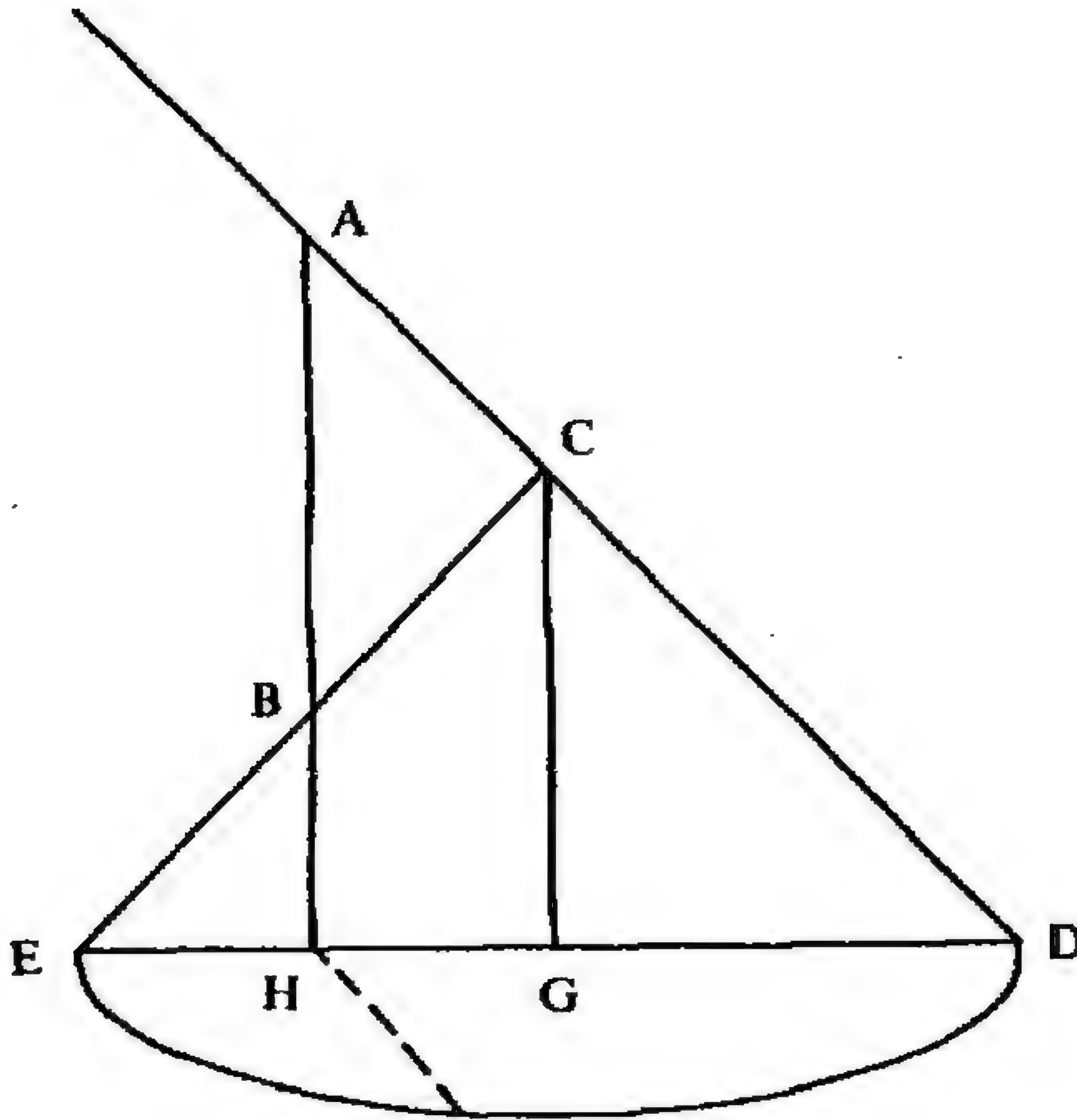
ومن هنا

$$X.Y = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \,.\, \frac{x-y}{\sqrt{2}} = \frac{x^2-y^2}{2} = \frac{a^2}{2} \,.$$

البناء الثاني

بناء قطع زائد بإعطاء قطره المجانب AB: (الشكل رقم (٢ ـ ٥)).

نبني المثلث القائم الزاوية المتساوي الأضلاع على القاعدة AB، $\widehat{A} = \widehat{B} = \frac{\pi}{4}$، $\widehat{C} = \frac{\pi}{2}$، $CA = CB$. لتكن E نقطة على BC و D نقطة على CA بحيث يكون $CE = CD$. نجمع DE ونمد AB حتى H على DE. ليكن G منتصف DE. عند ذلك يكون $CG // AH$. دوران المثلث (CGE) حول CG حتى انطباقه على المثلث (CGD) يحدث نصف مخروط كما يحدث EG نصف قرص (دائري).



الشكل رقم (٢ ـ ٥)

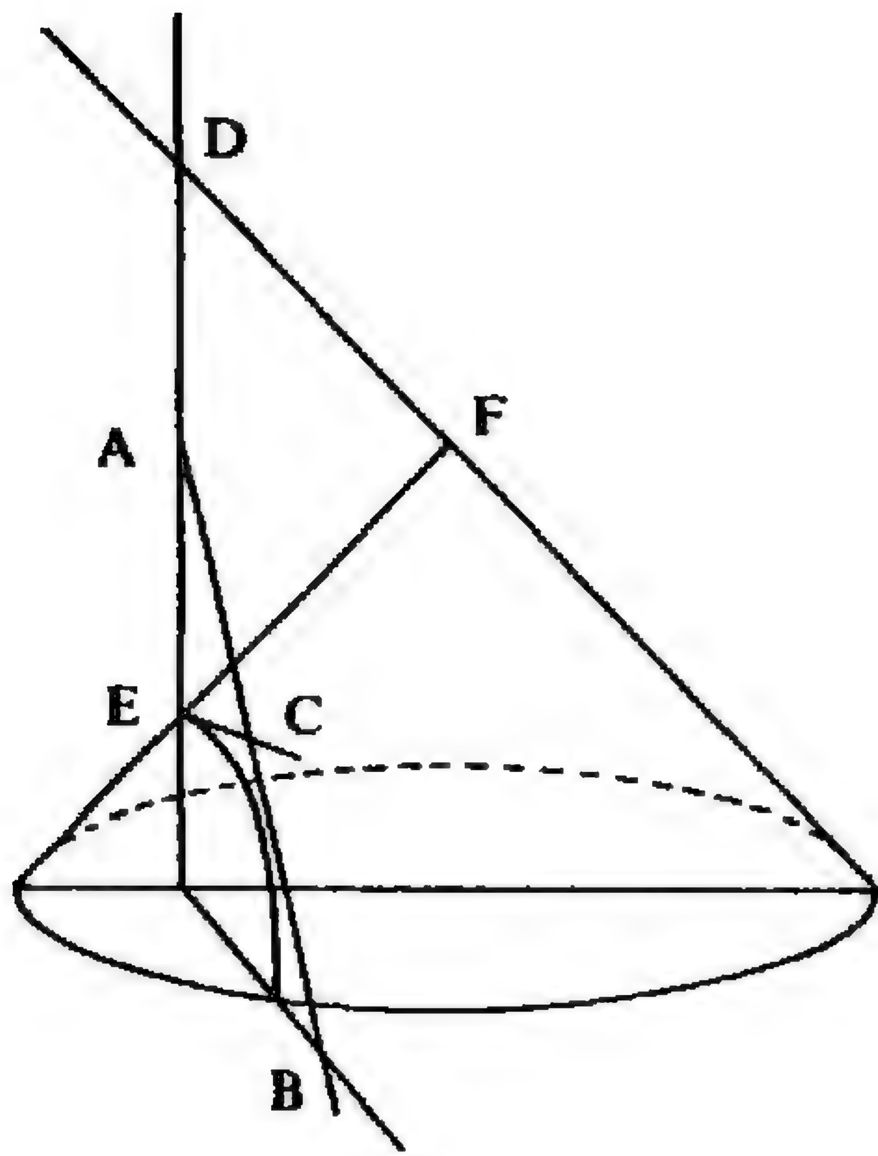
فالسطح الذي يمر بـ BH عمودياً على السطح CED، يقطع المخروط على القِطع الزائد المطلوب، قمّته B وقطره المجانب AB.

تعليق

هنا يفترض الطوسي ضمناً أن القطع الزائد متساوي الأضلاع. ويستخدم تعريفه كتقاطع لسطح مع مخروط دائري ذي زاوية قائمة.

البناء الثالث

بناء قطع زائد خطه المقارب AB مفروض وكذلك قطره المجانب m (الشكل رقم (٢ ـ ٦)).



الشكل رقم (٢ ـ ٦)

نبني أولاً الزاوية $\widehat{EAB}=\frac{\pi}{4}$. ومن جهتي A نأخذ $AD=AE=\frac{m}{2}$. نخرج من E عموداً على AE هو EC، $C\in AB$، $\widehat{ACE}=\frac{\pi}{4}$، و$AE=EC$. من ثم نبني المثلث قائم الزاوية متساوي الساقين DFE على القاعدة DE، ضمن سطح عمودي على السطح AEC. بعد ذلك نُكمِلُ البناء بالطريقة نفسها الواردة في البناء ٢. هكذا نحصل على قطع زائد قمته E وقطره المجانب ED. لكن، بما أن $EC\perp AD$ و$C\in AB$، فإن AB خط مقارب للقطع الزائد.

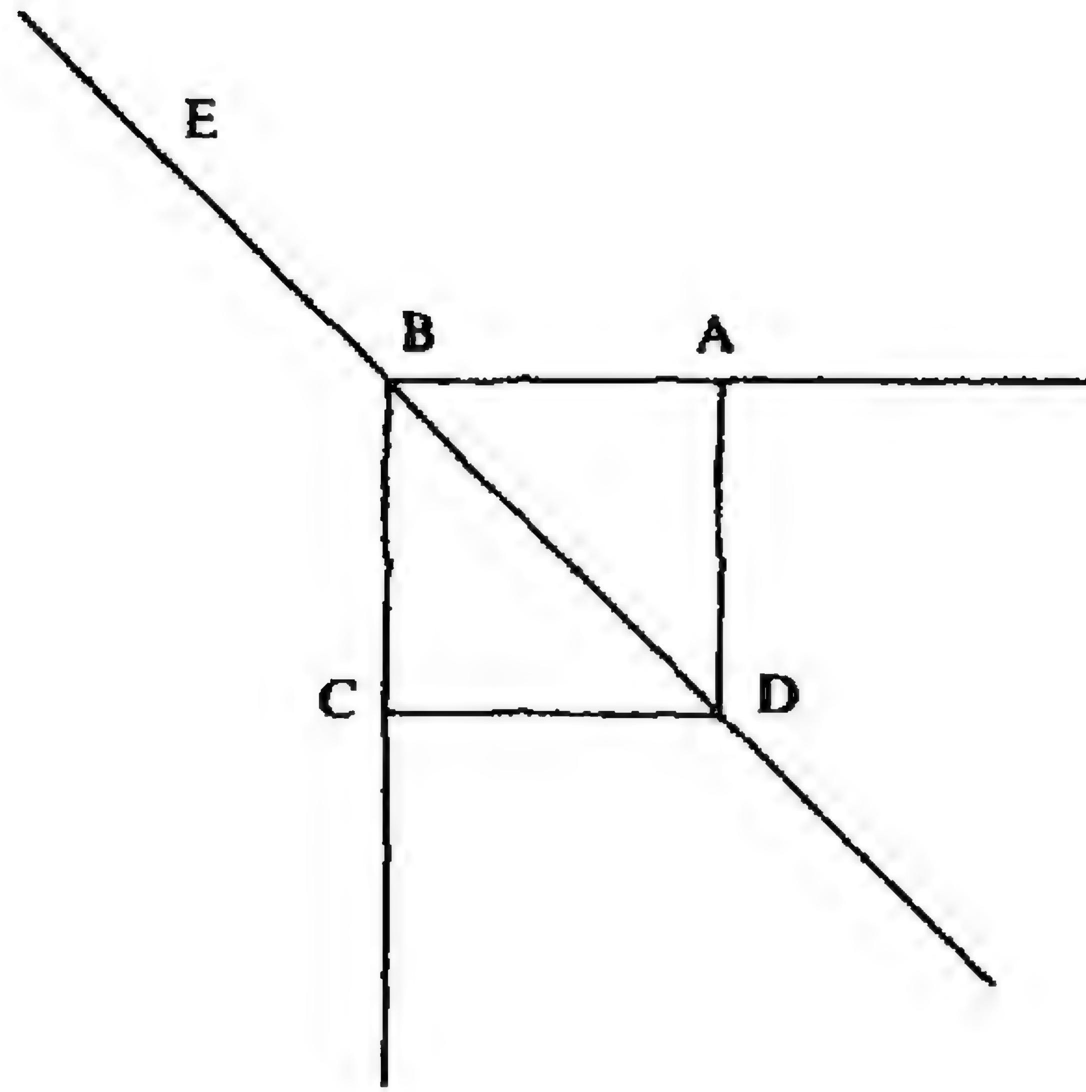
تعليق

بحسب ما ورد في كلام الطوسي، كان الموضوع بناء قطع زائد لا يتقاطع مع خط مفروض AB. إنه في الواقع يفترض ضمناً (وليس تصريحاً) بأن AB خط مقارب للقطع الزائد وأن A هو مركز هذا القطع ويقوم ببنائه استناداً إلى القضية ٣.

البناء الرابع

بناء قطع زائد خطاه المقاربان مفروضان، AB و BC (متعامدان) ورأسه D

مفروض (الشكل رقم (٢ ـ ٧)).



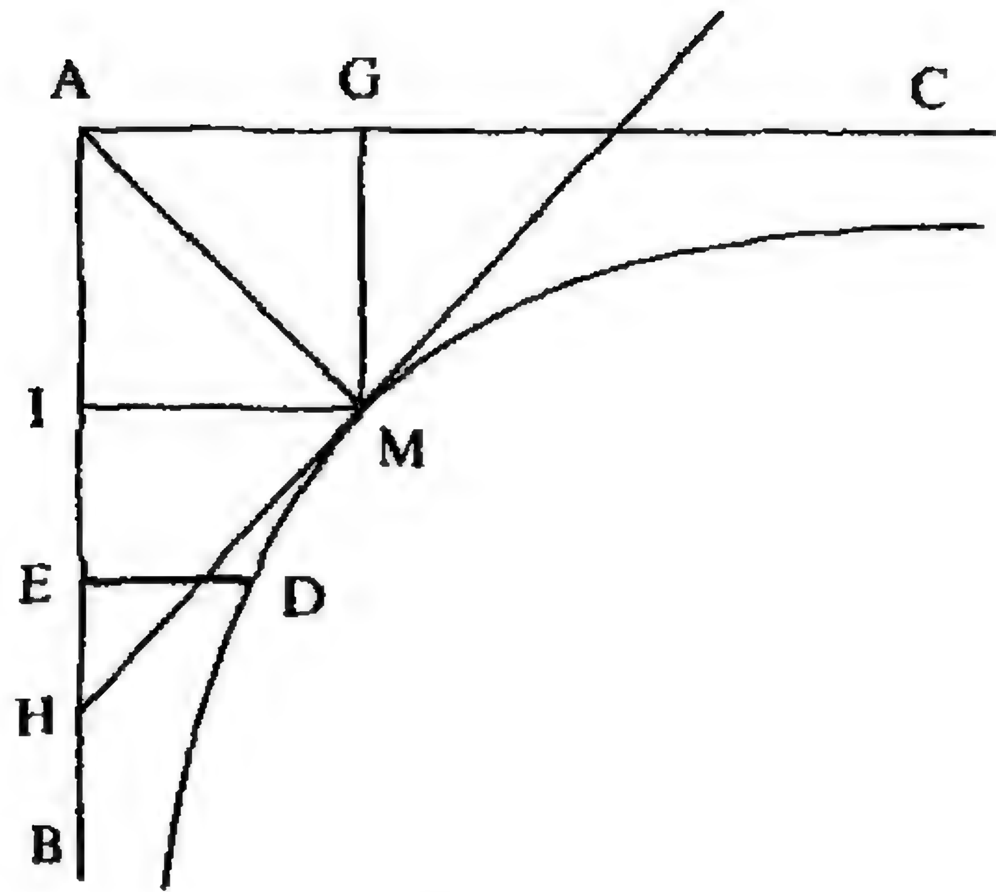
الشكل رقم (٢ ـ ٧)

نأخذ E على BD بحيث $BE = BD$. بواسطة البناء ٣، نبني قطعاً زائداً قطره المجانب DE ومقاربه AB. هذا القطع الزائد لا يلتقي BC.

تعليق

من المعطيات أن D هو رأس القطع الزائد و B مركزه؛ كما أن BD هو قطره المجانب وهو إذن معطى. وهذا ما يرد العمل إلى البناء رقم ٣.

البناء الخامس



الشكل رقم (٢ ـ ٨)

بناء قطع زائد مقارباه AB و AC و(A هي النقطة المنصفة للقطر المجانب)، $AC \perp AB$، ويمر بنقطة D أقرب إلى AB من AC (الشكل رقم (٢ ـ ٨)).

نأخذ $DE \perp AB$، E على AB ونأخذ G على AC بحيث $AG^2 = AE.ED$، I على AB بحيث $AI = AG$، وأخيراً M، النقطة الرابعة في المربع $AIMG$. نبني القطع الزائد ذا الرأس M والقطر المجانب $2AM$ وذا المقاربين AB و AC وذلك بواسطة البناء ٤. القطع المذكور يمر بالضرورة بـ D وإلا يحصل:

$$AG^2 = AE \,.\, X,$$

حيث $X > ED$ أو $X < ED$ وهذا خُلف.

النقطة D توجد إذن على القطع الزائد الذي يقترب بغير نهاية من AB ـ وبالتالي من AC ـ، ذلك لأنه إذا كان $HM \perp AM$ و $H \in AB$، يكون $HM = AM$ (بناء الخط المقارب بواسطة القضية ٣).

تعليـق

يستدِل الطوسي في برهانه بالطريقة التالية: إذا لم يمر $\mathscr{H}$ بـ D فإنه يمر بنقطة أخرى D'، $D' \neq D$، لها المسقط E نفسه على AB. فيكون معنا $AG^2 = AE.ED'$، $ED' \neq ED$، فيكون $AG^2 \neq AE.ED$ وهذا خُلف لأن G قد بني بحيث يكون:

$$AG^2 = AE \cdot ED.$$

يبرهن المؤلف إذن، بشكل صريح، أن $x.y = \frac{a^2}{2}$ (حيث a هو نصف القطر المجانب) هي معادلة القطع الزائد. فلقد سبق وبرهن في القضية ٤ أن أي نقطة $M(x, y)$ من القطع الزائد $\mathscr{H}$ تحقق $x.y = \frac{a^2}{2}$، وهنا يبين أن أي نقطة $D(x, y)$ تحقق $x.y = \frac{a^2}{2}$ $\left(\frac{a^2}{2} = AG^2\right)$ موجودة على $\mathscr{H}$. هذه الخاصية تميز إذن نقاط القطع الزائد.

في المقدمة يُعرِّف الطوسي القطع المكافئ والقطع الزائد والقطع الناقص، على أساس أنها تقاطع مسطح لمخروط دائري ذي زاوية رأسية قائمة.

في القضية ١، يبرهن أن أي نقطة (x, y) من القطع المكافئ تحقق $x^2 = a.y$، ولا يبرهن القضية العكسية؛ لكنه عبر رسالته يعتبر أن القطع المكافئ $\mathscr{P}$ متميز بـ:

$$\mathscr{P} = \{(x, y) \ , \ x^2 = a.y\}.$$

من ثم يعمد إلى بناء قطع مكافىء حيث a معطى مسبقاً. ونسجِّل الملاحظة نفسها بالنسبة إلى القضية ٢ حيث يعتبر أن القطع الزائد $\mathscr{H}$ متميز بـ:

$$\mathscr{H} = \{(x, y) \ , \ x^2 - y^2 = a^2\}.$$

في القضية ٣، يعطي الخاصية المميزة للخطين المقاربين للقطع الزائد متساوي الأضلاع.

في القضية ٤ المكمّلة في ما بعد بالبناء الخامس، يثبت معادلة القطع الزائد بالنسبة إلى خطيه المقاربين:

$$\mathscr{H} = \left\{(x, y) \ ; \ xy = \frac{a^2}{2}\right\}.$$

بعد ذلك، يقوم بأربعة إنشاءات. الإنشاء **الأول** هو إنشاء لقطع زائد ذي قطر مجانب مفروض a. **الثاني** هو بناء لقطع زائد حيث a معطىً وكذلك خطه المقارب ومركزه. الإنشاء **الثالث** هو بناء لقطع زائد خطاه المقاربان مفروضان وكذلك رأسه.

والإنشاء الأخير هو بناء لقطع زائد خطاه المقاربان مفروضان ويمر بنقطة مفروضة. هذه الإنشاءات مرتبة حيث إن كلاً منها يستعمل ما سبقه.

هذه التعريفات والقضايا والإنشاءات تسمح للطوسي بأن يوفر على قارئه عدم الرجوع إلى كتاب آخر غير كتابه. أما اكتفاؤه بمخروط دائري ذي رأس بزاوية قائمة فيعود إلى مستلزمات دراسته اللاحقة.

تصنيف المعادلات والمعادلات ذات الحدين

في مقدمة هذا الفصل يبدأ الطوسي، على خُطى الخيّام، بتحديد الوحدات القياسية: الوحدة الخطية، الوحدة السطحية، والوحدة المجسمة. فهكذا يمكن لمعادلة ما أن تعبر عن مسألة عددية أو عن مسألة مساحات أو عن مسألة أحجام. ومن ثم يعطي التصنيف التالي للمعادلات:

١ ـ المعادلات ذات الحدين

(١) $x = c$ ؛ (٢) $x^2 = c$ ؛ (٣) $x^2 = bx$ ؛
(٤) $x^3 = ax^2$ ؛ (٥) $x^3 = bx$ ؛ (٦) $x^3 = c$.

٢ ـ المعادلات كثيرة الحدود

٢ ـ ١: المعادلات التي لا تحوي x^3 وَ c في آن واحد:

(٧) $x^2 + bx = c$ ؛ (٨) $bx + c = x^2$ ؛ (٩) $x^2 + c = bx$ ؛
(١٠) $x^3 + ax^2 = bx$ ؛ (١١) $ax^2 + bx = x^3$ ؛ (١٢) $x^3 + bx = ax^2$ ؛

٢ ـ ٢: المعادلات التي تحوي x^3 وَ c معاً.

٢ ـ ١: المعادلات التي تحوز دائماً على حل:

(١٣) $x^3 + bx = c$ ؛ (١٤) $c + bx = x^3$ ؛ (١٥) $x^3 + ax^2 = c$ ؛
(١٦) $c + ax^2 = x^3$ ؛ (١٧) $x^3 + ax^2 + bx = c$ ؛ (١٨) $c + bx + ax^2 = x^3$ ؛
(١٩) $x^3 + ax^2 = bx + c$ ؛ (٢٠) $x^3 + bx = ax^2 + c$.

٢ ـ ٢ ـ ٢: المعادلات التي ليس لها دائماً حل:

(٢١) $x^3 + c = ax^2$ ؛ (٢٢) $x^3 + c = bx$ ؛ (٢٣) $x^3 + ax^2 + c = bx$ ؛
(٢٤) $x^3 + bx + c = ax^2$ ؛ (٢٥) $x^3 + c = ax^2 + bx$.

وخلافاً للخيّام الذي كان تصنيفه جبرياً[٦] بحتاً، إذ ارتكز على درجة المعادلة وعلى تشكيل طرفيها، يعطي الطوسي تصنيفاً بَعديّاً - بمعنى أنه قد حصل بعد دراسة كل من هذه المعادلات (المترجم) - يعتمد، بخاصة في قسمه الأخير، على وجود الحلول. فالمعادلات (١) هي المعادلات التي تعود إلى استخراج الجذر؛ والمعادلات (٢ - ١) هي معادلات الدرجة الثانية، أو تلك التي تؤول إليها؛ المعادلات (٢ - ٢ - ١) هي جميعها معادلات من الدرجة الثالثة يمكن حلها[٧]؛ والمعادلات (٢ - ٢ - ٢) هي معادلات من الدرجة الثالثة لا تحوز دائماً على حلّ.

في الموجز الذي يلي، سنعتمد الاصطلاحات التالية:

- ℓ، p، s، هي وحدات القياس الخطية، السطحية والمجسمة، تتالياً؛

- x_ℓ، x_p، x_s تشير إلى الحلول الخطية، السطحية والمجسمة تتالياً:

$$x_\ell = x \, . \, \ell \quad , \quad x_p = x \, . \, p = x_\ell \, . \, \ell \quad ,$$
$$x_s = x \, . \, s = x_p \, . \, \ell = x_\ell \, . \, p$$

---

(٦) يعطي الخيّام التصنيف التالي:

I. المعادلات البسيطة: ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦.

II. المعادلات المركبة:

II. ١ . المعادلات ثلاثية الحدود: ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٦، ٢١، ٢٢.

II. ٢. المعادلات رباعية الحدود:

II. ٢. ١: المعادلات التي لا يحوي طرفها الثاني سوى عنصر واحد: ١٧، ١٨، ٢٣، ٢٤.

II. ٢. ٢: المعادلات التي يحوي طرفها الثاني عنصرين: ١٩، ٢٠، ٢٥. لكن الخيّام يتبنى من الناحية العملية تصنيفاً آخر:

I. المعادلات المحلولة من دون المقاطع المخروطية: ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢.

II. المعادلات المحلولة بالمقاطع المخروطية:

II. ١ . معادلة بسيطة: ٦.

II. ٢ . ست معادلات ثلاثية الحدود: ١٣، ١٤، ١٥، ١٦، ٢١، ٢٢.

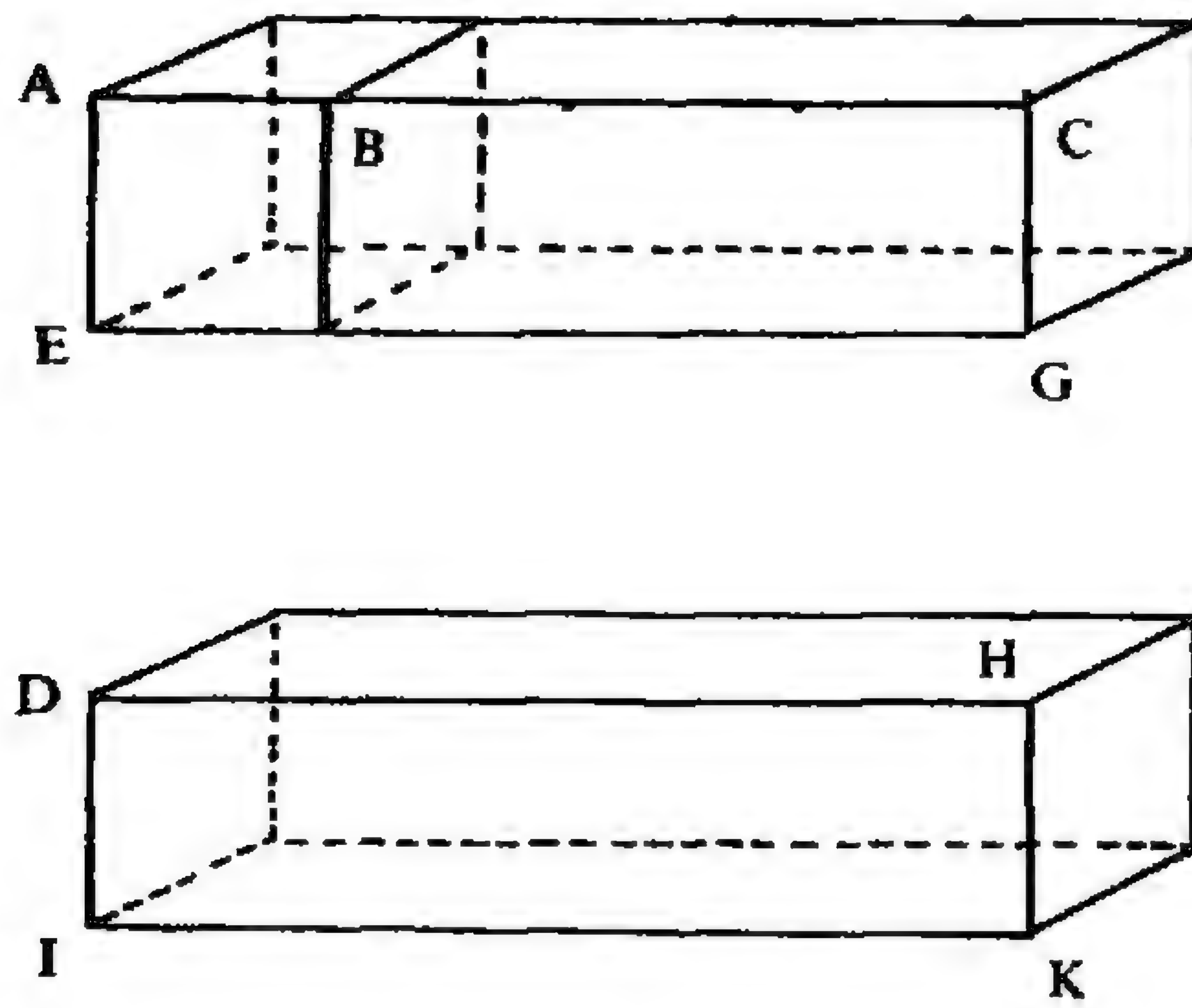
II. ٣ . سبع معادلات رباعية الحدود: ١٧، ١٨، ٢٣، ٢٤، ١٩، ٢٠، ٢٥. على هذا الأساس فإن تصنيف الخيّام، النظري أو العملي، يبدو تصنيفاً استنسابياً (سابقاً للتجربة أو الاستدلال).

(٧) الحل بالنسبة إلى رياضيّي ذلك العصر، هو الحل الحقيقي الموجب.

المعادلات ذات الحدين

المعادلة ١ : $x = c$

لنفرض أن ℓ، p، s تشير إلى الوحدات القياسية، الخطية والسطحية والجسمية تتالياً. يعالج الطوسي هذه المعادلة بثلاثة أشكال مختلفة، تبعاً للمجال الذي يعتبر أنها ضمنه. فهو يبدأ بحلها في فضاء ذي بعد واحد، ومن ثم في فضاء ذي بعدين، وأخيراً في فضاء ذي ثلاثة أبعاد (الشكل رقم (٢ ـ ٩)).



الشكل رقم (٢ ـ ٩)

الحل الخطي: نمثل الوحدة الخطية ℓ بالخط AB ونأخذ $b = c\,\ell$ ممثلاً بالخط AC. نبني من ثم $DH = AC$؛ فيكون DH هو الحل الخطي.

الحل السطحي: نأخذ $EA \perp AC$ وَ $GC \perp AC$ بحيث يكون $EA = CG = AB = \ell$ فإذا سمينا P المساحة $AEGC$ يكون لدينا: $P = cp$.

لنفرض الآن $ID \perp DH$، $KH \perp DH$، $ID = KH = \ell$. عند ذلك تكون مساحة المستطيل $DIKH$ هي الجذر السطحي المطلوب.

الحل المجسم: نفرض أن S هو حجم متوازي السطوح ذي القاعدة $AEGC$ والارتفاع ℓ، وأن S' هو حجم متوازي السطوح ذي القاعدة $DIKH$ وذي الارتفاع ℓ نفسه. عند ذلك يكون لدينا:

$$S = cs\,;$$

ويكون S' هو الحل المجسم.

تعليق

يبدو مسار الطوسي هنا بديهياً. لكننا سنحلله من أجل ما سيتبع من مسائل.

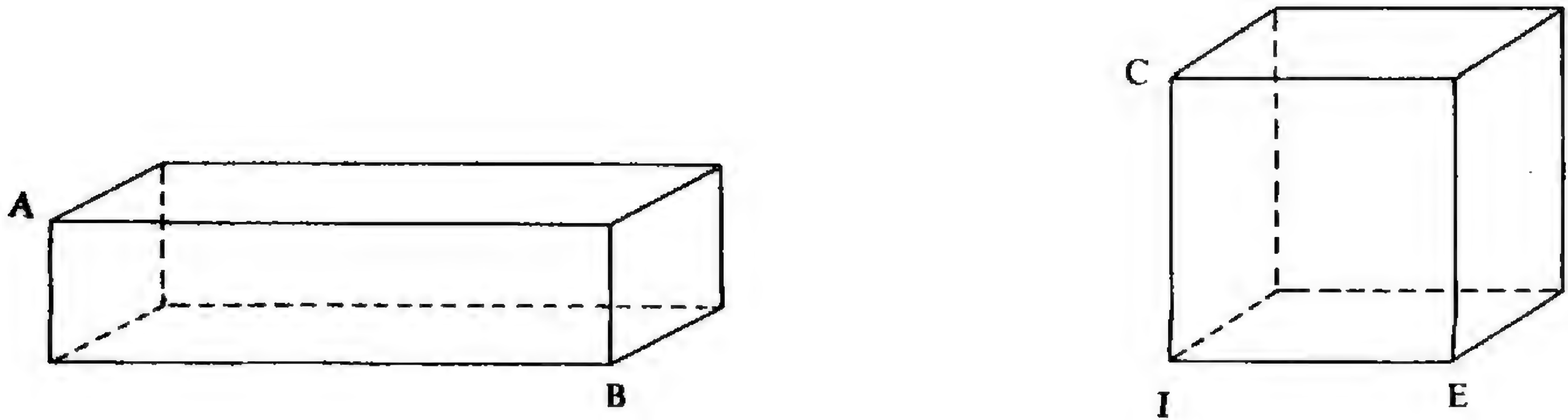
بحسب كون c تمثل طولاً أو مساحة أو حجماً، يكون للمعادلة حل خطي، سطحي أو مجسم. ونحصل على جميع الحلول بواسطة البناء الهندسي. إن مسار الطوسي هو نفسه، سواء في هذه المسألة أم في المسائل التي تليها ويتألف هذا المسار من مرحلتين:

١ ـ وجود الحل ، ٢ ـ احتساب الحل.

هاتان المرحلتان تختلطان أحياناً بحيث لا يمكن التفريق بينهما، لأن إمكانية احتساب الحل تعني بشكل طبيعي أنه موجود. هكذا، إذاً، من أجل مسألة وجود الحل، يبني الطوسي $c.\ell$، $c.p$ وَ $c.s$ ومن ثم يبني الأشكال الهندسية التي تساويها بالتتالي والتي تمثل مختلف الحلول. أما بالنسبة إلى الاحتساب، فطالما أن c معطى، تُقاس x على أنها c في كل من هذه الأبعاد.

المعادلة ٢: $x^2 = c$

نأخذ مستطيلاً (AB) مساحته $c.p$، $c.p = (AB)$؛ ونبني مربعاً (CE) مساوياً في المساحة للمستطيل (AB) ـ بناء ضلع المربع يتم بحسب إقليدس ١٤ (المقصود القضية ١٤ من الكتاب الثاني من **الأصول**.)[٨]. نأخذ متوازيي السطوح S و S' على القاعدتين (AB) و (CE) تتالياً، وبارتفاع هو ℓ. بما أن $(AB) = (CE)$ وأن الارتفاع هو نفسه، ℓ، يكون لدينا $S = S'$. لكن $S = c.s$ بالإضافة إلى أن (CE) هو مربع سطحي و (S') هو مربع جسمي. هكذا نكون قد وجدنا مربعاً سطحياً، (CE)، مساوياً لـ $c.p$، ومربعاً مجسماً، S'، مساوياً لِـ $c.s$. من ثم نستخرج الجذر c فيكون لدينا الحل المطلوب (الشكل رقم (٢ ـ ١٠)).



الشكل رقم (٢ ـ ١٠)

(٨) انظر: عمر الخيام، **رسائل الخيام الجبرية**، حققها وترجمها وقدم لها رشدي راشد وأحمد جبار، مصادر ودراسات في تاريخ الرياضيات العربية؛ ٣ (حلب: معهد التراث العلمي العربي، ١٩٨١)، ص ٢٠.

تعليـق

عندما يشير الطوسي إلى بناء هندسي للضلع CI، فإنه يبرهن وجود حلّ يكون قياس مربعه إما مساحة أو حجماً؛ والمساحة هي مساحة مربع مسطح، والحجم هو حجم مربع مجسم. فإذا فرضنا أن $CI = x\ell$، يكون لدينا:

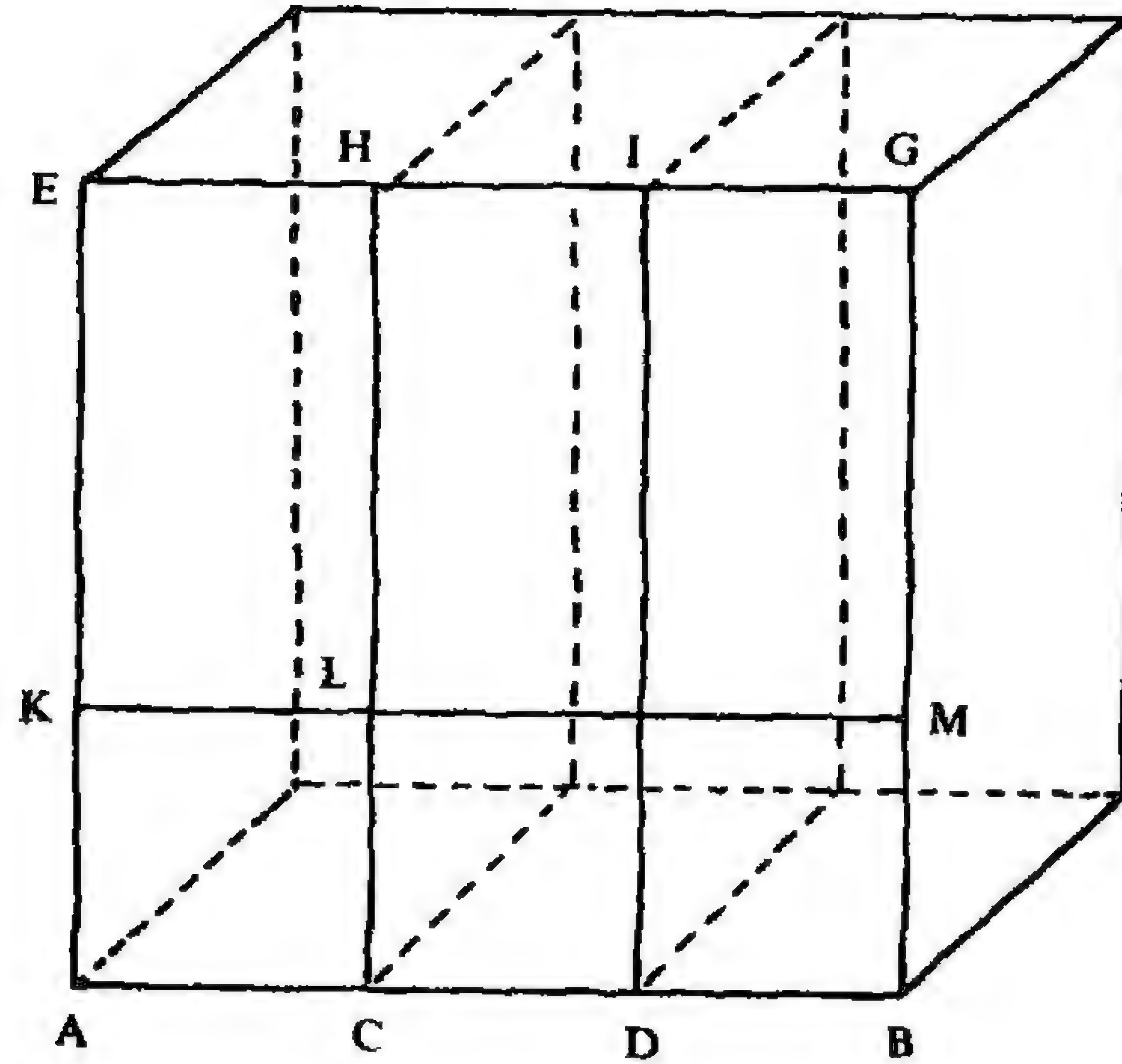
$$(CE) = (AB) \Longrightarrow x^2p = cp$$

$$S = S' \Longrightarrow x^2s = cs;$$

وفي الحالتين نحصل على $x^2 = c$ ومنها يأتي الحل $x = \sqrt{c}$.

المعادلة ٣: $x^2 = bx$

هذه المعادلة يمكن إرجاعها إلى المعادلة ١. (الشكل رقم (٢ ـ ١١)).



الشكل رقم (٢ ـ ١١)

نـأخـذ $AB = b\ell$ وَ $AC = CD = DB = \ell$، بـحـيـث يـكـون $AB = AC + CD + DB$. ونأخذ المربع (AG) ذا الضلع AB ومن ثم $CH \perp AB$، $DI \perp AB$، فيكون $CH = DI = AB$. ونأخذ $AK = \ell$، $KM \perp BG$، عند ذلك يكون كل من (AH)، (HD)، (DG) جذراً سطحياً، وعدد هذه الجذور هو b. وإذا فرضنا أن x_p جذر سطحي، يكون:

$$(AG) = b \cdot x_p$$

من جهة أخرى، $(AM) = b.p$ وَ $(AM) = x_p$، فيكون بالتالي:

$$x_p = b.p\ .$$

لنفرض أن S هو المجسم ذو القاعدة (AG) والارتفاع ℓ وأن x_s جذر جسمي. عند ذلك يكون:

$$S = b\ .\ x_s = x^2.s$$

لكن S'، وهو المجسم ذو القاعدة (AM) والارتفاع ℓ، يحقق العلاقة التالية $S' = b.s$. ومن جهة أخرى، لدينا:

$$\frac{x^2}{x} = \frac{x}{1}$$

لأن

$$\frac{(AG)}{(AM)} = \frac{AB}{AK} = \frac{(AH)}{(AL)}\ ,$$

فيكون

$$\frac{x^2\ .\ p}{x\ .\ p} = \frac{x\ .\ p}{p}$$

وَ

$$\frac{S}{S'} = \frac{(AG)}{(AM)} = \frac{AB}{AK} = \frac{(AH)}{(AL)} = \frac{S'}{S''}\ ,$$

حيث S'' هو المجسم ذو القاعدة (AL) والارتفاع ℓ؛ ومن هنا ينتج:

$$\frac{x^2\ .\ s}{x\ .\ s} = \frac{x\ .\ s}{s}\ .$$

تعليـق

نبني المربع ذا الضلع $b\ .\ \ell$، عند ذلك يكون الحل السطحي هو المستطيل ذو الطول $b.\ell$ والعرض ℓ. بما أن المربع يحوي b مستطيلاً من هذا النوع وبما أن ضلعه هو $b.\ell$، يكون لدينا:

$$x^2 = bx.$$

في ما يتعلق بالحل الجسمي x_s، فهو متوازي السطوح المبني على المستطيل الذي وجدناه، بارتفاع ℓ.

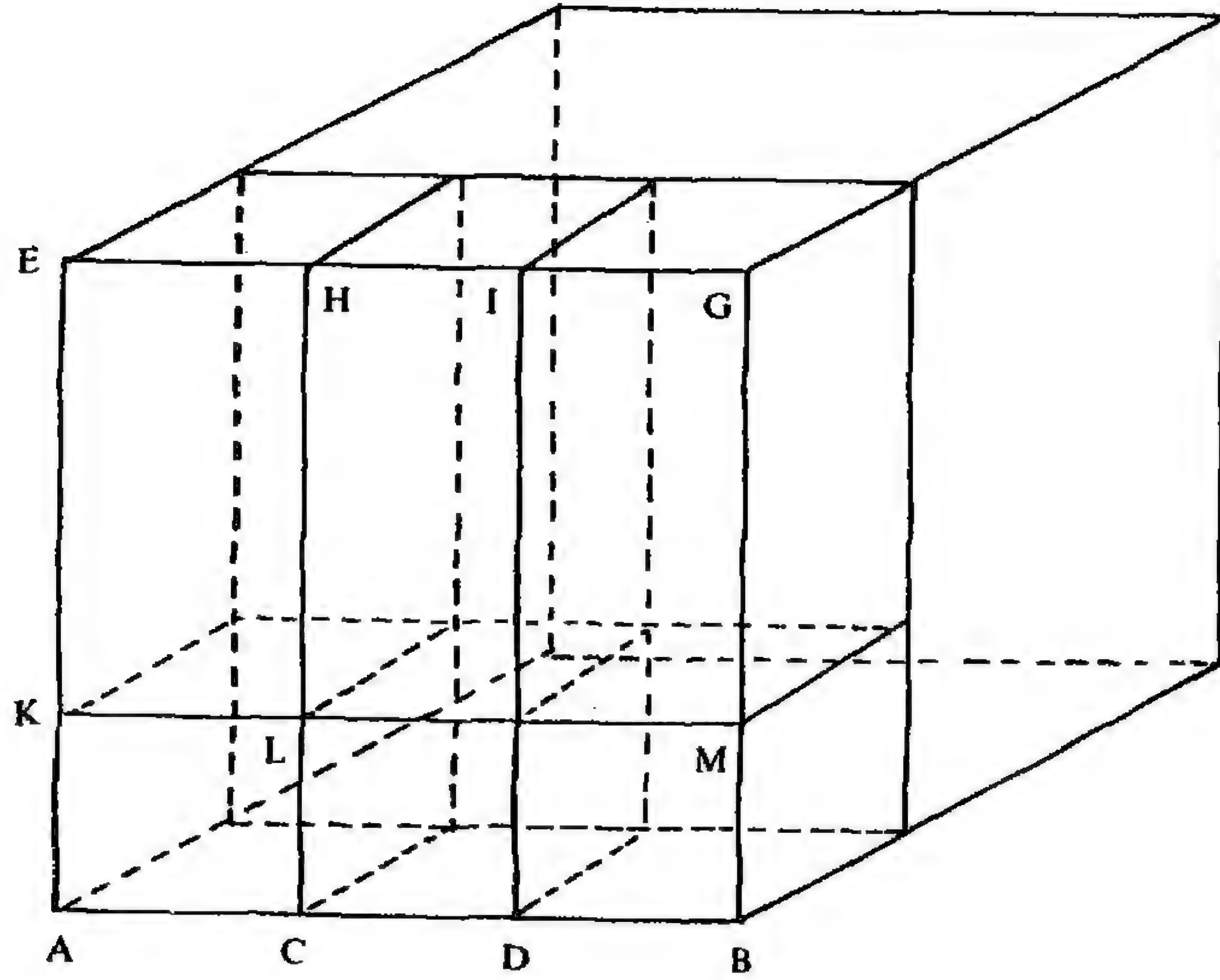
وبالطريقة الحسابية، فإن العلاقة $x^2 = bx$ تعادل $x = b$ (إذا ما استثنينا الحل الصفر) لأن $\frac{x^2}{x} = \frac{x}{1}$. وبما أن $\frac{x^2}{x} = \frac{b}{1}$، يكون لدينا $x = b$ (في البعدين).

ملاحظة: يعتمد الطوسي طريقة مساواة النسب، وفي كل من هذه النسب يكون حدّا النسبة من البعد ذاته، وهكذا تبقى النسبة نفسها مهما كان البعد. وهذا يعني أن

الحل، كما في المعادلة الأولى، مستقل عن الفراغ الذي يجري العمل ضمنه.

المعادلة ٤ : $x^3 = a.x^2$

هذه المعادلة تعود أيضاً إلى المعادلة ١. (الشكل رقم (٢ ـ ١٢)).



الشكل رقم (٢ ـ ١٢)

لنأخذ $AB = a\ell$ و $AC = CD = DB = \ell$[٩]، الوحدات[١٠] التي يحويها AB؛ ونأخذ $CH \perp AB$، $DI \perp AB$، $CH = DI = a.\ell$ و $AK \perp DB$ و $AK = \ell$. لنفرض أن x_s جذر جسمي وأن x_s^2 مربع جسمي وليكن S_1 المجسم ذا القاعدة (AM) والارتفاع ℓ و S_2 المجسم ذا القاعدة (AG) والارتفاع نفسه. عند ذلك يكون $S_1 = x_s = (x.s)$ وَ $S_2 = x^2.s$. ليكن S المكعب ذا الضلع AB ولتكن S_3، S_4، S_5 ذات القواعد (AH)، (HD)، (DG)، تتالياً، وذات الارتفاع AB نفسه، وهذه المجسمات عددها a. عند ذلك يكون لدينا:

$$S = S_3 + S_4 + S_5 = aS_3 \ .$$

---

(٩) نلاحظ (مثلما ورد في المعادلة ٣) أن AB تقسم إلى a وحدة وليس إلى ثلاث وحدات، لكنها طريقة في التعبير، واضحة في مجرى أسلوب الطوسي. (المترجم).

(١٠) الوحدات أو الآحاد الخطية. (المترجم).

المكعب ذو القاعدة (AL) والارتفاع (AC) هو الوحدة الجسمية s، لذلك يكون لدينا $S_1 = a.s$ وبالتالي $x_s = a.s$، كما لدينا:

$$\frac{x^3}{x^2} = \frac{x^2}{x} \qquad (١)$$

لأن

$$\frac{S}{S_1} = \frac{(AG)}{(AM)} = \frac{(AG)\ .\ AC}{(AM)\ .\ AC}$$

ويكون بالتالي لدينا:

$$\frac{x^3\ .\ s}{x^2\ .\ s} = \frac{x^2\ .\ p}{x\ .\ p}$$

وإذا كان S_6 المجسم ذا القاعدة (AL) والارتفاع AB، يكون:

$$\frac{S}{S_6} = \frac{(AG)}{(AL)},$$

وبالتالي

$$\frac{x^3\ .\ s}{x\ .\ s} = \frac{x^2\ .\ p}{p}$$

وَ

$$\frac{x^3}{x} = \frac{x^2}{1}\ .$$

«وذلك ما أردنا بيانه».

تعليق

في هذه المسألة لا يتصدّى الطوسي سوى للحل الجسمي - ذي البعد ٣ (المترجم) - للحصول على العلاقة (١) التي تقوده إلى المسألة (المعادلة) ٣ وبالتالي إلى المسألة ١. ونلاحظ أن المقطع الأخير من برهانه (السابق)، مخصص بشكل واضح للمعادلة ٥.

المعادلة ٥: $x^3 = bx$

هذه المعادلة تعود إلى المعادلة ٢ لأن:

$$\frac{x^3}{x^2} = \frac{x^2}{x} = \frac{x}{1}$$

وَ

$$\frac{x^3}{x} = \frac{x^2}{1}\ ,$$

لذلك $\frac{x^2}{b}=\frac{x^3}{bx}$. لكن، لدينا:

$$x^3 = bx \qquad (١)$$

فيكون

$$x^2 = b \qquad (٢)$$

لذلك فإن حل (٢) هو حل لِـ (١).

تعليق

عندما استعمل المجسمات في استدلاله في المقطع الأخير من المعادلة ٤، بين الطوسي العلاقة $\frac{x^2}{1}=\frac{x^3}{x}$ التي يستعملها في المعادلة ٥. وهو، من جهة أخرى ينتقل من هذه العلاقة إلى:

$$\frac{x^3}{x^2}=\frac{x}{1}$$

بواسطة تبديل في المتوسطين، وهي طريقة حسابية جبرية بحتة.

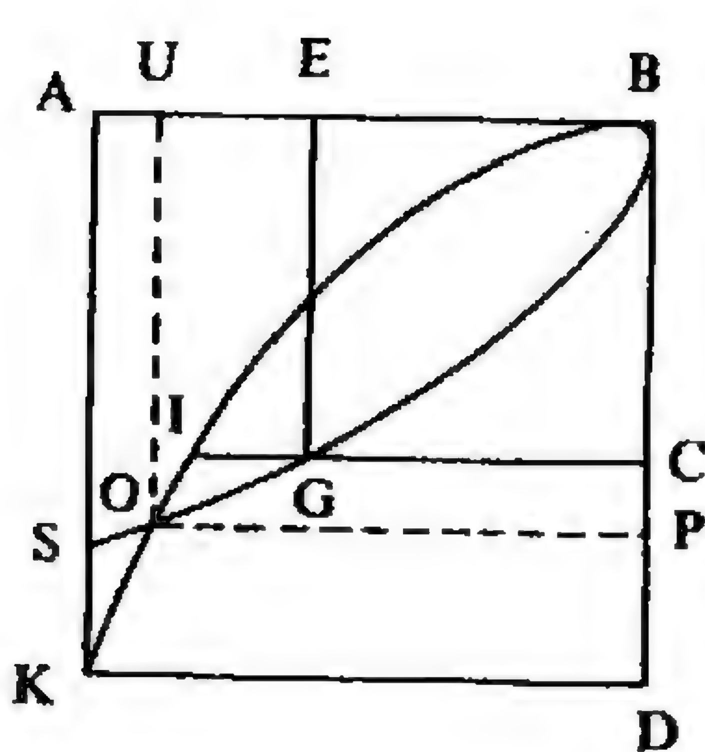
ونلاحظ أن الطوسي لا يهتم في هذه المسألة بقضية التجانس، أي بقضية الأبعاد. وهذا ما سيعتمده في المعادلات الأخرى كما سنرى.

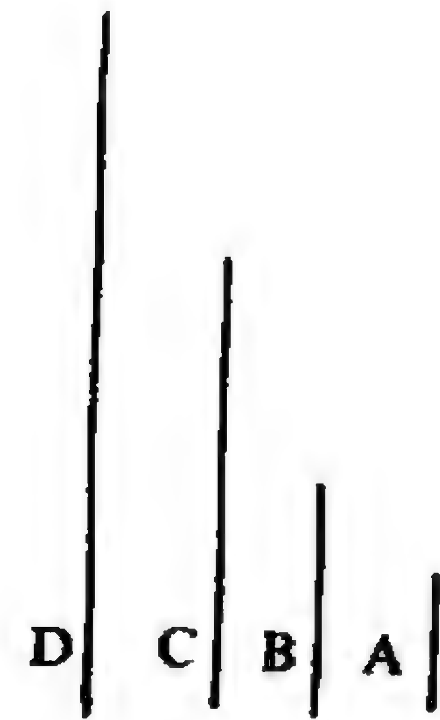
المعادلة ٦: $x^3 = c$

مقدمة: إذا كان α و β مقدارين مفروضين، كيف يتم إيجاد مقدارين آخرين γ وδ بحيث يكون:

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\delta}{\beta}$$

((الشكل رقم (٢ ـ ١٣))





الشكل رقم (٢ ـ ١٣)

ليكن $AB = \alpha$، $ML = \beta$ ولنفرض $AB > ML$. ولنأخذ $BC \perp AB$ و $BC = ML$ ولنأخذ القطع المكافئ $\mathscr{P}_1$ ذا الرأس B والمحور BC وذا الضلع القائم AB، والقطع المكافئ $\mathscr{P}_2$ ذا الرأس B والضلع القائم BC والمحور AB.

ولنأخذ نقطة D على BC بحيث يكون $BD = AB$.

ولتكن K النقطة الرابعة من المربع $(ABDK)$ و K'، $K' \in \mathscr{P}_1$ بحيث يكون $K'D \perp BD$؛ عند ذلك يكون:

$$AB \, . \, BD = K'D^2;$$

لكن

$$AB \, . \, BD = KD^2,$$

ذلك لأن $(ABKD)$ مربع؛ فيكون $K'D = KD$ وتكون K' و K النقطة نفسها.

ليكن $S \in \mathscr{P}_2$ و $AS \perp AB$؛ عند ذلك يكون:

$$BC \, . \, AB = AS^2 \, ,$$

لكن

$$BC \, . \, AB < AB^2 \, ,$$

فيكون

$$AS < AK \, ;$$

وتكون النقطة K خارج $\mathscr{P}_2$.

لتكن E نقطة على AB بحيث يكون $BE = ML$ ولتكن G النقطة الرابعة من المربع $(BEGC)$. لتكن G' النقطة من $\mathscr{P}_2$ بحيث يكون $EG' \perp BE$. عند ذلك يكون لدينا:

$$BC \, . \, BE = EG'^2 \, ,$$

لكن

$$BC \, . \, BE = EG^2 \, ,$$

ومنها $EG' = EG$ وبالتالي فإن G و G' هما النقطة نفسها.

لتكن I النقطة من $\mathscr{P}_1$ بحيث يكون $CI \perp BC$؛ لدينا:

$$AB \, . \, BC = CI^2 \, ;$$

لكن

$$AB \, . \, BC > CG^2 \, ,$$

فيكون

$$CI > CG \, ;$$

وتكون النقطة I داخل $\mathscr{P}_2$. وبما أن القطع $\mathscr{P}_1$ يمر بـ I وبـ K فإنه يقطع $\mathscr{P}_2$ حتماً.
ليكن:

$$\{O\} = \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \, .$$

ليكن $OU \perp AB$ وَ $OP \perp BD$. بما أن $O \in \mathscr{P}_1$ يكون لدينا:

$$AB \, . \, BP = OP^2 \, ,$$

وبالتالي، بما أن $BU = OP$:

$$\frac{AB}{BU} = \frac{BU}{BP} \, .$$

من جهة أخرى، بما أن $O \in \mathscr{P}_2$، لدينا:

$$BC \, . \, BU = OU^2$$

وبالتالي، بما أن $OU = BP$:

$$\frac{BC}{BP} = \frac{BP}{BU}$$

فيكون

$$\frac{AB}{BU} = \frac{BU}{BP} = \frac{BP}{BC} \, .$$

بعد أن تم برهان هذه المقدمة، لنضع $\alpha = \ell$، الوحدة الخطية، و$\beta = c\,\ell$، و$\gamma = x\ell$. استناداً إلى المقدمة نستطيع إيجاد γ و δ بحيث يكون:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\delta}{\beta} \, ,$$

فيكون لدينا:

$$\frac{\alpha^2}{\gamma^2} = \frac{\gamma}{\delta} \, . \, \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\beta} \, ,$$

ويكون

$$\beta \, . \, \alpha^2 = \gamma^3$$

لكن

$$\beta\alpha^2 = c\,\ell^3$$

فيكون

$$\gamma^3 = x^3 \ell^3$$

وبالتالي يكون γ هو الحلّ المطلوب ($x\ell = \gamma$).

أما احتساب x فيجري باستخراج الجذر التكعيبي للعدد c بالطريقة المشروحة في الفصل الأول.

تعليـق

من أجل برهان وجود ضلع مكعب مساوٍ لِـ c - أي حجمه مساوٍ لِـ c (المترجم) - يبني الطوسي انطلاقاً من طولين α و β، $\alpha > \beta$، طولين آخرين γ و δ بحيث تتوالى الأطوال الأربعة متناسبة.

من أجل تحديد γ و δ، يستعمل التقاء القطعين المكافئين $\mathscr{P}_1$ ذي المحور AB و$\mathscr{P}_2$ ذي المحور BC:

$$\mathscr{P}_1 = \{(x,\ y)\ ;\ x \geq 0\ ,\ y = \frac{1}{\alpha}x^2\}$$
$$\mathscr{P}_2 = \{(x,\ y)\ ;\ x \geq 0\ ,\ y = \sqrt{\beta}\ .\ \sqrt{x}\}.$$

ويبرهن أن $\mathscr{P}_1$ و $\mathscr{P}_2$ يتقاطعان في نقطة O، يكون إحداثياها الطولين المطلوبين γ و δ.

ليكن

$$f_1(x) = \frac{x^2}{\alpha}\quad ,\quad f_2(x) = \sqrt{\beta}\ .\ \sqrt{x}$$

وليكن

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) = \frac{x^2}{\alpha} - \sqrt{\beta}\ .\ \sqrt{x}$$

إن $f(x)$ معدومة (تساوي الصفر) عند $x = 0$ وكذلك عند $x = x_0 > 0$. فلدينا:

$$f(\alpha) = \alpha - \sqrt{\alpha\ .\ \beta} = \sqrt{\alpha}\ (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}) > 0\ ,$$
$$f(\beta) = \frac{\beta^2}{\alpha} - \beta = \frac{\beta}{\alpha}(\beta - \alpha) < 0\ ;$$

وبما أن الدالة f متواصلة، يوجد x_0 بين β وα، $\beta < x_0 < \alpha$، بحيث يكون $f(x_0) = 0$. ليكن $\gamma = x_0$، $\delta = f_1(x_0) = f_2(x_0)$؛ عند ذلك يكون لدينا:

$$\delta = f_1(x_0) = \frac{\gamma^2}{\alpha} \Longrightarrow \alpha\ .\ \delta = \gamma^2 \Longrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta}$$
$$\delta = f_2(x_0) = \sqrt{\beta}\ .\ \sqrt{\gamma} \Longrightarrow \delta^2 = \beta\ .\ \gamma \Longrightarrow \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\delta}{\beta}$$

وبالتالي

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\delta}{\beta}$$

ملاحظة ١: من المتساوية:

$$\frac{AB}{BU} = \frac{BU}{BP} = \frac{BP}{BC}$$

نستخلص

$$AB^2 \,.\, BC = BU^3 \qquad (١)$$

$$AB \,.\, BC^2 = BP^3 \qquad (٢)$$

مع العلم أننا فرضنا $AB > BC$.

- إذا كان $c < 1$، نضع $AB = \ell$، $BC = c\ell$، $BU = x\ell$، فيكون لدينا:

$$c\ell^3 = x^3\ell^3 \Longrightarrow c = x^3 \qquad (١)$$

ويكون الحل معطىً بـ BU.

- إذا كان $c > 1$، نضع $AB = c\ell$، $BC = \ell$، $BP = x\ell$، فيكون لدينا:

$$c\ell^3 = x^3\ell^3 \Longrightarrow c = x^3 \qquad (٢)$$

ويكون الحل معطىً بـ BP.

ملاحظة ٢: يبرهن الطوسي أن نقطة $\mathscr{P}_1$، ذات الإحداثية السينية AB هي الرأس K للمربع مستخدماً في ذلك، وبشكل صريح، معادلة القطع المكافىء. ويستعمل كذلك، معادلة $\mathscr{P}_2$ لكي يبرهن أن K تقع خارج $\mathscr{P}_2$.

بالطريقة نفسها يبرهن أن النقطة I من $\mathscr{P}_1$ ذات الإحداثية السينية BC تقع داخل $\mathscr{P}_2$.

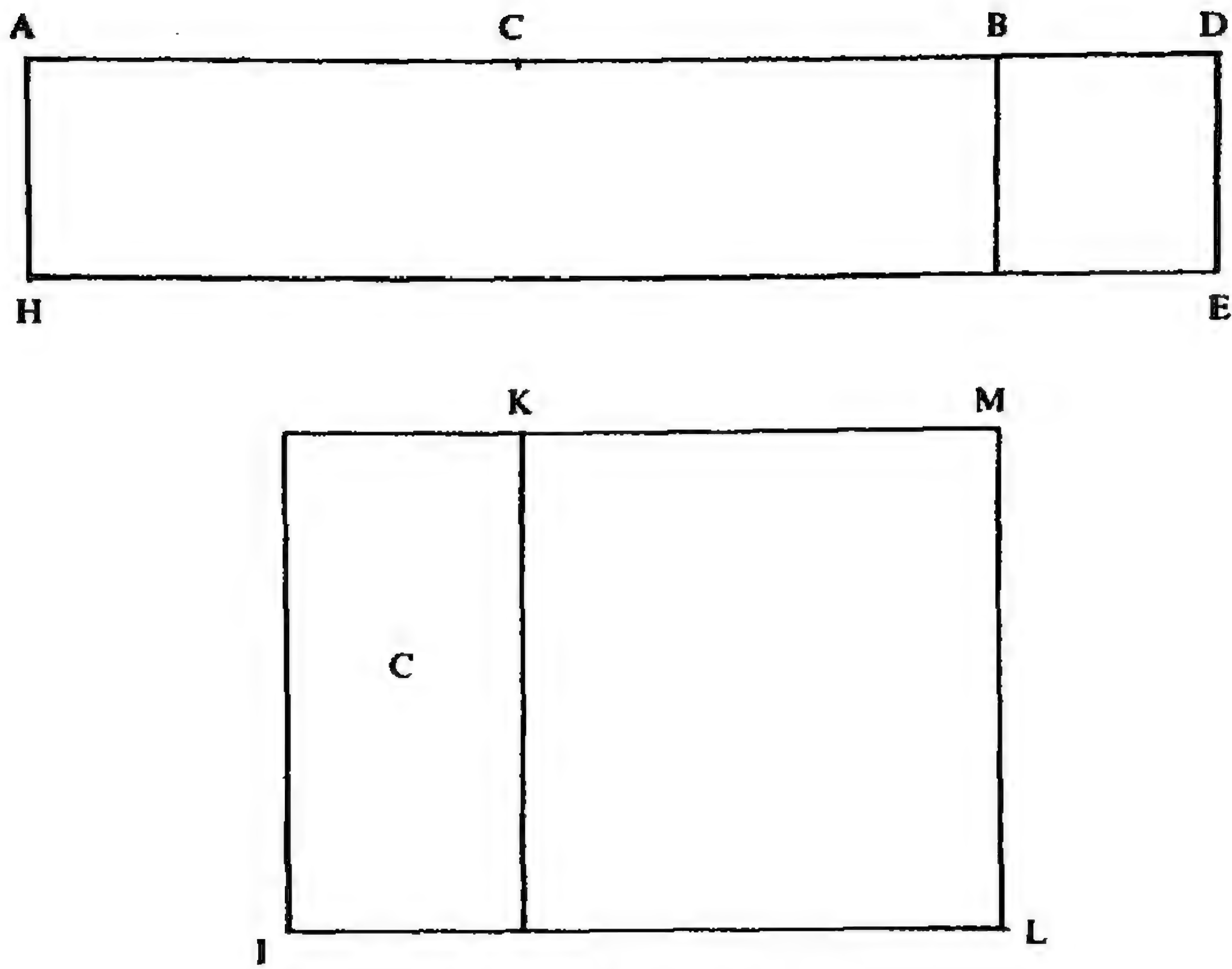
ملاحظة ٣: يستعمل الطوسي المفهوم الهندسي لِـ «الداخل» و«الخارج» لكي يثبت التقاء المنحنيين.

معادلات الدرجة الثانية ثلاثية الحدود

المعادلة ٧: $x^2 + bx = c$

فليكن $AB = b$ ولتكن C النقطة المنصّفة لِـ AB (الشكل رقم (٢ - ١٤))؛ ليكن (KL) مربعاً مساحته $\frac{b^2}{4}$ وليكن:

$$(IK) = c \quad , \quad (IM) = (IK) \cup (KL) = \frac{b^2}{4} + c$$



الشكل رقم (٢ ـ ١٤)

نبني مربعاً ضِلعه X بحيث يكون $(IM) = X^2$، فيكون $X > CB$ لأن $X > \frac{b}{2}$.
نأخذ $CD = X$.

$$CD = CB + BD = \frac{b}{2} + BD$$

فيكون

$$CB^2 + c = (IM) = X^2 = (CD)^2 = CB^2 + BD^2 + 2BD.CD = CB^2 + BD^2 + AB.BD\ ;$$

وبالتالي

$$c = BD^2 + AB.BD$$

ويكون BD هو الحل المطلوب، $(x = BD)$.

ليكن $ED \perp BD$ و $ED = BD$، نُكمل المستطيل $ADEH$ فيكون:

$$(ADEH) = AD.DE = BD^2 + AB.BD = C\,.$$

تعليـق

نأخذ التحويل الأفيني:

$$x \longrightarrow x + \frac{b}{2} = X$$

فيكتب x على الشكل:

$$x = X - \frac{b}{2} \;;$$

فإذا كان x حلاً للمعادلة $x^2 + bx = c$، يكون X حلاً للمعادلة:

$$\left(X - \frac{b}{2}\right)^2 + b\left(X - \frac{b}{2}\right) = c$$

التي تكتب كالتالي:

$$X^2 = c + \frac{b^2}{4} \qquad (١)$$

فيكون $x > \frac{b}{2}$.

لكن أي X يحقق العلاقة:

$$X^2 = \left[\left(X - \frac{b}{2}\right) + \frac{b}{2}\right]^2 = \frac{b^2}{4} + \left(X - \frac{b}{2}\right)^2 + b\left(X - \frac{b}{2}\right) \qquad (٢)$$

ومن العلاقتين (١) و (٢) نستنتج:

$$c = \left(X - \frac{b}{2}\right)^2 + b\left(X - \frac{b}{2}\right),$$

أي

$$c = x^2 + b.x \,.$$

وبما أن $X = \left(c + \frac{b^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$، يكون الحل المطلوب $\left(c + \frac{b^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{2}$.

ملاحظة: يبرهن الطوسي، عن طريق بناءات هندسية، وجود الجذر الموجب المقابل لكل مزدوج $(b,\, c)$ من الأعداد الموجبة ويشير إلى طريقة احتساب هذا الجذر.

نشير إلى أن $c + \frac{b^2}{4}$ هو مميز المعادلة $x^2 + bx - c = 0$ وأن الطوسي يحتسب الجذر الموجب:

$$x = \sqrt{c + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}.$$

ولأجل حل عددي لهذا النوع من المعادلات، يعالج الطوسي أمثلة ثلاثة منها بحسب كون المرتبة السمية للموضع الأخير للجذر («المرتبة السمية للجذر الأخير») في c، أكبر أو أصغر أو مساوية «لآخر مراتب» العدد b. [راجع المقدمة، الفقرة سادساً:

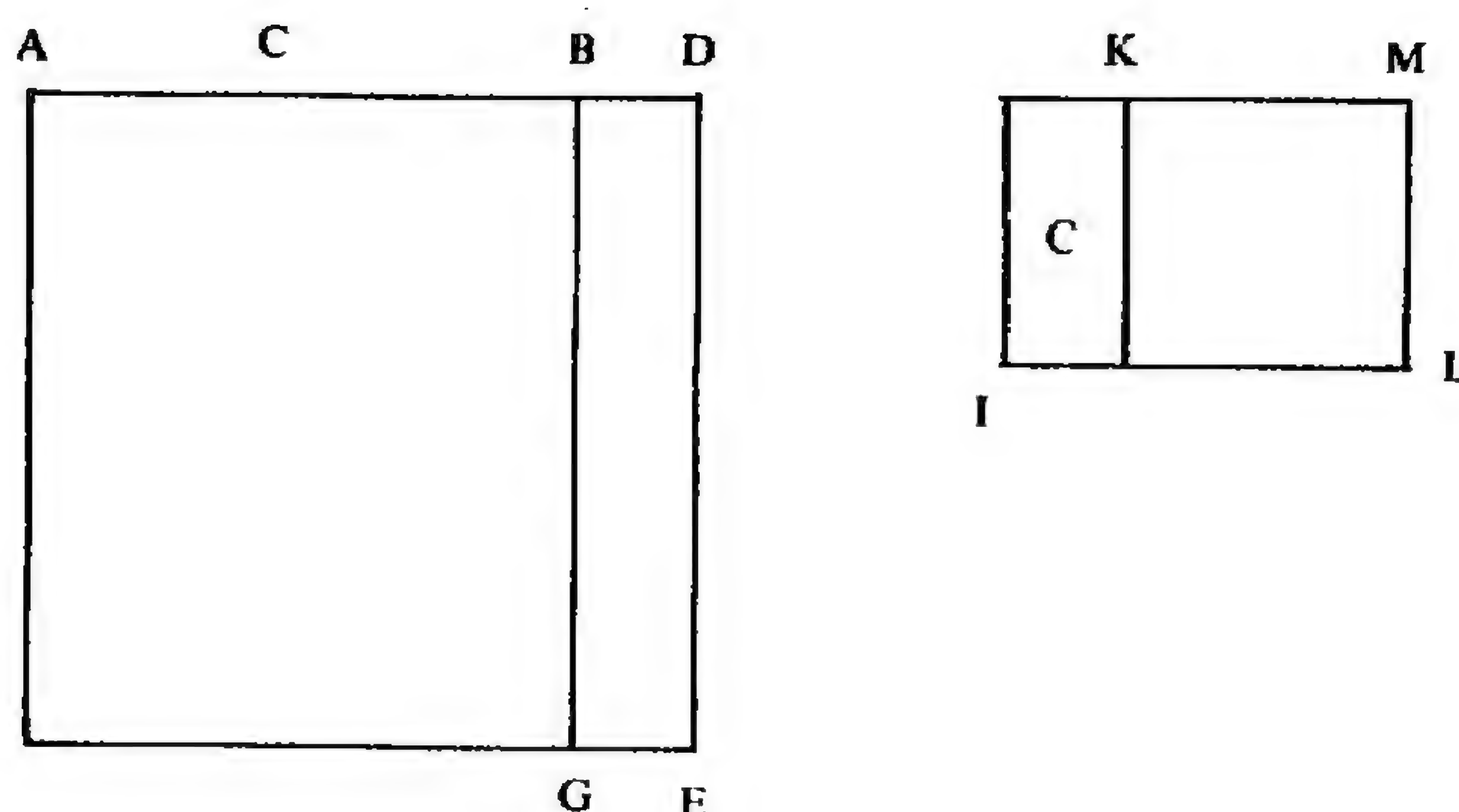
الترجمة الفرنسية] (من أجل التذكير بمعاني هذه المصطلحات، راجع المقدمة، الفقرة ثامناً: المصطلحات)[١١].

المعادلة ٨: $x^2 = bx + c$

ليكن $AB = b$، ولتكن C منتصف AB، وليكن $(KL) = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ و $(IK) = c$ ولنأخذ مربعاً ضلعه CD بحيث يكون:

$$CD^2 = (IK) + (KL)$$

فيكون $CD > CB$ وتكون D على امتداد CB (الشكل رقم (٢ ـ ١٥)).



الشكل رقم (٢ ـ ١٥)

ويكون لدينا:

$$c + CB^2 = BD^2 + CB^2 + 2CB.BD = BD^2 + CB^2 + AB.BD$$

---

(١١) في المثال الأول:

$$x^2 + 31x = 1\dot{1}\ 2\dot{9}9\dot{2}$$
$$3\ 1$$

المرتبة السمية للجذر الأخير = 2 (المئات)

المرتبة السمية لأرفع مراتب عدد الجذور = 1 (العشرات)

وفي المثال الثاني:

$$x^2 + 2012x = 7\dot{4}8\dot{8}9\dot{3}$$

المرتبة السمية للجذر الأخير = 2 (المئات)

المرتبة السمية لآخر مراتب عدد الجذور = 3، (الألوف). (المترجم).

وبالتالي

$$c = BD^2 + AB.BD = AD.DB,$$

لكن

$$AD.DB + AD.AB = AD^2,$$

فيكون

$$AB.AD + c = AD^2,$$

ويكون AD هو الحل المطلوب.

ليكن $(AE) = AD^2$ و $BG//DE$ ولنفرض $BD = X$، وَ $AB = b$؛ عند ذلك يكون $AD = b + X$ ويكون:

$$(BE) = (b + X) \; . \; X = bX + X^2 = c$$

وهي المعادلة السابقة[١٢] التي نحتسب حلّها بالطريقة المذكورة في المسألة السابقة. ويكون حل المعادلة المطروحة:

$$x = X + b.$$

تعليـق

يبرهن الطوسي هندسياً وجود الجذر الموجب. بعد ذلك وبواسطة التحويل الأفيني:

$$x \longrightarrow x - b = X,$$

(وهو تحويل ممكن لأن $x > b$) يحول المسألة إلى معادلة من نوع المعادلة ٧ السابقة. فالمعادلة ٨ تعطي:

$$(b + X)^2 = b(b + X) + c$$

وهو ما يعادل

$$X^2 + bX = c$$

أي المعادلة ٧. وبصورة عكسية، إذا كان X حلاً للمعادلة ٧ يكون:

$$X \; . \; (b + X) = c$$

وبالتالي:

$$b(b + X) + X(b + X) = c + b(b + X)$$

---

(١٢) المعادلة ٧.

أي

$$(b+X)^2 = c + b \,.\, (b+X)$$

وهذا يعني أن $x = (b+X)$ هو حل للمعادلة ٨.

نشير إلى أن $CD^2 = \frac{b^2}{4} + c$ التي وردت في حساب الطوسي هي مميِّز المعادلة ٨، لكن من الواضح تماماً أن ما رمى إليه الطوسي هنا هو تحويل المعادلة ٨ إلى معادلة من النوع السابق. يعطي الطوسي مثلاً واحداً:

$$21x + 96300 = x^2$$

ويستخدم التحويل الأفيني:

$$x \longrightarrow x - 21 = X$$

فيحصل على المعادلة:

$$X^2 + 21x = 96300;$$

حيث يجد الحل $X = 300$ وبالتالي $x = 321$.

المعادلة ٩: $x^2 + c = bx$

ليكن $AB = b$. بما أن $x.x = x^2$ و $b.x = x^2 + c$، فيكون $AB > x$. فإذا فرضنا $BD = x$، تكون النقطة D إذن بين A وَ B ويكون $AB.BD = b.x$ (الشكل رقم (٢ ـ ١٦)). ليكن $(BG) = x^2 + c$، $DE \perp AB$ و (BE) المربع ذا الضلع BD.

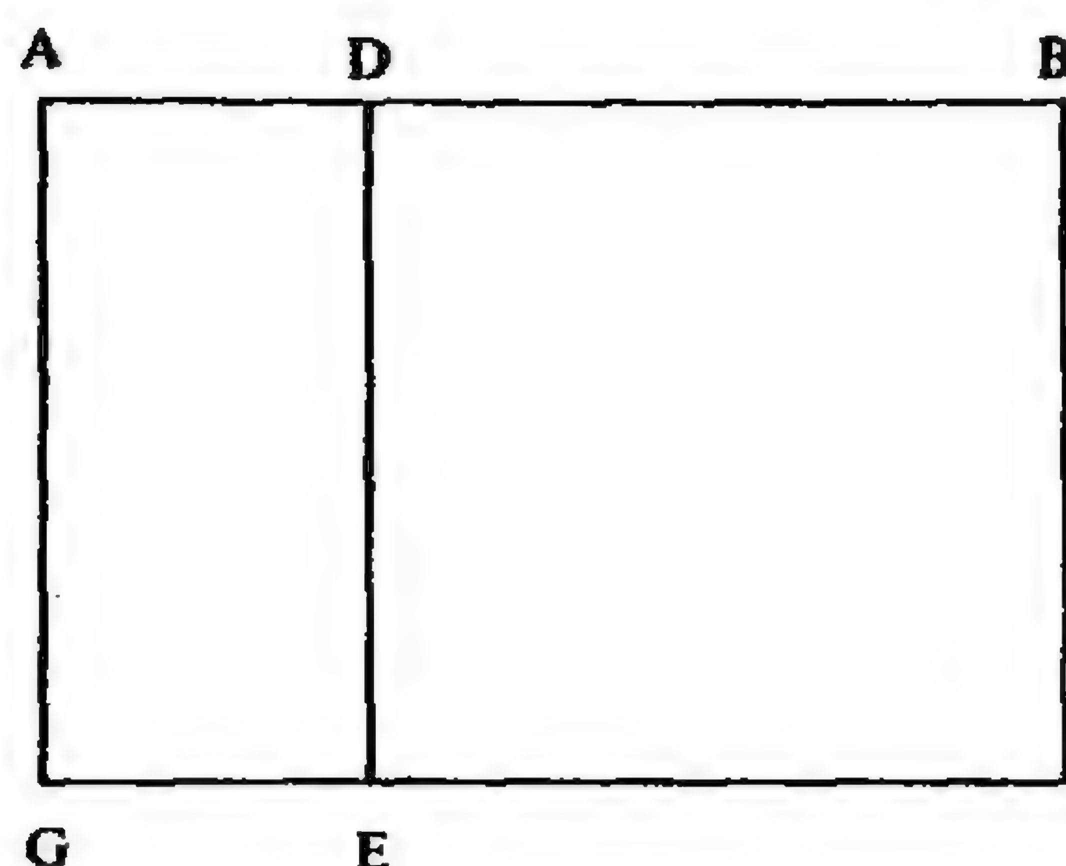
بما أن $(BE) = x^2$ يكون $(DG) = c$ وبالتالي $c = AD.BD$. لكن، لكي يكون هذا الأمر ممكناً، يتوجب أن توجد نقطة D على AB (أي بين A و B) بحيث يكون:

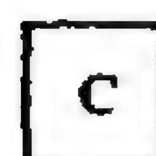
$$AD.DB = c.$$

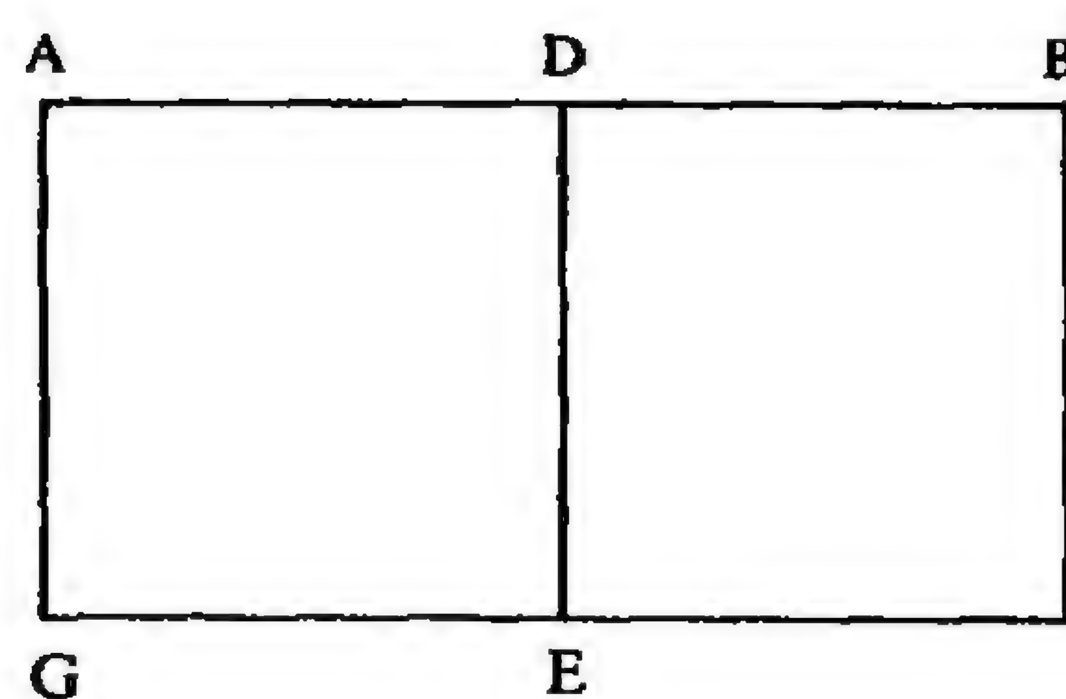
إذا كان $c > \left(\frac{b}{2}\right)^2$ يكون $c > AD.BD$ لأن: $\left(\frac{AB}{2}\right)^2 > AD.BD$، فلا يمكن وجود D في هذه الحالة. فلكي تكون المسألة معقولة يتوجب أن يكون $c \leq \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

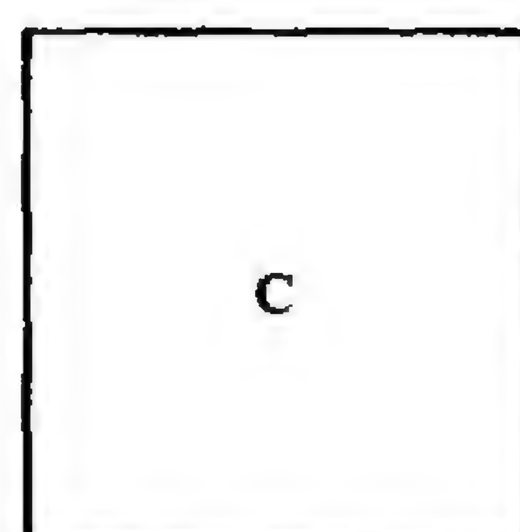
ـ إذا كان $c > \left(\frac{b}{2}\right)^2$، المسألة مستحيلة.

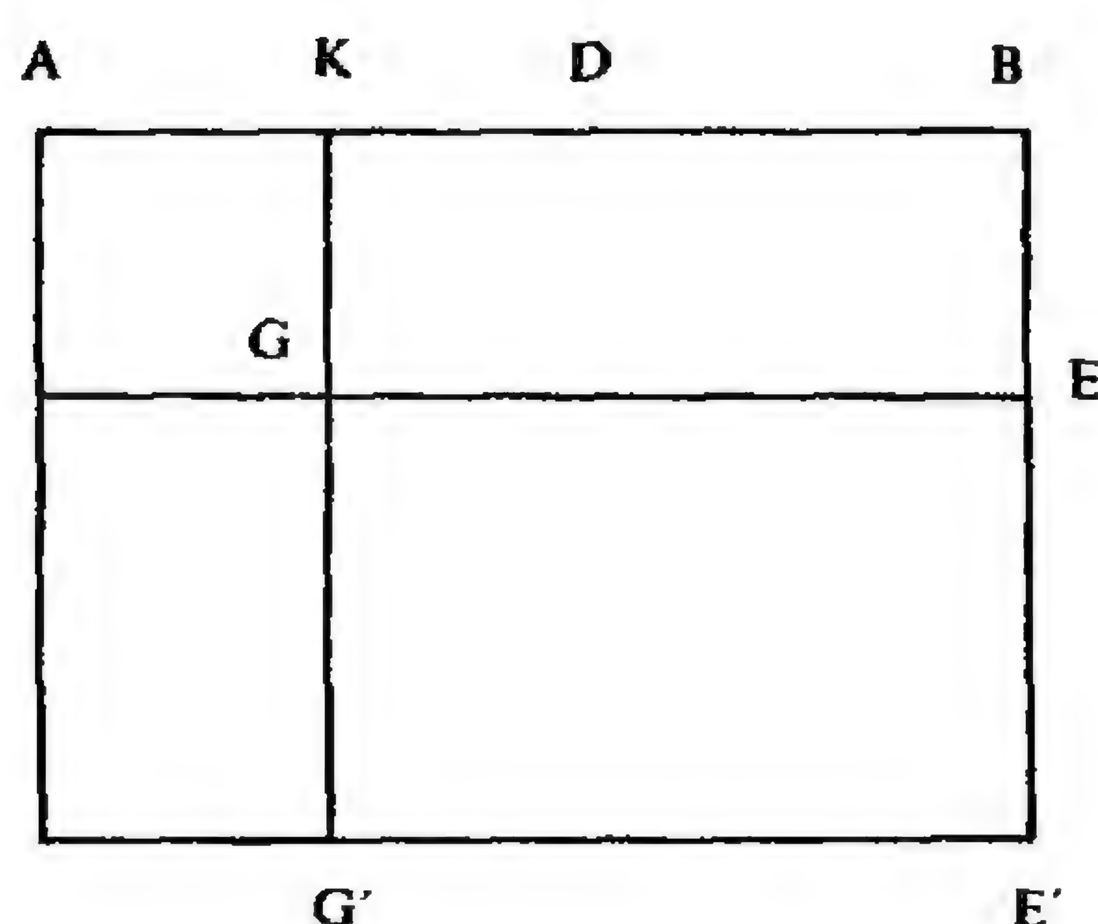
ـ إذا كان $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$، يوجد حلٌ $x = \frac{b}{2}$.

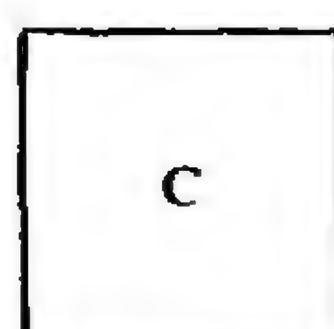


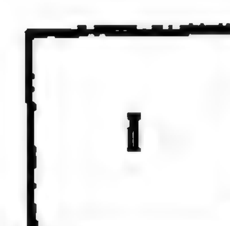












الشكل رقم (٢ ـ ١٦)

ـ إذا كان $\left(\frac{b}{2}\right)^2 > c$، يوجد حلان x_1 و x_2 يحققان:

$$x_1 < \frac{b}{2} \quad , \quad x_2 > \frac{b}{2} \quad , \quad x_1 + x_2 = b \, .$$

فلنفرض أن $\left(\frac{b}{2}\right)^2 \geq c$ ولنأخذ D على AB بحيث $DA = DB$.

ـ في حال $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$، إذا فرضنا $x_1 = BD$، $x_2 = AD$، يكون لدينا $x_1 . x_2 = c$.

- في حال $c < \left(\frac{b}{2}\right)^2$، نفرض $I = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$. توجد نقطة K على AD بحيث يكون $DK^2 = I$، فيكون:

$$DB^2 = c + DK^2$$

لكن

$$AK.KB + DK^2 = DB^2$$

فيكون

$$AK.KB = c.$$

ونكون قد وجدنا مقدارين AK و KB يحققان

$$AK + KB = b \quad \text{و} \quad AK.KB = c.$$

ليكن $(AG) = AK^2$ و (AE) المستطيل بكامله؛ عند ذلك يكون لدينا:

$$(AE) = AB.BE = AB.GK = AB.AK,$$

فيكون

$$(GB) = BK.KG = c \quad \text{و} \quad (GB) + (AG) = AB.AK.$$

فإذا سمينا $AK = x_1$ يحصل لدينا:

$$x_1^2 + c = x_1 \ . \ AB = bx_1.$$

وكذلك، ليكن (BG') المربع ذا الضلع BK و (AE') المستطيل الذي يقابله، فيكون:

$$(KE') + (AG') = BK \ . \ AB.$$

فإذا وضعنا $BK = x_2$، يكون:

$$x_2^2 + c = bx_2.$$

تعليـق

يمكن كتابة المعادلة ٩ على الشكل التالي:

$$c = x(b - x)؛ \qquad (١)$$

فيكون $x < b$ (بديهياً). وطالما أن:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 - bx + \frac{b^2}{4} \geq 0$$

يكون $\frac{b^2}{4} \geq x.(b-x)$.

- إذا كان $c > \frac{b^2}{4}$ تكون العلاقة (١) مستحيلة.

- إذا كان $c = \frac{b^2}{4}$ يكون $x = \frac{b}{2}$ حلاً مزدوجاً، فإذا أشرنا بـ x_1 و x_2 إلى حلّي المعادلة يكون لدينا $x_1 = x_2 = \frac{b}{2}$ وبالتالي $x_1 + x_2 = b$. وكذلك يكون:

$$x_1 \, . \, x_2 = \frac{b^2}{4} = c.$$

- إذا كان $c < \frac{b^2}{4}$ يكون للمعادلة حلان موجبان x_1 وx_2 يحققان:

$$x_1 < \frac{b}{2} \quad , \quad x_2 > \frac{b}{2} \quad , \quad x_2 = b - x_1,$$

ويكون بالتالي $x_1 + x_2 = b$ وَ $x_1 \, . \, x_2 = c$.

في الحالة الأخيرة هذه يأخذ الطوسي:

$$x_1 = \frac{b}{2} - \sqrt{\Delta'}$$

حيث $\Delta' = \frac{b^2}{4} - c$ ويبرهن أن x_1 هي بالفعل حلّ؛ فلدينا:

$$c + \Delta' = \frac{b^2}{4}$$

لكن

$$\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\Delta'}\right) \, . \, \left(\frac{b}{2} + \sqrt{\Delta'}\right) + \Delta' = \frac{b^2}{4}$$

فيكون

$$\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\Delta'}\right) \, . \, \left(\frac{b}{2} + \sqrt{\Delta'}\right) = c$$

وبالتالي

$$x_1 \, (b - x_1) = c$$

وهذا يعطي أيضاً

$$(b - x_2) \, . \, x_2 = c.$$

ملاحظة ١: في سياق برهانه يبرز الطوسي المميز $\frac{b^2}{4} - c$ والشكل الطبيعي (القانوني) للمعادلة وكذلك $DK^2 = \frac{b^2}{4} - c$، كما يبرز الدالات المتناظرة[١٣] للجذور في

---

(١٣) في هذه الحالة مجموع الجذرين، وحاصل ضربهما. (المترجم).

حالة وجود جذرين موجبين. يدرس من ثَم، حلاً عددياً لمعادلة من هذا النوع:

$$x^2 + 578442 = 2123x ,$$

- راجع الفصل الأول، الفقرة سادساً: «إعادة تركيب الجداول»، الجدول رقم (٣)؛ يحتسب x_1 ثم يستنتج $x^2 = b - x_1$.

ملاحظة ٢: في المعادلتين السابقتين (٧ و ٨ (المترجم))، أبرز الطوسي المميز كما أبرز الشكل الطبيعي لكل منهما. إلا أنه لم يبرز الدالات المتناظرة للجذرين لأنه لم يأخذ بالاعتبار في كلتا هاتين الحالتين سوى الجذر الموجب.

ملاحظة ٣: في المعادلات الثلاث السابقة، حل الطوسي المعادلة:

$$x^2 + bx + c = 0, \qquad (١)$$

- في المعادلة ٧، $b > 0$، $c < 0$.
- في المعادلة ٨، $b < 0$، $c < 0$
- في المعادلة ٩، $b < 0$، $c > 0$.

لكن الحالة $b > 0$، $c > 0$، لم تُعالَج. فالطوسي لم يكتب هذه المعادلة على الشكل (١). ولم يكتبها على هذا الشكل معاصروه أو من أتوا بَعدَه[١٤].

المعادلة ١٠: $x^3 + ax^2 = bx$

تعود هذه المعادلة إلى المعادلة ٧:

$$x^2 + ax = b.$$

ليكن A المكعب ذا الضلع ℓ، $A = x^3.s$. وليكن:

$$B = ax^2s ،C = bxs ،D = x^2p ،E = axp ،G = bp،$$

$$H = x^2s ،I = xs ،L = p ،K = xp.$$

لدينا:

$$\frac{A}{I} = \frac{D}{L} \quad , \quad \frac{I}{C} = \frac{L}{G}$$

وبالتالي

$$\frac{A}{C} = \frac{D}{G}. \qquad (١)$$

(١٤) كان يفترض أن يكون طرفا المعادلة موجبين. (المترجم).

ولدينا أيضاً:

$$\frac{B}{H}=\frac{E}{K} \quad , \quad \frac{H}{I}=\frac{K}{L} \quad , \quad \frac{I}{C}=\frac{L}{G}$$

وبالتالي

$$\frac{B}{C}=\frac{E}{G}. \qquad (٢)$$

من (١) و (٢) نستنتج:

$$\frac{A+B}{C}=\frac{D+E}{G}$$

لكن، استناداً إلى المعادلة ١٠، لدينا:

$$A+B=C$$

فيكون لدينا

$$D+E=G$$

وبالتالي

$$x^2+ax=b.$$

لحل المعادلة ١٠، نحلُّ إذن المعادلة ٧ (الشكل رقم (٢ ـ ١٧)).

A

I

B

H

C

D

L

E

K

G

الشكل رقم (٢ ـ ١٧)

تعليـق

يبرهن الطوسي أن عدداً موجباً x_0 هو حل للمعادلة ١٠ إذا، وفقط إذا، كان x_0 حلاً للمعادلة:

$$x^2+ax=b.$$

ذلك لأن

$$\frac{x^3+ax^2}{bx}=\frac{x^2+ax}{b}.$$

نشير إلى أن البرهان يحترم بثبات التجانس: نسب الأحجام، نسب المساحات، التي تُستبدل بقياساتها في ما بعد.

المعادلة ١١: $ax^2+bx=x^3$

ترجع هذه المعادلة إلى المعادلة ٨.

ليكن $A=bxs$، $B=ax^2s$، $C=x^3s$، $D=bp$، $E=axp$، $G=x^2p$. نبين

كما فعلنا سابقاً أن:

$$\frac{A+B}{C}=\frac{D+E}{G}$$

لكن

$$A+B=C$$

فيكون، بالتالي:

$$D+E=G$$

فيكون

$$ax+b=x^2. \quad \text{(المعادلة ٨)}$$

فالعدد x_0 هو حل للمعادلة ١١، إذا، وفقط إذا، كان حلاً للمعادلة ٨. يكفي إذن حل المعادلة ٨ (الشكل رقم (٢ ـ ١٨)).

A
B
C
D
E
G

الشكل رقم (٢ ـ ١٨)

المعادلة ١٢: $x^3+bx=ax^2,$

ترجع إلى المعادلة ٩.

لـيـكـن $A=x^3s$، $B=bxs$، $C=ax^2s$، $D=x^2p$، $E=bp$، $G=axp$.

فنبرهن كما في السابق أن:

$$\frac{A+B}{C}=\frac{D+E}{G}\ .$$

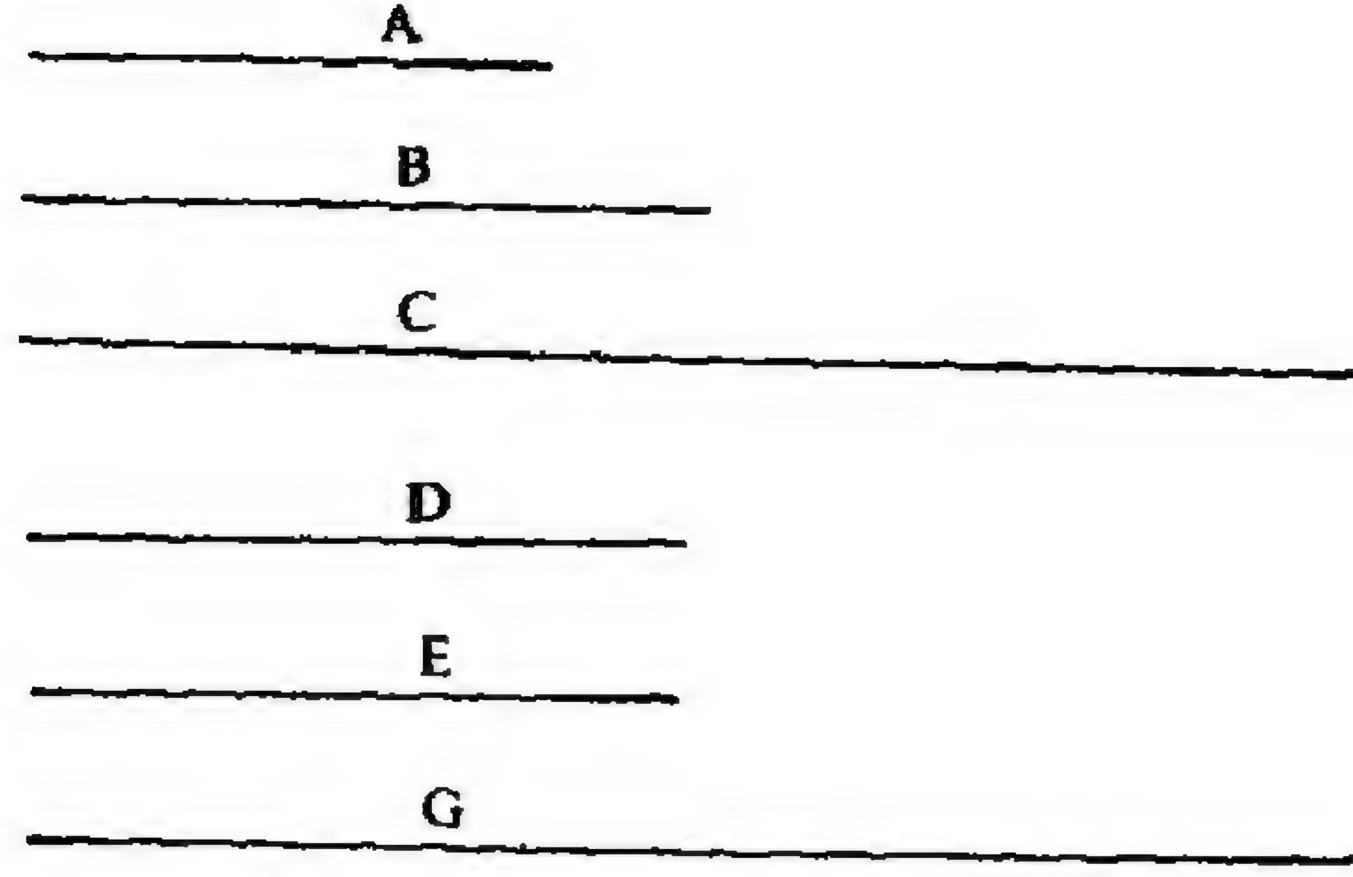
لكن، بما أن $A+B=C$ (المعادلة ١٢)، يكون:

$$D+E=G\ ;$$

وبالتالي

$$x^2 + b = ax \,. \quad \text{(المعادلة ٩)}$$

فالعدد x_0 هو حل للمعادلة ١٢، إذا، وفقط إذا، كان حلاً للمعادلة ٩. يكفي إذن حل هذه المعادلة الأخيرة (الشكل رقم (٢ ـ ١٩)).



الشكل رقم (٢ ـ ١٩)

نشير إلى أن الطوسي لا يعتمد أي حل عددي بالنسبة إلى المعادلات الثلاث الأخيرة. فالقضية في نظره هي قضية اختزال جبري.

معادلات الدرجة الثالثة I

يدرس الطوسي في هذا الفصل المعادلات التكعيبية التي لها دائماً حل موجب.

المعادلة ١٣: $x^3 + bx = c$

ليكن $AB = \sqrt{b}\,\ell$، $E = p$، $MN = c.\ell$، فيكون:

$$MN.p = c.s$$

ولتكن O قطعة مستقيمة تحقق العلاقة:

$$\frac{\ell}{AB} = \frac{AB}{O}$$

عند ذلك يكون:

$$\frac{p}{AB^2} = \frac{\ell}{O} \,.$$

ليكن $AC \perp AB$ بحيث يكون $\frac{MN}{AC} = \frac{O}{\ell}$؛ فبما أن $\frac{AB^2}{p} = \frac{O}{\ell}$، يكون $\frac{AB^2}{p} = \frac{MN}{AC}$

فيكون:

$$AB^2 \, . \, AC = p. \, MN = c \, . \, s$$

ومنها

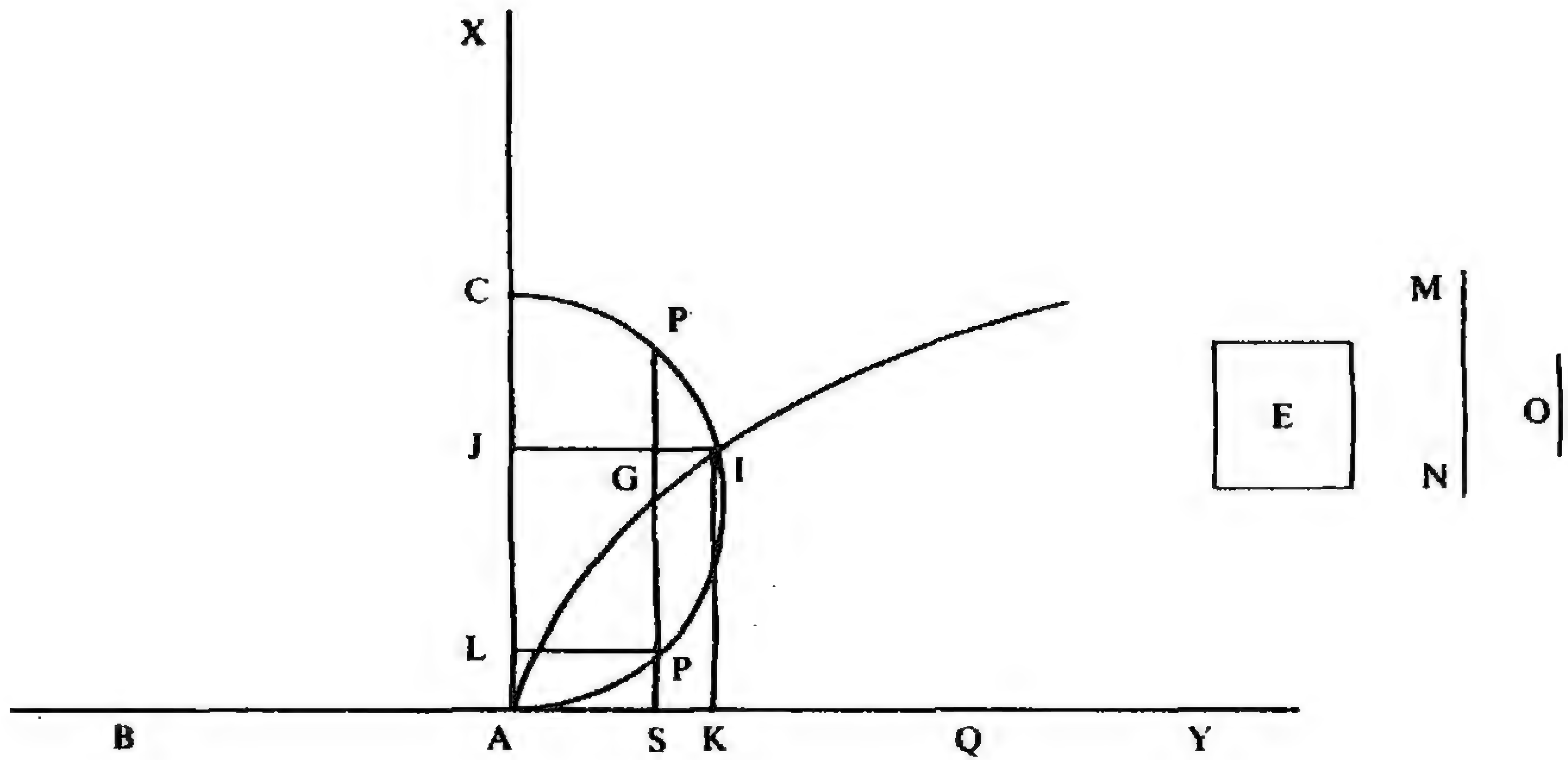
$$AC = \frac{c}{b} \, . \, \ell \, .$$

لنأخذ نصف الدائرة $\mathscr{C}$ ذات القطر AC، والقطع المكافئ $\mathscr{P}$ ذا الرأس A والمحور AQ والضلع القائم AB؛ فيكون AC مماساً لِ $\mathscr{P}$ في رأسه. ولتكن L نقطة من AC بحيث يكون:

$$AL < AC \quad \text{وَ} \quad AL < AB$$

ليكن $P \in \mathscr{C}$ بحيث يكون $LP \perp AC$ (الشكل رقم (٢ ـ ٢٠))، عند ذلك يكون لدينا:

$$LA \, . \, LC = LP^2 \qquad (\text{قدرة } L)$$



الشكل رقم (٢ ـ ٢٠)

وبالتالي

$$\frac{AL}{LP} = \frac{LP}{LC} \quad \text{وَ} \quad \frac{AL^2}{LP^2} = \frac{AL}{LC} ،$$

فيكون $AL^2 < LP^2$.

ليكن $PS \perp AB$، PS يقطع $\mathscr{C}$ في G ويكون لدينا:

$$\frac{AB}{AL} > \frac{AL}{LP}$$

فيكون

$$AB.LP > AL^2$$

لكن

$$AB.AS = SG^2 \quad (\text{معادلة } \mathscr{P})$$

فيكون

$$SG > SP$$

وتكون بالتالي G داخل الدائرة (راجع الملاحظة ١) لئلا تكون LP مساوية لشعاع الدائرة وهذا محال.

لذلك، إذا أطَلنا $\mathscr{P}$ إلى ما لا نهاية، فسوف يقطع الدائرة في نقطة، I. وإذا أخذنا $IK \perp AB$ و $IJ \perp AC$، يكون لدينا:

$$AB.AK = AJ^2 \quad (\text{معادلة } \mathscr{P})$$

ومن هنا

$$\frac{AB}{AJ} = \frac{AJ}{AK} ,$$

لكن

$$AJ.JC = IJ^2 \quad (\text{قدرة } J)$$

فيكون

$$\frac{AJ}{IJ} = \frac{IJ}{JC}$$

ومن هنا

$$\frac{AB}{AJ} = \frac{AJ}{IJ} = \frac{IJ}{JC} ,$$

ونحصل على

$$AB^2 \,.\, JC = AJ^3 ,$$

وبالتالي على

$$AB^2 \,.\, AJ + AB^2 \,.\, JC = b \,.\, AJ + AJ^3 \,.$$

ولقد رأينا أن

$$AB^2 \,.\, AJ + AB^2 \,.\, JC = AB^2 \,.\, AC = c \quad (= c.s)$$

فنكون قد وجدنا قطعة مستقيمة AJ تحقق

$$AJ^3 + bAJ = c$$

ويكون AJ هو الحل المطلوب.

تعليق

لنأخذ المعادلة ١٣:

$$x^3 + bx = c \qquad (١)$$

حيث $b > 0$ و $c > 0$. لهذه المعادلة جذر حقيقي واحد، وهو موجب، يحدده الطوسي.

لكي نفهم اختيار الطوسي للمنحنيات التي استخدمها، نضرب طرفي المعادلة بـ x، فنحصل على:

$$x^4 + bx^2 = cx \qquad (٢)$$

ذات الحل المبتذل $x = 0$ والتي تكتب:

$$\frac{x^4}{b} = \frac{c}{b}x - x^2 \qquad (٣)$$

إذا وضعنا

$$y^2 = x\left(\frac{c}{b} - x\right) \quad (\mathscr{C} \text{ معادلة})$$

نحصل على $y^2 = \frac{x^4}{b}$ وبالتالي على:

$$y = \frac{1}{\sqrt{b}}x^2 \quad (\mathscr{P} \text{ معادلة})$$

وذلك بإهمال القطع المكافئ $\mathscr{P}'$، ذي المعادلة $y = -\frac{1}{\sqrt{b}}x^2$ لأن $\mathscr{P}$ و $\mathscr{P}'$ متناظران بالنسبة إلى قطر $\mathscr{C}$، وبالتالي فإن النقط $\mathscr{C} \cap \mathscr{P}$ و $\mathscr{C} \cap \mathscr{P}'$ لها الإحداثيات السينية نفسها.

يبرهن الطوسي أن $\mathscr{C}$ و $\mathscr{P}$ إذا التقيا في نقطة $X = (x_0, y_0)$ غير النقطة $A = (0, 0)$ فعند ذلك يكون x_0 جذراً لِـ (١):

$$\frac{\sqrt{b}}{x_0} = \frac{x_0}{y_0} = \frac{y_0}{\frac{c}{b} - x_0},$$

وبالتالي

$$\frac{b}{x_0^2} = \frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{y_0}{\frac{c}{b} - x_0} = \frac{x_0}{\frac{c}{b} - x_0}$$

ومنها

$$x_0^3 = b\left(\frac{c}{b} - x_0\right)$$

وَ

$$x_0^3 + bx_0 = c\ .$$

ويبرهن أن $\mathscr{C}$ و $\mathscr{P}$ يلتقيان معتمداً طريقة تعود إلى التالية:

نفرض أن $P(x,\ y) \in \mathscr{C}$ وأن:

$$x < \sqrt{b} \qquad \text{وَ} \qquad x < \frac{c}{b} - x$$

بما أن

$$y^2 = x\left(\frac{c}{b} - x\right)\ ,$$

يكون لدينا

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{x}{\left(\frac{c}{b} - x\right)}\ ,$$

وبالتالي

$$x^2 < y^2$$

ومنها

$$x < y \qquad \text{وَ} \qquad \frac{x}{y} < 1 < \frac{\sqrt{b}}{x}$$

فيكون

$$\sqrt{b}\ y > x^2\ .$$

ليكن $G = G(X,\ Y) \in \mathscr{P}$. معنا العلاقة:

$$\sqrt{b}\ y = X^2$$

فيكون

$$X > x\ .$$

ويكون P داخل $\mathscr{P}$ و $C = C\left(\frac{c}{b},\ 0\right) \in \mathscr{C}$ خارج $\mathscr{P}$. وبما أن $\mathscr{P}$ منحنٍ متواصل له فرع في اللانهاية، فإن $\mathscr{P}$ يقطع $\mathscr{C}$ حتماً.

ملاحظة ١: في التعليق الذي تقدم حوّرنا قليلاً في تعليلات الطوسي. فمن أجل أن يبرهن التقاء المنحنيين، يؤكد أن G داخل الدائرة؛ لكن النقطة G يمكن أن تكون خارج $\mathscr{C}$ كما يظهر المثال المعاكس التالي:

نأخذ $b = 144$، $c = 1008$، فيكون $\sqrt{b} = 12$، $\frac{c}{b} = 7$؛ ومعادلة $\mathscr{C}$ تكتب كما يلي:

$$y^2 = x(7 - x)\ ;$$

أما معادلة $\mathscr{P}$ فتكتب

$$x^2 = 12y.$$

نأخذ $LP = y_0 = 3$ ؛ $x_0 = SG = 6$. على الدائرة $\mathscr{C}$، معنا:

$$9 = x(7 - x)$$

فيكون الجذران x_1 و x_2:

$$SP = x_1 = \frac{7 - \sqrt{13}}{2} < 6$$

وَ

$$x_2 = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} = SP' < 6$$

ويكون G بالتالي ما بعد P'، خارج الدائرة.

ملاحظة ٢: اختيار نصف الدائرة والقطع المكافئ هو الاختيار نفسه الذي اعتمده الخيّام، الذي لم يبرهن تقاطعهما. ومن البديهي أنه ليس الاختيار الوحيد، إذ كان بإمكانه اختيار القطع المكافئ ذي المعادلة:

$$y = x^2 + b$$

والقطع الزائد ذي المعادلة $y = \frac{c}{x}$، لأن الصفر ليس حلاً للمعادلة ١٣.

ينهي الطوسي دراسته بحل ثلاث معادلات عددية مطبقاً طريقة الفصل الأول، الفقرة سادساً: «إعادة تركيب الجداول» (راجع الجدولين رقمي (١ ـ ٤) وَ (١ ـ ٥)).

المعادلة ١٤: $c + bx = x^3$

نأخذ AB بحيث يكون $AB^2 = bp$ وَ $K = p$ ونأخذ قطعة مستقيمة O، طولها c، فيكون $K.O = c.s$. ونأخذ J بحيث يكون:

$$\frac{\ell}{AB} = \frac{AB}{J}$$

فيكون

$$\frac{p}{AB^2} = \frac{\ell}{J}\ .$$

ونأخذ النقطة C بحيث يكون $\frac{J}{\ell} = \frac{O}{AC}$ و $AC \perp AB$. فبما أن:

$$\frac{J}{\ell} = \frac{AB^2}{p} = \frac{O}{AC}$$

يكون

$$AB^2 . AC = p.O = c$$

فيكون

$$AC = \frac{c}{b} .$$

ليكن $\mathscr{P}$ القطع المكافئ ذا الرأس A والمحور AE والضلع القائم $AG = AB$ وليكن $\mathscr{H}$ القطع الزائد ذا الرأس A والمحور AQ والقطر المجانب AC (الشكل رقم (٢ ـ ٢١)). ولتكن S نقطة على AE بحيث يكون $AS = AB$ وليكن $SM \perp AE$،

الشكل رقم (٢ ـ ٢١)

$M \in \mathscr{P}$؛ وليكن $MN \perp AQ$، $N \in AQ$. بما أن $M \in \mathscr{P}$، لدينا:

$$AB . AS = SM^2$$

وبالتالي

$$AS^2 = SM^2$$

ويكون لدينا

$$NM = AS = SM = AN .$$

والخط MN يقطع $\mathscr{H}$ في M' ويكون لدينا:

$$M'N^2 = CN.AN$$

فيكون

$$M'N^2 > NM^2$$

ويكون M بالتالي داخل $\mathscr{H}$.

ولنأخذ P على AE بحيث يكون:

$$AP > 4AB \qquad (١)$$

وَ

$$AP.AB > AC^2 \qquad (٢)$$

وليكن $PG \perp AE$، $G \in \mathscr{P}$، وَ $QG \perp AC$، $Q \in AC$.

عندئذٍ يكون:

$$AB.AP = GP^2 \quad (\text{معادلة } \mathscr{P})$$

وبالتالي

$$\frac{AP}{GP} = \frac{GP}{AB},$$

فيكون

$$\frac{AP^2}{GP^2} = \frac{GQ^2}{GP^2} = \frac{AP}{AB} > 4 \ ;$$

ونحصل على

$$GQ^2 > 4GP^2$$

أي على

$$GQ > 2GP$$

فنحصل أخيراً على

$$GQ > 2AQ \ .$$

لكن، استناداً إلى (٢)، لدينا:

$$GP^2 = AP.AB > AC^2$$

فيكون $AQ > AC$ ويكون $2AQ > QC$ وبالتالي:

$$GQ > 2AQ > QC$$

وَ

$$GQ_2 > QC^2 > AQ.QC$$

لتكن G' نقطة تقاطع GQ و $\mathscr{H}$. لدينا:

$$AQ.QC = G'Q^2 \quad (\text{معادلة } \mathscr{H})$$

وبالتالي

$$GQ^2 > G'Q^2 \qquad \text{وَ} \qquad GQ > G'Q$$

وتكون النقطة G خارج $\mathscr{H}$. وبالتالي فإن $\mathscr{P}$ و $\mathscr{H}$ يلتقيان حتماً في نقطة، D. وليكن E و U إسقاطي D عمودياً على AE و AQ تتالياً. فبما أن $D \in \mathscr{P} \cap \mathscr{H}$، يكون لدينا:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{DE}{AE} = \frac{AE}{CU}$$

وبالتالي

$$\frac{AB}{AU} = \frac{AU}{DU} = \frac{DU}{CU}$$

فيكون

$$AB^2 \,.\, CU = AU^3 \,.$$

لكن

$$AB^2 \,.\, CU = AB^2 \,.\, AC + AB^2 \,.\, AU = c + b \,.\, AU$$

ويحقق AU بالتالي العلاقة:

$$AU^3 = bAU + c$$

تعليق

الدراسة الكاملة لهذه المعادلة حيث $b > 0$ و $c > 0$، تظهر أن لها جذراً موجباً في مطلق الأحوال. في بعض الحالات يمكن أن يكون لها جذران سالبان أو جذر سالب مزدوج. ولا يعتبر الطوسي سوى الجذر الموجب الذي من أجل تحديده (وكما فعل الخيّام) يأخذ نصف قطع مكافىء وفرعاً من قطع زائد متساوي الأضلاع له رأس القطع المكافئ نفسه ويبرهن التقاؤهما في نقطة ثانية تقابل الجذر الموجب. وإذا أخذنا القطع المكافئ والقطع الزائد بأكملهما، وجدنا، تبعاً لبعض قيم b و c نقاط الالتقاء التي تقابل الجذور السالبة.

في ما يخص المنحنيين، الطريقة هي نفسها التي اتبعت في المعادلة السابقة. فإذا

أدخلنا الحل المبتذل $x = 0$، تكتب المعادلة ١٤ كالآتي:

$$\frac{x^4}{b} = x^2 + \frac{c}{b}x \;;$$

نضع عندئذٍ

$$y^2 = x^2 + \frac{c}{b}x$$ (معادلة القطع الزائد $\mathscr{H}$)،

وَ

$$y^2 = \frac{x^4}{b}$$ أو $$y = \frac{1}{\sqrt{b}}x^2$$ (معادلة القطع المكافئ $\mathscr{P}$)

ونهمل القطع المكافئ $\mathscr{P}'$ ذا المعادلة $y = -\sqrt{b}\,x^2$، ذلك لأن $\mathscr{P}$ و $\mathscr{P}'$ متناظران بالنسبة إلى محور $\mathscr{H}$، فنقاط $\mathscr{H} \cap \mathscr{P}$ و $\mathscr{H} \cap \mathscr{P}'$ لها الإحداثيات السينية نفسها.

بالنسبة إلى التقاطع $\mathscr{H} \cap \mathscr{P}$، لدينا:

$$\frac{\sqrt{b}}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{x + \frac{c}{b}}$$

فيكون

$$\frac{b}{x^2} = \frac{x}{x + \frac{c}{b}}$$

وأخيراً يكون:

$$x^3 = bx + c\,.$$

ولكي يبرهن وجود نقطة مشتركة غير النقطة $A(0, 0)$، يعتمد الطوسي الطريقة التالية:

يأخذ النقطة $M(\sqrt{b}, \sqrt{b})$، فيكون $M \in \mathscr{P}$. ويأخذ $M'(\sqrt{b}, y) \in \mathscr{H}$، فيكون:

$$y^2 = \sqrt{b}\left(\sqrt{b} + \frac{c}{b}\right) > b$$

وتكون النقطة M داخل $\mathscr{H}$.

لتكن $G = G(x_0, y_0)$ نقطة من $\mathscr{P}$، $G \neq A$، بحيث يكون

(١) $$y_0 > 4\sqrt{b}$$

وَ

(٢) $$\sqrt{b}\,y_0 > \frac{c^2}{b^2}$$

لدينا

(٣) $$\sqrt{b}\,y_0 = x_0^2$$

إذن

$$\frac{y_0}{x_0}=\frac{x_0}{\sqrt{b}}$$

فيكون

$$\frac{y_0^2}{x_0^2}=\frac{y_0}{\sqrt{b}}$$

وبالتالي، استناداً لِـ (١):

$y_0^2 > 4x_0^0$، أي $y_0 > 2x_0$.

ومن جهة أخرى، استناداً إلى (٢) و (٣)

$x_0^2 > \frac{c^2}{b^2}$ أي $x_0 > \frac{c}{b}$

فيكون

$$y_0 > \frac{c}{b}+x_0$$

وبالتالي

$$y_0^2 > \left(\frac{c}{b}+x_0\right)^2$$

وأخيراً

$$y_0 > x_0\left(\frac{c}{b}+x_0\right) .$$

ولتكن النقطة G'، $G'(x_0, Y_0) \in \mathscr{H}$؛ فيكون:

$$x_0 \cdot \left(\frac{c}{b}+x_0\right) = Y_0^2.$$

ويكون بالتالي

$$y_0 > Y_0.$$

فالنقطة $G=(x_0, y_0)$ هي إذَنْ خارج $\mathscr{H}$. وبما أن القطع المكافئ منحنٍ متواصل، فالقوس MG يقطع حتماً $\mathscr{H}$.

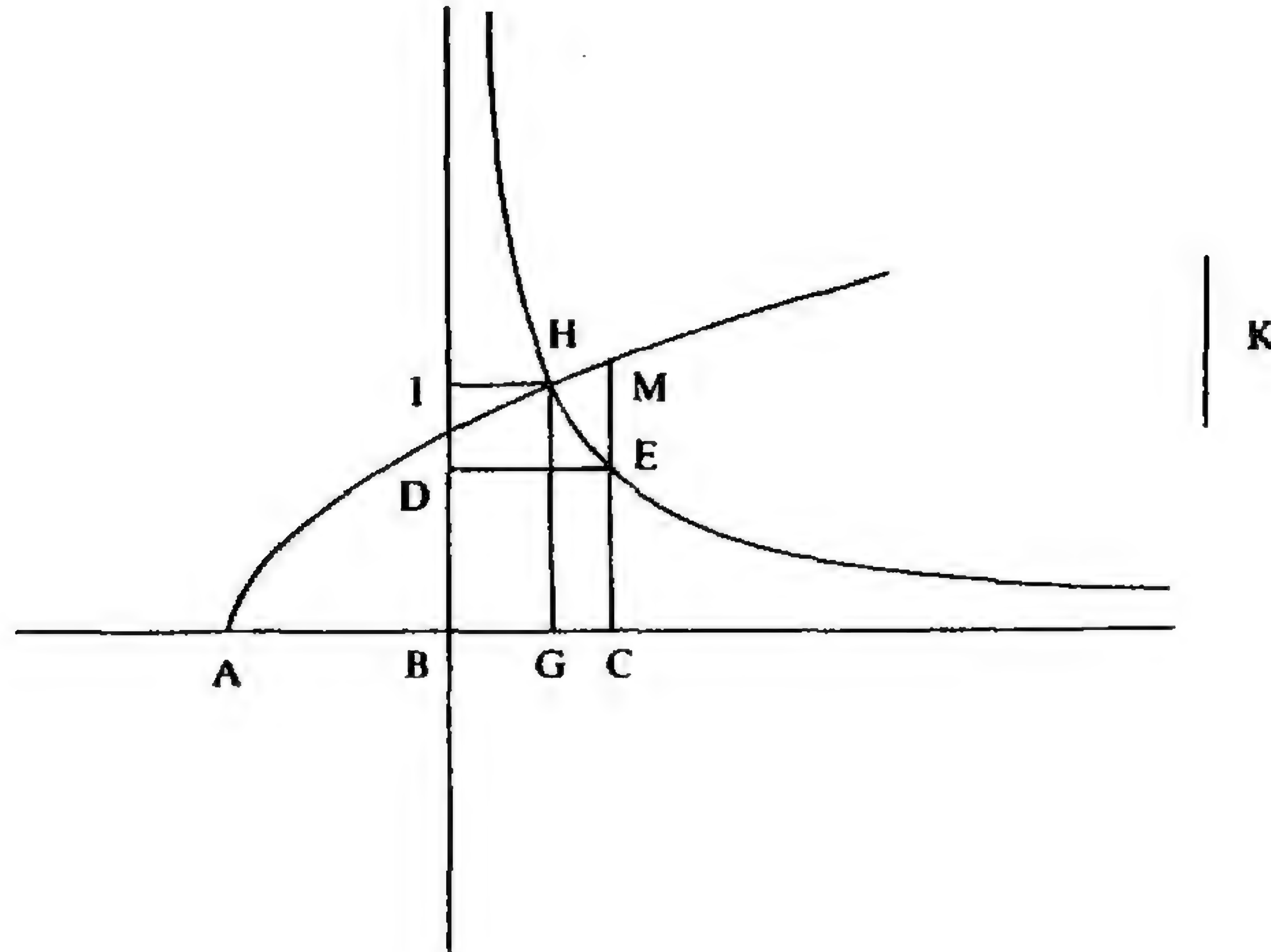
ينهي الطوسي دراسته بحل عددي لمعادلتين من هذا النوع (انظر الفصل الأول، الفقرة سادساً: «إعادة تركيب الجداول»، الجدولين رقمي (١ ـ ٦) و(١ ـ ٧)).

ملاحظة: في هذه المسألة، كما في غالبية المسائل التي ستليها، لا يُميِّز الطوسي بين أبعاد قياساته. وبدورنا، لن نقوم بتمييز من هذا النوع.

المعادلة ١٥: $x^3+ax^2=c$

ليكن K ضلع مكعبٍ مساوياً لِـ c، $K^3=c$، وليكن $AB=a$. نأخذ نقطة C على امتداد AB بحيث يكون $BC=K$ ونأخذ المربّع $BCED$ ذا الضلع BC. نأخذ القطع

الزائد $\mathscr{H}$ ذا الرأس E والذي يكون خطّاه المقاربان BC وَ BD ونأخذ القطع المكافئ $\mathscr{P}$ ذا الرأس A والضلع القائم BC (الشكل رقم (٢ ـ ٢٢)).



الشكل رقم (٢ ـ ٢٢)

إن الخطّ EC يقطع $\mathscr{P}$ في النقطة M بحيث يكون:

$$AC \, . \, BC = MC^2 \, ;$$

وبما أن $AC > BC$، يكون

$$MC^2 > BC^2,$$

وتكون M فوق النقطة E الموجودة على $\mathscr{H}$. تكون M إذن داخل $\mathscr{H}$. لذلك فإن $\mathscr{P}$ و$\mathscr{H}$ يلتقيان بالضرورة. فلنفترض أن H هي نقطة التقائهما ولنأخذ $IH \perp BD$ و$GH \perp BC$، فيكون

$$BC.AG = HG^2 \quad \text{(معادلة } \mathscr{P}\text{)}$$

وبالتالي

$$\frac{AG}{HG} = \frac{HG}{BC} \, ;$$

ولدينا أيضاً

$$BI.IH = BD^2 = BC^2 \quad \text{(معادلة } \mathscr{H}\text{)}$$

فيكون

$$\frac{BI}{BC} = \frac{BC}{IH}$$

أي

$$\frac{GH}{BC}=\frac{BC}{BG}$$

ومنها

$$\frac{AG}{HG}=\frac{HG}{BC}=\frac{BC}{BG} ,$$

وبالتالي

$$BG^2 . AG = BC^3$$

ومنها

$$BC^3 = BG^2 . BG + BG^2 . AB$$

فيكون

$$c = BG^3 + aBG^2 ,$$

ويكون BG هو الحل المطلوب.

تعليـق

إن دراسة كاملة للمعادلة ١٥، حيث a و c موجبان، تظهر أن لها دائماً جذراً موجباً. وتبعاً لقيم a و c يمكن أن يكون لهذه المعادلة جذران سالبان أو جذر مزدوج سالب. والطوسي لا يأخذ في الاعتبار سوى الجذر الموجب. ولكي يحدد هذا الجذر يستخدم، كما فعل الخيّام، نصف قطع مكافىء مع فرع من قطع زائد متساوي الأضلاع ويبرهن أن لهذين المنحنيَيْن نقطة مشتركة تقابل الجذر الموجب. ومثلما لاحظنا بالنسبة إلى المعادلة السابقة، فإذا أخذنا كامل القطعين، نجد، تبعاً لبعض قيم a و c، نقاط التقاء أخرى، تقابل الجذور السالبة للمعادلة.

فيما يخص اختيار المنحنيين، إذا لاحظنا أن c موجب قطعاً، فإن الصفر لا يمكن أن يكون جذراً للمعادلة:

$$x^3 + ax^2 = c$$

لذلك يمكن أن تُكتب هذه المعادلة على الشكل:

$$x + a = \frac{c}{x^2} ;$$

فإذا وضعنا $k^3 = c$، يكون لدينا

$$k(x+a) = \frac{k^4}{x^2} .$$

عندئذٍ نأخذ:

$y^2 = k(x+a)$ أي $y^2 = \sqrt[3]{c}\,(x+a)$، (القِطع $\mathscr{P}$)؛

$y^2 = \frac{k^4}{x^2}$، أي $y = \frac{k^2}{x}$، أي $x.y = \sqrt[3]{c^2}$ (القِطع $\mathscr{H}$).

نلاحظ هنا أن لا مجال لأن يؤخذ في الاعتبار القطع الزائد $y = -\frac{k^2}{x}$ الذي من شأنه أن يؤدي إلى الجذور نفسها بسبب التناظر.

ولأجل أن يثبت وجود نقطة التقاء، يستعين الطوسي بالنقطة $M(\sqrt[3]{c},\ Y) \in \mathscr{P}$، التي تحقق:

$$\sqrt[3]{c}\,(\sqrt[3]{c} + a) = Y^2$$

فيكون

$$Y^2 > \sqrt[3]{c}$$

ويكون M بالتالي داخل $\mathscr{H}$. لذلك يلتقي القِطعان $\mathscr{P}$ و $\mathscr{H}$ بالضرورة. ذلك لأن رأس $\mathscr{P}$ أي النقطة A هي خارج $\mathscr{H}$؛ وبما أن $\mathscr{P}$ منحنٍ متواصل يمر بنقطتين A و M، إحداهما خارج $\mathscr{H}$ والأخرى داخلها، لذلك فإنه سيلتقي بالضرورة $\mathscr{H}$ في إحدى نقاطه $H = H(x_0,\ y_0)$ وهي نقطة تُحقّق ما يلي:

$$\frac{x_0 + a}{y_0} = \frac{y_0}{\sqrt[3]{c}} \quad (H \in \mathscr{P})$$

وَ

$$x_0 \cdot y_0 = c^{\frac{2}{3}} \quad (H \in \mathscr{C})$$

فيكون

$$\frac{\sqrt[3]{c}}{x_0} = \frac{y_0}{\sqrt[3]{c}} = \frac{x_0 + a}{y_0}$$

وبالتالي:

$$c = x_0^2(x_0 + a) = x_0^3 + ax_0^2$$

ويكون x_0 حلاً للمعادلة (١٥).

ملاحظة ١: يمكن حل هذه المعادلة أيضاً بواسطة تقاطع القطع المكافئ ذي المعادلة

$$y = x^2 + ax,$$

والقطع الزائد

$$y = \frac{c}{x}\ .$$

ملاحظة ٢: يبرهن الخيّام أن x_0 لا يمكن أن يكون أكبر من $\sqrt[3]{c}$ كما لا يمكن أن

يساوي $\sqrt[3]{c}$. إلا أن الطوسي يبين أن النقطة G هي بين A و C، وبالتالي فإن $x_0 < \sqrt[3]{c}$.

هنا أيضاً ينهي الطوسي دراسته بحل عددي لمعادلتين من هذا النوع (انظر الفصل الأول، الفقرة سادساً، الجدولين رقمي (١ ـ ٨) و (١ ـ ٩)).

المعادلة ١٦: $c + ax^2 = x^3$

نأخذ $AB = a$، $(SO) = p$ (الوحدة السطحية)، $OP \perp (SO)$، $OP = c.\ell$، فيكون $(SP) = (SO) \,.\, OP = p.(c.\ell)$. ونأخذ جزءاً مقطوعاً مستقيماً K يحقق $\frac{AB}{K} = \frac{K}{OP}$.

نأخذ $BC \perp AB$، بحيث يكون:

$$\frac{\ell}{BC} = \frac{AB}{K}$$

فيكون

$$\frac{p}{BC^2} = \frac{AB^2}{K^2} = \frac{AB}{OP}\,,$$

وبالتالي

$$BC^2 \,.\, AB = c \qquad (١)$$

نأخذ القطع المكافئ $\mathscr{P}$ ذا الرأس B والضلع القائم AB والمحور AB. ونأخذ جزءاً مستقيماً مقطوعاً L يحقق:

$$\frac{AB}{L} = \frac{L}{BC}\,.$$

الحالة الأولى: (الشكل رقم (٢ ـ ٢٣أ)): $AB > BC$. في هذه الحالة يكون $AB > L > BC$.

لتكن D نقطة على AB بحيث يكون $AD = L$ وليكن (AE) المربع ذا الضلع AD. ولتكن I نقطة على امتداد CB بحيث يكون $BI = BC$، فيكون $BI < AD$.

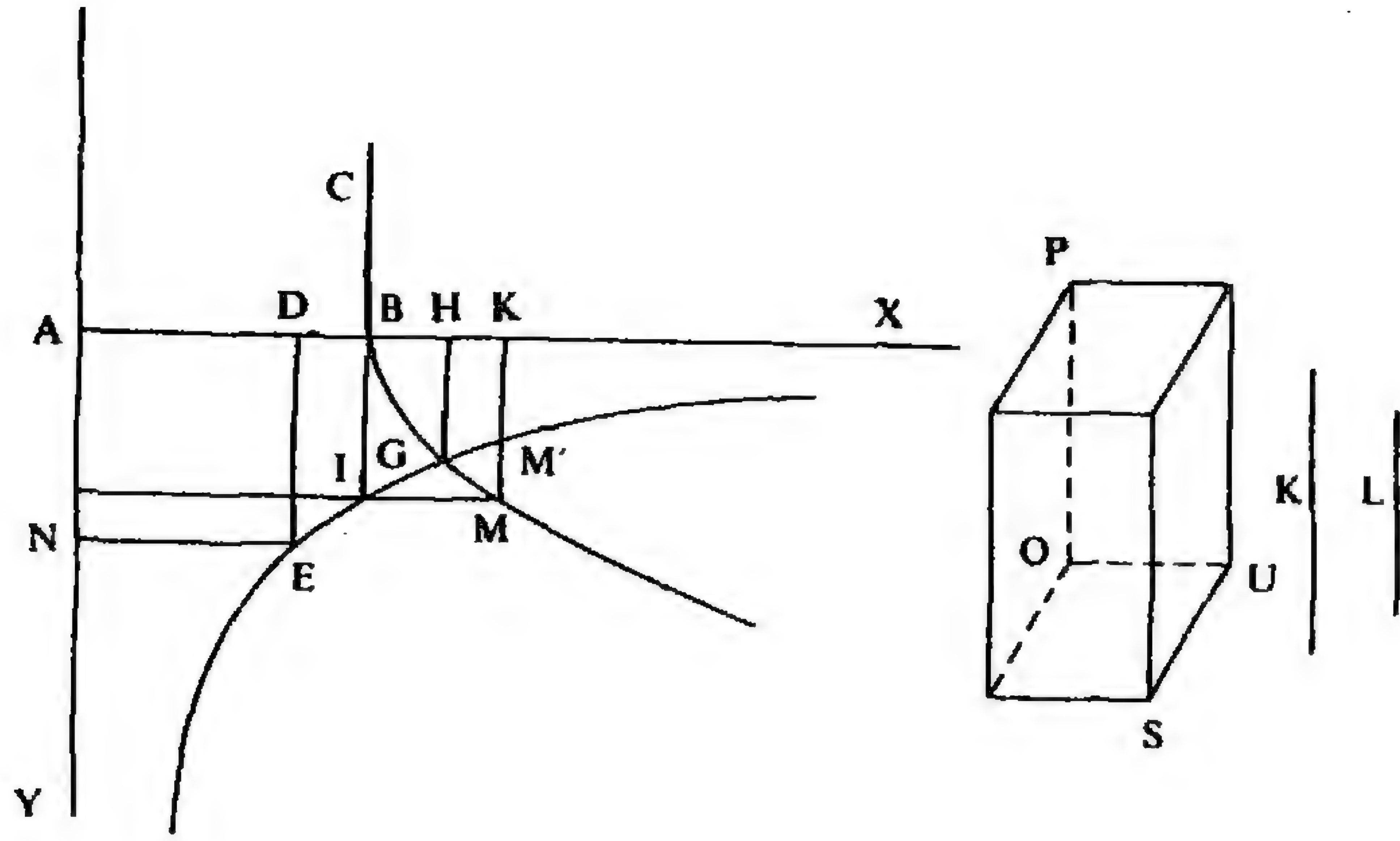
ليكن $\mathscr{H}$ القطع الزائد الذي يمر بـ I والذي يكون AB وَ AN خطّيه المقاربين. رأس $\mathscr{H}$ هو إذن E(١٥). فتوجد بالضرورة نقطة $M \in \mathscr{P}$ يكون خط ترتيبها MK مساوياً لِـ BC. والمستقيم MK يقطع $\mathscr{H}$ في النقطة M' فيكون:

$$KM' < BC \text{ (١٦)}$$

---

(١٥) $IB.AB = BC.AB = K\ell = L^2 = ED.EN$ (المترجم).

(١٦) لأن: $AB.BC = KA.KM'$ (معادلة $\mathscr{H}$) و $AB < KA$ (المترجم).



الشكل رقم (٢ ـ ٢٣أ)

فتكون النقطة M داخل $\mathscr{H}$ وتكون B خارج $\mathscr{H}$ لأنها توجد على خط مقارب؛ لذلك فإن $\mathscr{H}$ و $\mathscr{P}$ يلتقيان، في نقطة نسميها G. ونأخذ $AB \perp HG$، فيكون:

$$AH \,.\, HG = AD^2 \quad (\mathscr{H} \text{ معادلة})$$

لكن لدينا

$$AB \,.\, BC = AD^2$$

فيكون

$$AH \,.\, HG = AB \,.\, BC,$$

وبالتالي

$$\frac{AH}{BC} = \frac{AB}{HG},$$

فيكون

$$\frac{AH^2}{BC^2} = \frac{AB^2}{HG^2}.$$

لكن، بما أن $G \in \mathscr{P}$ فيكون

$$AB \,.\, BH = HG^2,$$

يحصل

$$\frac{AB}{HG} = \frac{HG}{BH},$$

فيكون

$$\frac{AB^2}{HG^2} = \frac{AB}{BH},$$

وهذا يعطي

$$\frac{AH^2}{BC^2} = \frac{AB}{BH}$$

وبالتالي

$$AH^2 \,.\, BH = BC^2 \,.\, AB = c;$$

لكن

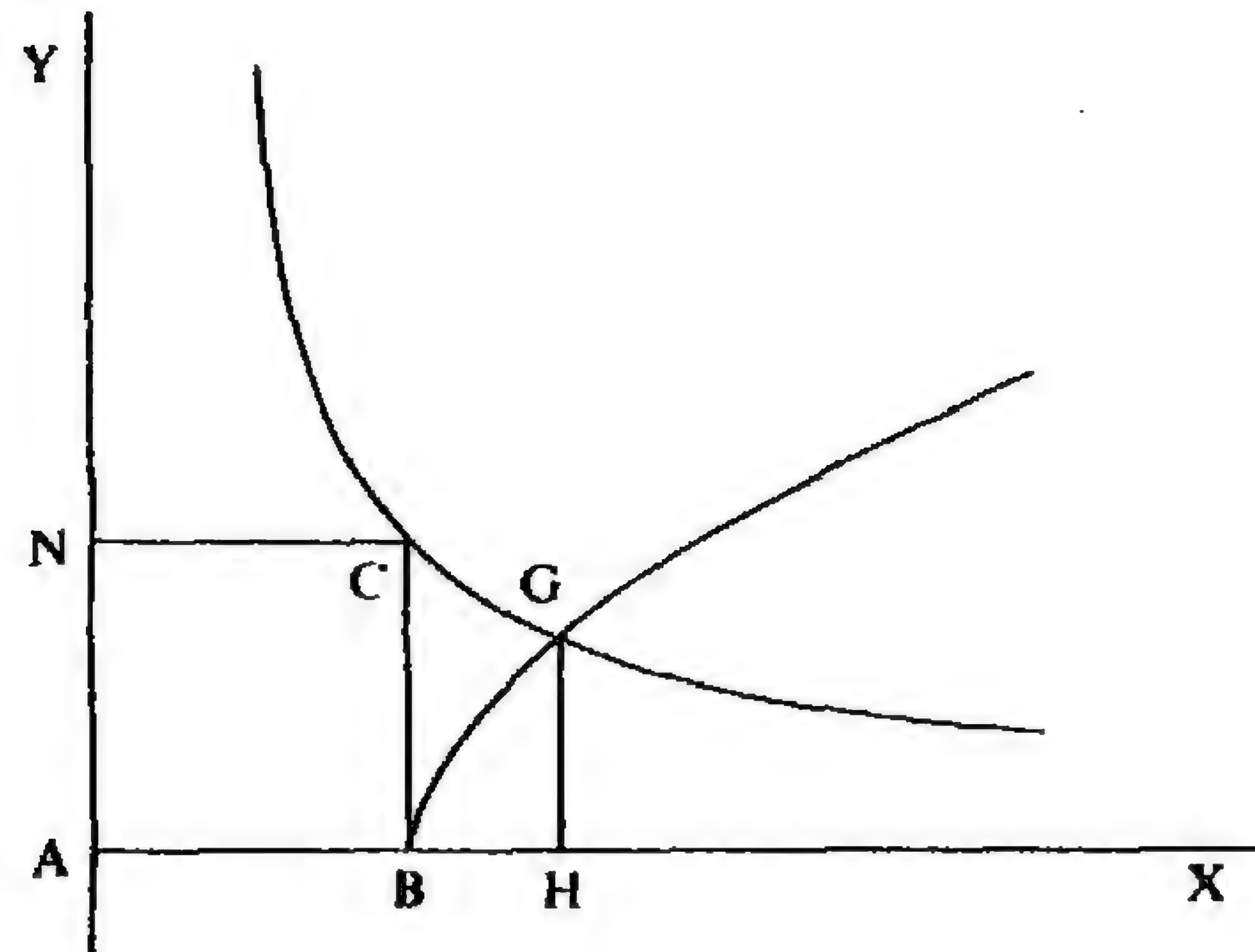
$$AH^2 \,.\, AB + AH^2 \,.\, BH = AH^3 \;;$$

لذلك يكون

$$AH^3 = c + a \,.\, AH^2$$

ويكون AH هو الحل المطلوب.

الحالة الثانية: (الشكل رقم (٢ ـ ٢٣ب)): $AB = BC$؛ عندئذٍ يكون $L = AB$.



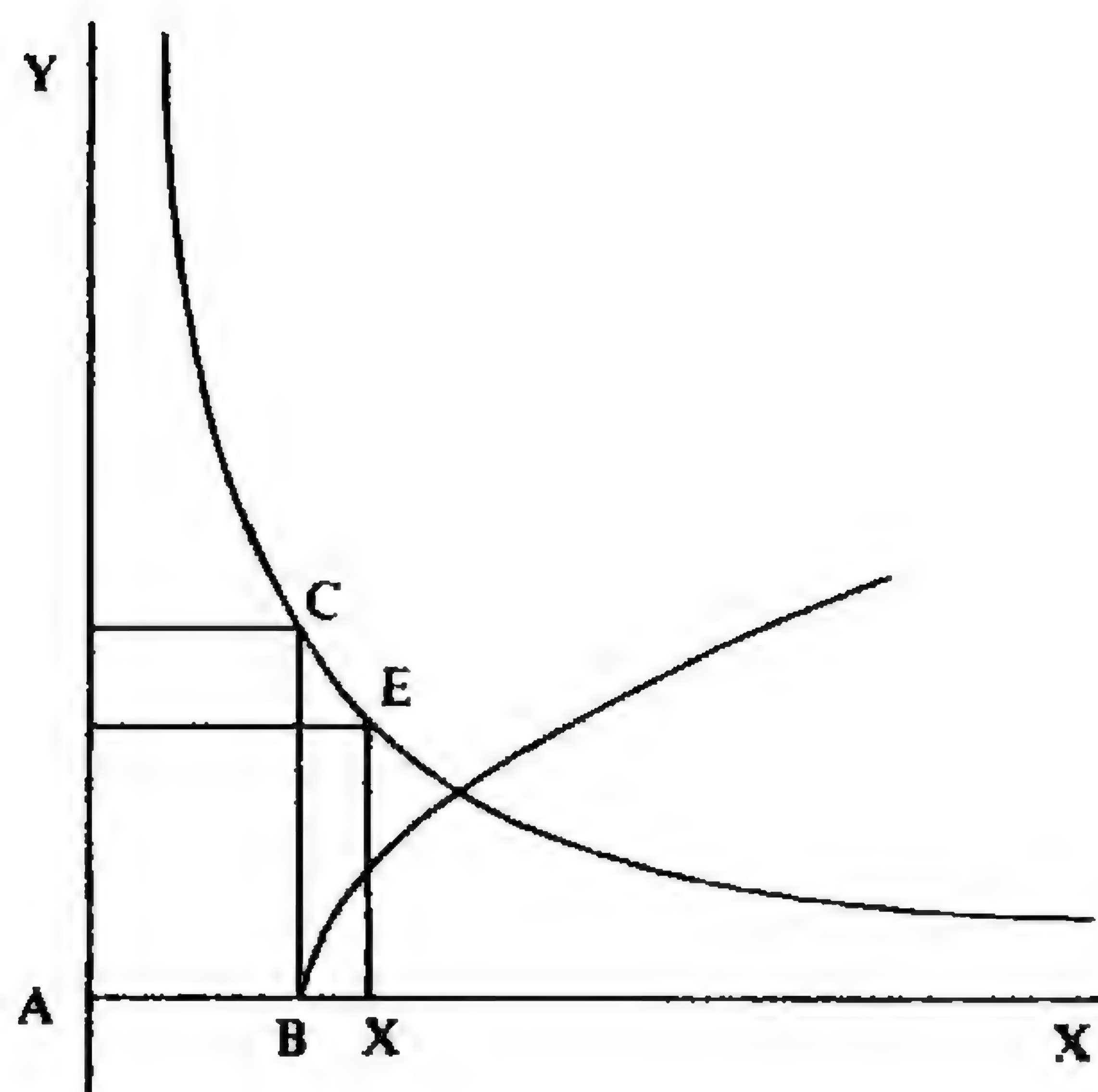
الشكل رقم (٢ ـ ٢٣ب)

نبني المربع ذا الضلع AB؛ نأخذ القطع المكافئ $\mathscr{P}$ نفسه ونأخذ $G \in \mathscr{P}$؛ وليكن $\mathscr{H}$ القطع الزائد ذا الرأس C والخطين المقاربين AB و AN. نفرض أن $\mathscr{H}$ يمر بالنقطة G(١٧)، وأن H هو إسقاط G عمودياً على AB. نبرهن، كما تقدم أن AH هو الحل المطلوب.

---

(١٧) إن هذا الأمر لا يتحقق بالنسبة إلى أي نقطة G من Q، لكن يوجد نقطة مشتركة، G، بين القطعين، والبرهان على ذلك يتم كما في الحالة الأولى. ويبدو أن الطوسي يضمر هنا ما يلي: «نفرض أن $\mathscr{H}$ يمر في النقطة G».

الحالة الثالثة: (الشكل رقم (٢ ـ ٢٣ج)): $AB < BC$، فيكون $AB < L$.



الشكل رقم (٢ ـ ٢٣ج)

نأخذ $AX = L$ ونبني المربع ذا الضلع AX وننهي البرهان كما في السابق.

تعليـق

لأجل كل زوج (a, c) من الأعداد الموجبة قطعاً، يكون للمعادلة:

$$x^3 = ax^2 + c$$

جذر حقيقي واحد، وهذا الجذر هو موجب قطعاً. ولكي يحدد هذا الجذر، يستخدم الطوسي، كما فعل الخيّام، قطعاً مكافئاً وقطعاً زائداً ويبرهن أن لهما نقطة مشتركة تقابل هذا الجذر.

في ما يتعلق باختيار المنحنيين، نستطيع أن نكتب على التوالي:

$$x - a = \frac{c}{x^2} \qquad \text{وَ} \qquad a(x-a) = \frac{ac}{x^2}$$

وعند ذلك نأخذ:

$y^2 = a(x-a)$ ؛ (القطع المكافئ $\mathscr{P}$)

$y^2 = \frac{ac}{x^2}$ أي $y = \frac{\sqrt{ac}}{x}$؛ (القطع الزائد $\mathscr{H}$)

وكما رأينا في السابق، لا مجال لأخذ القطع الزائد ذي المعادلة $y = \frac{-\sqrt{ac}}{x}$.

ولكي يبين وجود نقطة تقاطع، يأخذ الطوسي النقطة $M\left(x_0, \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \in \mathscr{P}$ والنقطة $M'(x_0, y) \in \mathscr{H}$. فبما أن النقطة $I\left(a, \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \in \mathscr{H}$، يكون لدينا:

$$x_0 \, . \, y = a \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

لكن، بما أن $M \in \mathscr{P}$، فإن $x_0 > a$ وبالتالي:

$$y < \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}},$$

وتكون النقطة M بالتالي داخل $\mathscr{H}$. لكن B، وهو رأس القطع المكافئ يوجد خارج $\mathscr{H}$ لأنه على خط مقارب لِـ $\mathscr{H}$. وبما أن $\mathscr{P}$ منحنٍ متواصل، فالقوس BM من $\mathscr{P}$ يقطع $\mathscr{H}$ بالضرورة في نقطة $G = G(X, Y)$. ويكون X حلاً للمعادلة ١٦؛ فلدينا ما يلي:

$$X.Y = (ac)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(معادلة } \mathscr{H}\text{)}$$

فيكون

$$\frac{X}{\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{Y} \qquad \text{ومنها} \qquad \frac{X^2}{\left(\frac{c}{a}\right)} = \frac{a^2}{Y^2}.$$

ولدينا كذلك:

$$a(X - a) = Y^2 \qquad \text{(معادلة } \mathscr{P}\text{)،}$$

وبالتالي:

$$\frac{a}{Y} = \frac{Y}{X - a} \qquad \text{وبالتالي} \qquad \frac{a^2}{Y^2} = \frac{a}{X - a}$$

فيكون

$$X^2(X - a) = c,$$

أي

$$X^3 = aX^2 + c.$$

ملاحظة: يأخذ الطوسي حالات ثلاثاً: $(ac)^{\frac{1}{2}} < a^2$، $(ac)^{\frac{1}{2}} = a^2$ وَ $(ac)^{\frac{1}{2}} > a^2$، وهي الحالات التي تقابل الوضعيات الممكنة لرأس $\mathscr{H}$ بالنسبة إلى مماس $\mathscr{P}$ في رأسه. في الحالات الثلاث يمكن البرهان بالطريقة نفسها، ولهذا السبب لا يقدم الطوسي البرهان في الحالتين الأخيرتين. ويبدو أنه لا يعطي أهمية بالغة للتفريق بين هذه الحالات لأن البرهان مستقل عن الحالة المطروحة.

وكما في السابق يعالج الطوسي حل مسألتين عدديتين من هذا النوع (انظر الفصل

الأول، الفقرة سادساً، الجدولين رقمي (١ ـ ١٠) و (١ ـ ١١)).

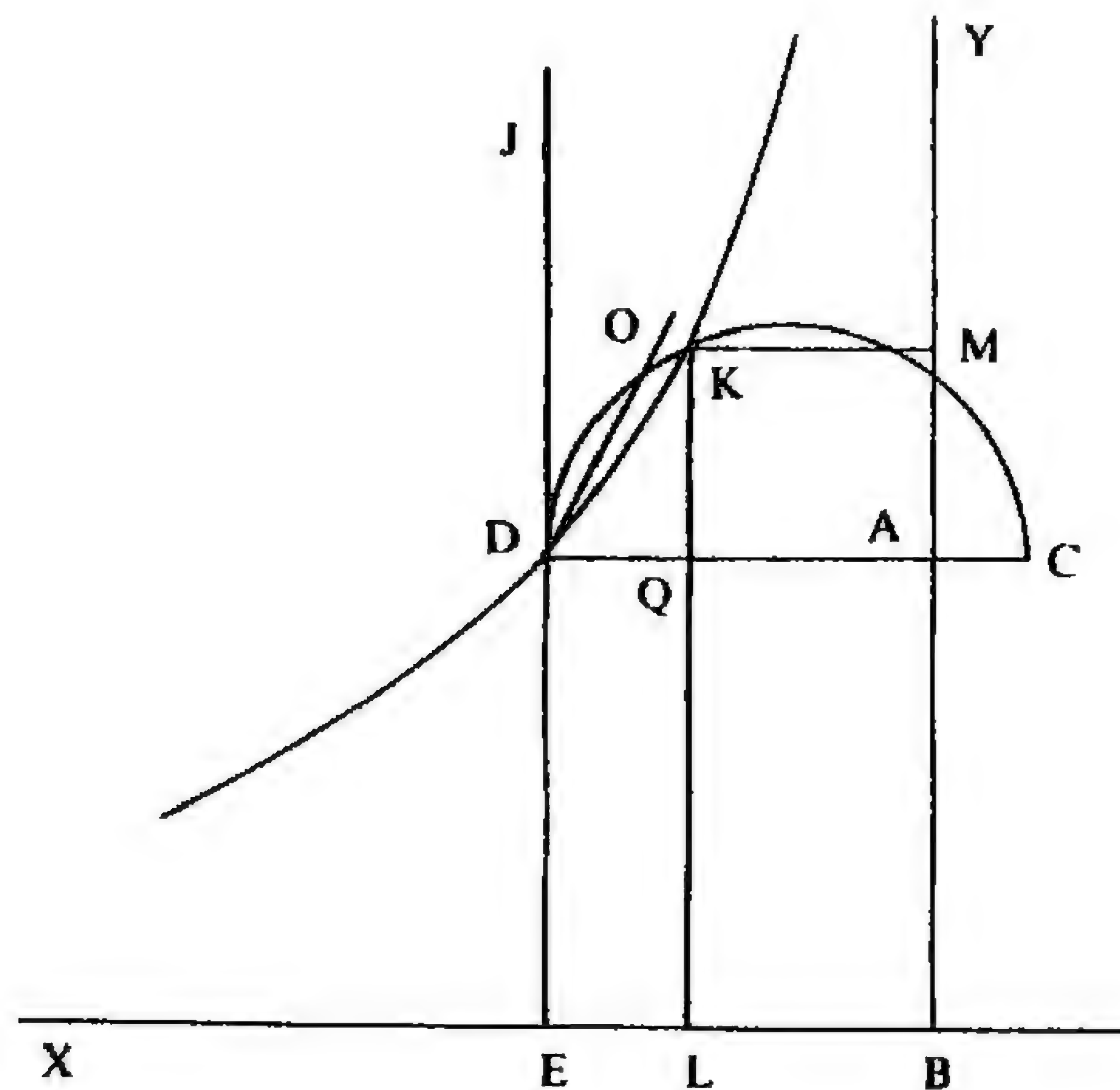
المعادلة ١٧: $x^3 + ax^2 + bx = c$

نأخذ $AB = \sqrt{b}$؛ $AC \perp AB$؛ $AC = a$؛ ونأخذ AD بحيث يكون:

$$AB^2 \,.\, AD = c,$$

و $CD \perp AB$. ونأخذ نصف الدائرة $\mathscr{C}$ ذات القطر CD. وليكن $BE \perp AB$ و$DE \perp AC$ بحيث يكون $ABED$ مستطيلاً.

الحالة الأولى: $ABED$ ليس مربعاً. فتكون النقطة D أقرب إلى أحد الخطين AB وَBE، فنرسم قطعاً زائداً $\mathscr{H}$، يمر بـ D ويكون خطّاه المقاربان AB و BE (الشكل رقم (٢ ـ ٢٤)).



الشكل رقم (٢ ـ ٢٤)

الحالة الثانية: $ABED$ مربع، فنرسم قِطعاً زائداً رأسه D ومقارباه AB و BE.

في كلتا الحالتين نُطيل ED حتى EDJ التي هي مماسّ $\mathscr{C}$ في النقطة D. ليكن DO وتراً من الدائرة موجوداً بين $\mathscr{H}$ وDJ. بما أن القوس DO موجود بين الوتر DO والخط DJ، فإن O تقع داخل $\mathscr{H}$ بينما تقع C خارج $\mathscr{H}$؛ لذلك فإذا أطلنا $\mathscr{H}$ إلى ما لانهاية فإنه سيقطع $\mathscr{C}$ في نقطة نسميها K.

إذا كان L و M إسقاطاً K عمودياً على BE و AB على التوالي، يكون:

$$KM.MB = AB.AD \quad (\text{معادلة } \mathscr{H})$$

فيكون

$$KM\ .\ KQ = QL\ .\ QD,$$

وبالتالي

(١) $$\frac{KQ}{QD}=\frac{QL}{AQ}=\frac{AB}{AQ} \quad \text{و} \quad \frac{KQ^2}{QD^2}=\frac{AB^2}{AQ^2}$$

لكن $QK \perp CD$ و $K \in \mathscr{C}$ وبالتالي يكون:

$$KQ^2 = CQ.QD \qquad (\text{قدرة } Q)$$

ومنها

$$\frac{KQ^2}{QD^2}=\frac{CQ}{QD},$$

ومنها ومن (١) نستنتج

$$\frac{AB^2}{AQ^2}=\frac{CQ}{QD},$$

وبالتالي

$$AB^2.QD = AQ^2.CQ = AQ^2.CA + AQ^3 = a.AQ^2 + AQ^3,$$

فيكون

$$AB^2.QD + AB^2.AQ = AQ^3 + a.AQ^2 + b.AQ,$$

أي

$$c = AB^2.AD = AQ^3 + a.AQ^2 + b.AQ;$$

فيكون AQ حلاً للمعادلة ١٧.

تعليق

كل ثلاثية $(a,\ b,\ c)$ مؤلفة من أعداد حقيقية موجبة (فعلاً)(١٨)، يقابلها معادلة

$$x^3 + ax^2 + bx = c$$

لها جذر موجب يدرسه الطوسي. يمكن في بعض الحالات أن يكون لهذه المعادلة جذران سالبان أو جذر سالب مزدوج. لكي يحدد الطوسي الجذر يستخدم، كما فعل الخيّام، نصف دائرة وفرعاً من قطع زائد متساوي الأضلاع، ثم يبرهن أن لهما نقطة مشتركة تقابل الجذر المطلوب. عند استخدام كامل الدائرة مع فرعي القطع الزائد، يمكن حصول تقاطعٍ أو تقاطعين بإحداثيات سينية سالبة تعطي الجذور الأخرى.

ولكي نفهم اختيار هذين المنحنيين، نلاحظ أن الصفر ليس جذراً للمعادلة ١٧ ،

---

(١٨) غير معدومة. (المترجم).

لذا يمكن أن نكتبها على الشكل التالي:

$$x + a = \frac{b}{x^2}\left(\frac{c}{b} - x\right).$$

نضرب من ثم بـ $\left(\frac{c}{b} - x\right)$ الذي يدخل حلاً إضافياً هو $x = \frac{c}{b}$، فيظهر مربع في الطرف الأيمن للمعادلة:

$$\left(\frac{c}{b} - x\right)(x + a) = \frac{b}{x^2}\left(\frac{c}{b} - x\right)^2$$

أي

$$\left(\frac{c}{b} - x\right)(x + a) = \left(\frac{c.b^{-\frac{1}{2}}}{x} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

وهنا نأخذ:

$$(y - b^{\frac{1}{2}})^2 = \left(\frac{c}{b} - x\right)(x + a) \quad (\text{معادلة } \mathscr{C})$$

وهي معادلة الدائرة ذات القطر CD، حيث:

$$C(-a,\ \sqrt{b}) \quad ، \quad D\left(\frac{c}{b}\ ,\ \sqrt{b}\right).$$

ونأخذ كذلك المعادلة:

$$(y - b^{\frac{1}{2}})^2 = \left(\frac{c.b^{-\frac{1}{2}}}{x} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

التي تعطي قطعين زائدين $\mathscr{H}$ و $\mathscr{H}'$:

$$y = \frac{c\ b^{-\frac{1}{2}}}{x} \ (\text{معادلة } \mathscr{H})،$$

$$y = 2b^{-\frac{1}{2}} - \frac{c.b^{-\frac{1}{2}}}{x} \ (\text{معادلة } \mathscr{H}')؛$$

و $\mathscr{H}'$ هو القطع الزائد المتناظر مع $\mathscr{H}$ بالنسبة إلى CD، لذلك، فإن التقاطعين $\mathscr{H} \cap \mathscr{C}$ و $\mathscr{H}' \cap \mathscr{C}$ متناظران بالنسبة إلى CD ولهما بالتالي الإحداثيات السينية نفسها.

ولكي يبرهن الطوسي وجود نقطة غير D مشتركة بين $\mathscr{C}$ و $\mathscr{H}$ يشير إلى أن مماس $\mathscr{C}$ في D يختلف عن مماس $\mathscr{H}$ في النقطة نفسها. وأخذاً في الاعتبار تحدّب المنحنيين $\mathscr{C}$ وَ $\mathscr{H}$ يبين وجود نقطة O، $O \in \mathscr{C}$، $O \neq D$، تقع داخل $\mathscr{H}$؛ فلو لم يكن الحال كذلك لَوقَع $\mathscr{H}$ من جهة و$\mathscr{C}$ من الجهة الأخرى لِـ DJ وهي مماس $\mathscr{C}$ في D؛ وفي هذه الحالة يكون DJ مماساً مشتركاً وهذا محال. ومن ناحية أخرى، لدينا $C \in \mathscr{C}$ وَC تقع خارج $\mathscr{H}$؛ لذلك، وبما أن $\mathscr{C}$ منحنٍ متواصل، فإن القوس CO يقطع بالضرورة $\mathscr{H}$ في نقطة نسميها $K = K(x_0,\ y_0)$. ويبرهن الطوسي أن x_0 هي حل للمعادلة ١٧.

بما أن $K \in \mathscr{H}$، يكون

$$x_0\ y_0 = c\ .\ b^{-\frac{1}{2}}$$

وبالتالي

$$x_0(y_0 - b^{\frac{1}{2}}) = b^{\frac{1}{2}}\left(\frac{c}{b} - x_0\right),$$

فيكون

$$(١) \qquad \frac{y_0 - b^{\frac{1}{2}}}{\frac{c}{b} - x_0} = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{x_0}.$$

وبما أن $K \in \mathscr{C}$، يكون:

$$(y_0 - b^{\frac{1}{2}})^2 = (x_0 + a)\left(\frac{c}{b} - x_0\right),$$

وبالتالي يكون:

$$\frac{(y_0 - b^{\frac{1}{2}})^2}{\left(\frac{c}{b} - x_0\right)^2} = \frac{x_0 + a}{\frac{c}{b} - x_0},$$

وبالتالي، استناداً إلى (١)، يكون:

$$\frac{b}{x_0^2} = \frac{x_0 + a}{\frac{c}{b} - x_0},$$

أي

$$b\left(\frac{c}{b} - x_0\right) = x_0^2\,(x_0 + a),$$

وبالتالي

$$c = x_0^3 + ax_0^2 + bx_0;$$

ويكون x_0 حلاً للمعادلة ١٧.

ملاحظة: يبدو أن اختيار نصف الدائرة والقطع الزائد اختيار متعمد. فبالإمكان الحصول على حل بتقاطع القطع المكافئ والقطع الزائد التاليين:

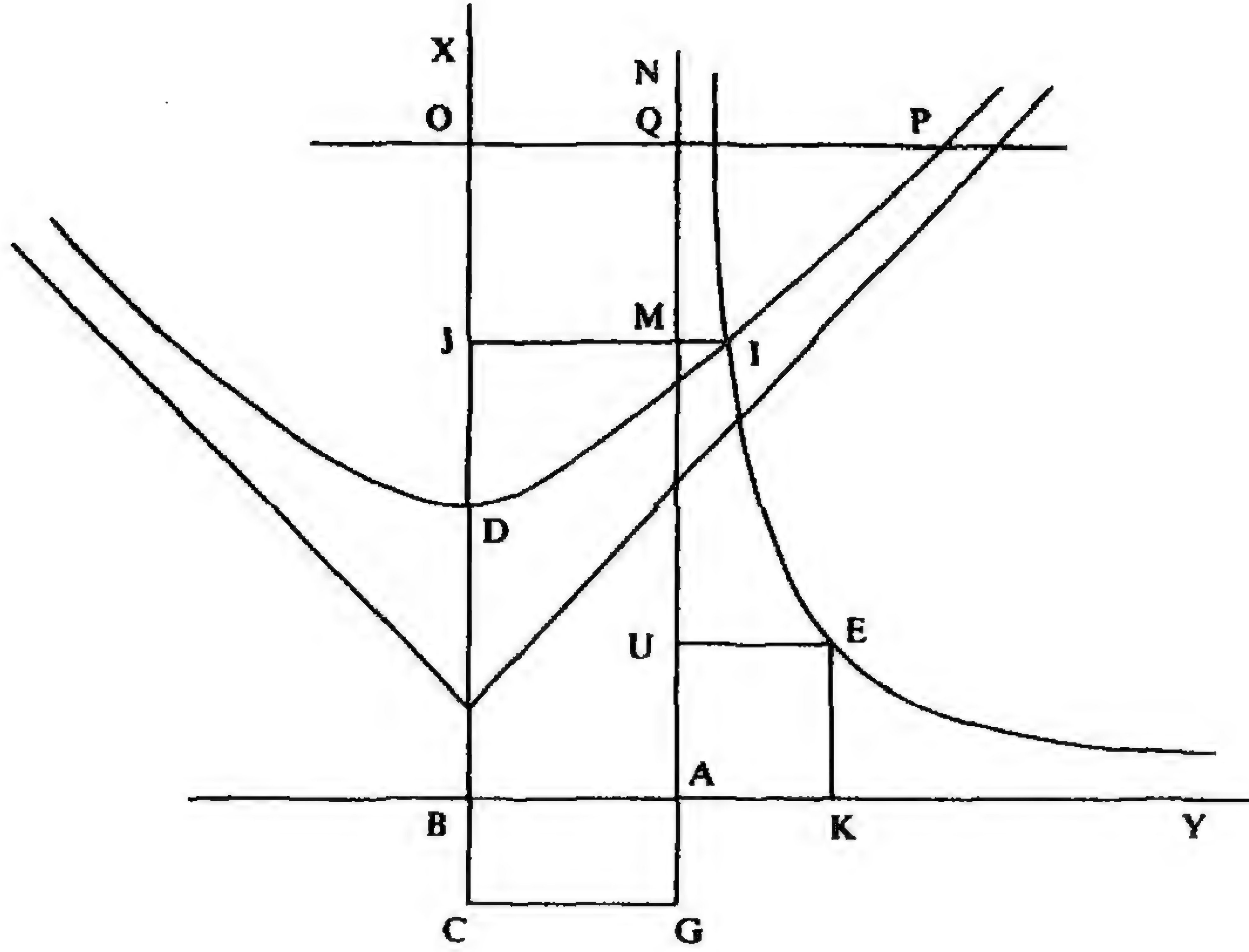
$$y = x^2 + ax + b \quad \text{وَ} \quad x.y = c$$

اللذين يساعدان على الحل بشكل أسرع.

وينهي الطوسي دراسته بحل عددي لثلاث معادلات من هذا النوع (انظر الفصل الأول، الفقرة سادساً، الجداول أرقام (١ ـ ١٢) و (١ ـ ١٣) و (١ ـ ١٤)).

المعادلة ١٨: $c + bx + ax^2 = x^3$

ليكن $AB = \sqrt{b}$، $BD = a$، $BD \perp AB$. ليكن BC على امتداد DB بحيث يكون $BC.AB^2 = c$، فيكون $BC = \frac{c}{b}$. نبني المستطيل $ABCG$ والمربع $AKEU$ بالمساحة نفسها. نأخذ القطع الزائد $\mathscr{H}_1$ الذي يمر بـ E ويكون خطّاه المقاربان AK وَAU والقطع الزائد $\mathscr{H}_2$ ذا الرأس D والقطر المجانب CD (الشكل رقم (٢ ـ ٢٥)).



الشكل رقم (٢ ـ ٢٥)

نأخذ O على DC بحيث $DO = BK$ و $OP \perp OB$، $(P \in \mathscr{H}_2)$ فيكون $OP > BK$، ذلك لأن:

$$OP^2 = OC.OD > OD^2 \quad (\text{معادلة } \mathscr{H}_2).$$

لتكن Q نقطة التقاء OP مع AN وهو امتداد AU؛ فيكون $QP > AK$ لأن $OQ = BA$. لكن AN خط مقارب لِـ $\mathscr{H}_1$ فهو بالتالي يقترب منه بغير نهاية، فالمسافة بين Q و $\mathscr{H}_1$ أصغر من AK الذي هو أصغر من QP. لذلك فإن $\mathscr{H}_1$ تدخل إلى داخل $\mathscr{H}_2$. لكن لِـ $\mathscr{H}_1$ نقط خارج $\mathscr{H}_2$ مثل E ومثل أية نقطة خارج زاوية الخطين المقاربين لِـ $\mathscr{H}_2$. لذلك فإن $\mathscr{H}_1$ وَ $\mathscr{H}_2$ يلتقيان في نقطة نسميها I. فنأخذ $IJ \perp DO$، فيكون $IJ \perp AN$، و JI يقطع AN في نقطة M ويكون:

$$AM.MI = AK^2 = AB.BC \quad (\text{معادلة } \mathscr{H}_1)$$

وبالتالي يكون

$$AM.MI + BJ.JM = AB.BC + BJ.JM$$

ومنها

$$IJ.BJ = AB.CJ$$

فيكون

$$\frac{IJ}{CJ} = \frac{AB}{BJ} \quad \text{وَ} \quad \frac{IJ^2}{CJ^2} = \frac{AB^2}{BJ^2}.$$

لكن

$$CJ.JD = IJ^2 \quad (\text{معادلة } \mathscr{H}_2)$$

فيكون

$$\frac{CJ}{IJ} = \frac{IJ}{JD}$$

ويكون

$$\frac{IJ^2}{CJ^2} = \frac{JD}{JC}$$

وبالتالي

$$\frac{AB^2}{BJ^2} = \frac{JD}{JC}$$

فيحصل

$$AB^2.JC = BJ^2.JD \qquad (١)$$

لكن

$$AB^2.JC = AB^2.BJ + AB^2.BC \qquad (٢)$$

وَ

$$BJ^3 = BJ^2.(JD + BD) = BJ^2.JD + aBJ^2 \qquad (٣)$$

فإذا وضعنا $x = BJ$، يحصل، استناداً إلى (١)، (٢) و (٣):

$$x^3 = ax^2 + bx + c \quad (\text{المعادلة ١٨})$$

تعليـق

لكل ثلاثية (a, b, c) مؤلّفة من أعداد حقيقية موجبة يكون للمعادلة ١٨

$$x^3 = ax^2 + bx + c$$

حل موجب (فعلاً). ويمكن أن يكون لها جذر سالب مزدوج أو جذران سالبان. لأجل تحديد الجذر الموجب، يستعمل الطوسي، كما فعل الخيّام، قطعين زائدين متساويي الأضلاع (وبشكل أدق، فرعاً من كل منهما) ويبرهن أن لهما نقطة مشتركة تقابل الجذر المطلوب. نشير إلى أن أخذ الفرعين الآخرين، يُمَكِّن، في ظل شروط على a، وb وc، من إيجاد نقطة أو نقطتين أُخريين تقابل الجذور السالبة.

لكي نفهم اختيار المنحنيات الذي اعتمده الطوسي، نلاحظ أن الصفر ليس حلاً

للمعادلة ١٨ التي يمكنها بالتالي أن تكتب:

$$x - a = \frac{b}{x^2}\left(x + \frac{c}{b}\right).$$

إذا ما ضُرِب طرفا المعادلة بـ $\left(x + \frac{c}{b}\right)$، وهو ما يُدخِل جذراً إضافياً هو $\frac{c}{b}$ ، تقابله النقطة C، نحصل على:

$$(x-a)\ \left(x + \frac{c}{b}\right) = \frac{b}{x^2}\left(x + \frac{c}{b}\right)^2$$

$$= \left(b^{\frac{1}{2}} + \frac{c\, b^{-\frac{1}{2}}}{x}\right)^2.$$

فإذا وضعنا أولاً:

$$(y + b^{\frac{1}{2}})^2 = (x-a)\ \left(x + \frac{c}{b}\right),$$

نحصل على معادلة $\mathscr{H}_2$. وإذا وضعنا، من ثم:

$$(y + b^{\frac{1}{2}})^2 = \left(b^{\frac{1}{2}} + \frac{c\, b^{-\frac{1}{2}}}{x}\right)^2,$$

نحصل على قطعين زائدين $\mathscr{H}_1$ وَ $\mathscr{H}'_1$:

$$(\mathscr{H}_1) \quad y = \frac{c\, b^{-\frac{1}{2}}}{x}$$

وَ

$$(\mathscr{H}_2) \quad y = -2b^{\frac{1}{2}} - \frac{c\, b^{-\frac{1}{2}}}{x}$$

متناظرين بالنسبة إلى CD؛ لذلك فإن $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2$ وَ $\mathscr{H}_1' \cap \mathscr{H}_2$ يعطيان الإحداثيات السينية نفسها وبالتالي الجذور نفسها للمعادلة ١٨.

لكي يبرهن وجود نقطة مشتركة بين $\mathscr{H}_1$ و $\mathscr{H}_2$ يأخذ الطوسي النقطة P وهي $P(a+m,\ y)$ على $\mathscr{H}_2$ حيث:

$$m = b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}\ .\ b^{-\frac{1}{4}}$$

فيكون

$$(y + b^{\frac{1}{2}})^2 = m\ .\ \left(m + \frac{c}{b} + a\right)$$

وبالتالي

$$(y + b^{\frac{1}{2}})^2\ >\ m^2$$

وَ

$$y > c^{\frac{1}{3}} \, . \, b^{-\frac{1}{6}}.$$

لتكن G النقطة $G(a+m,\ Y) \in \mathscr{H}_1$. بما أن AN خط مقارب لِـ $\mathscr{H}_1$ يكون بالضرورة:

$$Y < c^{\frac{1}{3}} \, . \, b^{-\frac{1}{6}}$$

وبالتالي فإن

$$Y < y$$

ويكون P داخل $\mathscr{H}_1$. لكن D الموجودة على $\mathscr{H}_2$ هي خارج $\mathscr{H}_1$؛ لذلك، وبما أن $\mathscr{H}_2$ منحنٍ متواصل، فإن القوس DP يقطع $\mathscr{H}_1$ بالضرورة في نقطة نسميها I، $I(x_0,\ y_0)$ وتكون x_0 حلاً للمعادلة ١٨.

فبما أن I موجود على $\mathscr{H}_1$، يكون لدينا:

$$x_0 \, . \, y_0 = c \, . \, b^{-\frac{1}{2}}$$

وبالتالي يكون

$$x_0(y_0 + b^{\frac{1}{2}}) = b^{\frac{1}{2}} \, . \, \left(\frac{c}{b} + x_0\right)$$

وَ

$$\frac{y_0 + b^{\frac{1}{2}}}{\frac{c}{b} + x_0} = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{x_0} \, . \qquad (١)$$

وبما أن I موجود على $\mathscr{H}_2$ يكون:

$$\left(x_0 + \frac{c}{b}\right)\,(x_0 - a) = (y_0 + b^{\frac{1}{2}})^2\ ,$$

وبالتالي

$$\frac{x_0 + \frac{c}{b}}{y_0 + b^{\frac{1}{2}}} = \frac{y_0 + b^{\frac{1}{2}}}{x_0 - a}$$

فيكون

$$\frac{(y_0 + b^{\frac{1}{2}})^2}{\left(x_0 + \frac{c}{b}\right)^2} = \frac{x_0 - a}{x_0 + \frac{c}{b}}$$

ويكون، استناداً إلى (١)

$$\frac{b}{x_0^2} = \frac{x_0 - a}{x_0 + \frac{c}{b}}$$

أي

$$a x_0^2 + b x_0 + c = x_0^3\ .$$

ملاحظة: كما مر في المعادلة السابقة، نلاحظ أن اختيار القطع المكافئ والقطع

الزائد التاليين:

$$y = \frac{a}{x} + b \qquad \text{وَ} \qquad y = x^2 - ax$$

يبدو أكثر بديهية من اختيار الطوسي، الذي ينهي بإعطاء الحل العددي لثلاث معادلات من هذا النوع (الفصل الأول، الفقرة سادساً، الجداول أرقام (١ ـ ١٥)، (١ ـ ١٦) و (١ ـ ١٧)).

المعادلة ١٩: $x^3 + ax^2 = bx + c$

نأخذ $AB = \sqrt{b}$، $AC = a$، $AC \perp AB$ ونأخذ D على AC بحيث يكون:

$$AD \,.\, AB^2 = c$$

فيكون $AD = \frac{c}{b}$. ولدينا ثلاث حالات تطرح نفسها.

الحالة الأولى: (الشكل رقم (٢ ـ ٢٥أ)): $AD < AC$ أي $c < ab$.

الشكل رقم (٢ ـ ٢٥أ)

نبني المستطيل $ADLB$ ونطيل BL و AB ونبني المربع (BJ) بمساحة $ADLB$ نفسها.

ليكن $\mathscr{H}_1$ القطع الزائد ذا الخطين المقاربين BI و BP، $P \in AB, \; I \in BL$.

ليكن $\mathscr{H}_2$ القطع الزائد ذا القطر المجانب CD. فنطيل CD ونأخذ $DM = AP$.

نأخذ $NM \perp DM$، $N \in \mathscr{H}_2$، فيكون $MN > DM$ لأن:

$$MN^2 = CM.DM$$

ولأننا في الحالة $AD < AC$ وبالتالي $CM > DM$. لذلك فإن $MN > AP$. ولتكن O نقطة التقاء NM مع إطالة BU. بما أن $OM = AB$، يكون $ON > BP$، فيكون $ON > BP = UJ$.

لتكن Q نقطة تقاطع ON و $\mathscr{H}_1$ فيكون $OQ < UJ$ لأن BI خط مقارب لِـ $\mathscr{H}_1$، وتكون النقطة Q داخل $\mathscr{H}_2$ وبالتالي فإن $\mathscr{H}_1$ وَ $\mathscr{H}_2$ يلتقيان بالضرورة لأن النقطة J خارج $\mathscr{H}_2$. نسمي G نقطة التقاء $\mathscr{H}_1$ بـ $\mathscr{H}_2$ ونسقط G عمودياً على AE في النقطة H وعلى AM في النقطة K. لدينا:

$$(BG) = (BJ) = (BD)$$

وبالتالي

$$(AG) = (DI) ,$$

أي

$$AH \,.\, HG = HI \,.\, HD$$

وبالتالي

$$\frac{AB}{AH} = \frac{HI}{AH} = \frac{HG}{HD} \qquad \text{وَ} \qquad \frac{AB^2}{AH^2} = \frac{HG^2}{HD^2} \,.$$

لكن

$$DH.CH = HG^2 \qquad (\text{معادلة } \mathscr{H}_2)$$

فيكون

$$\frac{HG^2}{DH^2} = \frac{CH}{DH}$$

وبالتالي

$$AB^2 \,.\, DH = AH^2 \,.\, CH \,.$$

فإذا سمّينا $AH = x$ يكون لدينا:

$$AH^2 \,.\, CH = AH^3 + AH^2 \,.\, AC = x^3 + ax^2;$$

لكن

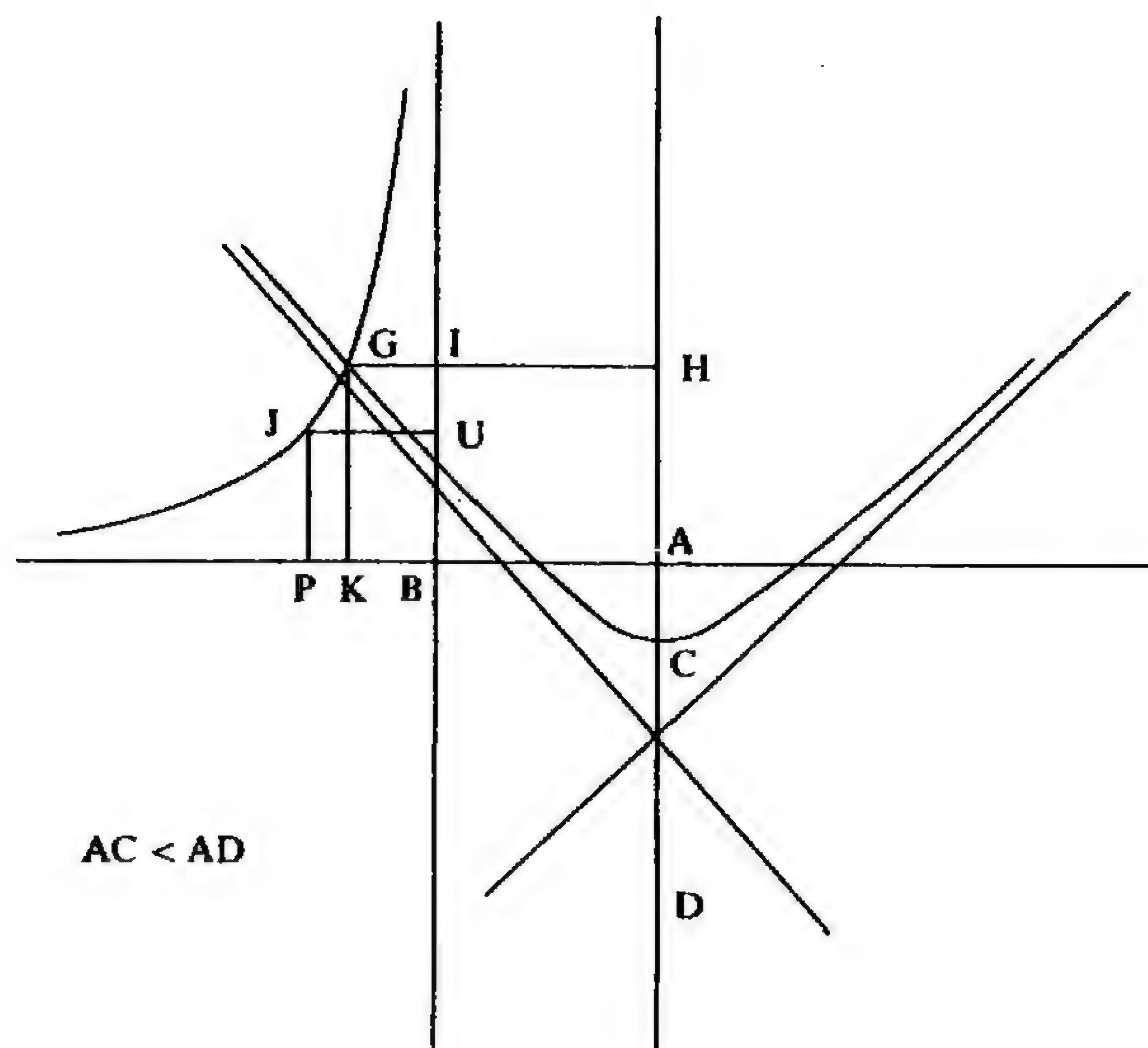
$$AB^2 \,.\, DH = AB^2 \,.\, AH + AB^2 \,.\, AD = bx + c\,;$$

فيكون

$$x^3 + ax^2 = bx + c\ ,$$

ويكون AH حلاً للمعادلة ١٩.

الحالة الثانية: (الشكل رقم (٢ ـ ٢٥ب)): $AD = AC = a$ ؛ $\frac{c}{b} = a$.



الشكل رقم (٢ ـ ٢٥ب)

إذا سمّينا $AB = x$ يكون

$$x^3 = AB^2 \, . \, x = bx\ ,$$

لكن

$$AD \, . \, AB^2 = ax^2 = c\ ,$$

فيكون

$$x^3 + ax^2 = bx + c,$$

ويكون AB حلاً للمعادلة ١٩.

الحالة الثالثة: (الشكل رقم (٢ ـ ٢٥ب)): $AD > AC$ ؛ $\frac{c}{b} > a$.

نفرض أن $\mathscr{H}_2$ هو القطع الزائد ذو الرأس C (والقطر المجانب CD). نبرهن، كما فعلنا سابقاً أن:

$$\frac{AB^2}{AH^2} = \frac{HG^2}{DH^2} ,$$

لكن

$$HG^2 = DH.CH \qquad (\text{معادلة } \mathscr{H}_2)$$

فإذا أخذنا $AH = x$، يكون:

$$AH^2.CH = AH^3 + AH^2.AC = x^3 + ax^2 ,$$

ويكون

$$AB^2.DH = AB^2.AH + AB^2 \,.\, AD = bx + c ,$$

وبالتالي

$$x^3 + ax^2 = bx + c ,$$

فيكون AH حلاً للمعادلة ١٩.

تعليـق

كل ثلاثية منتظمة (a, b, c) مؤلفة من أعداد حقيقية موجبة (فعلاً)، يقابلها المعادلة ١٩

$$x^3 + ax^2 = bx + c ,$$

التي تحوز على جذر موجب بالفعل؛ ويمكنها أن تحوز على جذرين سالبين أو على جذرٍ سالب مزدوج.

لكي يحدد الجذر الموجب، يستخدم الطوسي، كما فعل الخيّام، قطعين زائدين متساويي الأضلاع. نلاحظ في الواقع أنه يستعمل فرعي كل من هذين القطعين. فالقطع $\mathscr{H}_2$ محدد بواسطة قطره المجانب CD وبالتالي فإن C و D هما رأساه. وفي الحالة الأولى يستخدم الفرع ذا الرأس D، وفي الحالة الثالثة يستعمل الفرع ذا الرأس C. والقطع $\mathscr{H}_1$ محدد بخطيه المقاربين اللذين يلتقيان في B، وبرأسه J حيث:

$$(BJ) = (BD) = AB.AD$$

ويأخذ الطوسي الفرع ذا الرأس J؛ والفرع الثاني من القطع نفسه يمر بـ D.

وفي كلتا الحالتين يلتقي القطعان $\mathscr{H}_1$ و $\mathscr{H}_2$ في D. ويبرهن الطوسي أن لهما نقطة التقاء أخرى G، توجد في كلتا الحالتين على الفرع من $\mathscr{H}_1$ الذي لا يمر بـ D.

لكن، على $\mathscr{H}_2$ توجد النقطة G، إما على الفرع الذي يمر بـ D وإما على الفرع الذي يمر بالنقطة C.

وعند استجابة a وb وَ c لبعض الشروط، يلتقي القِطعان $\mathscr{H}_1$ و $\mathscr{H}_2$ في نقطة أو في نقطتين غير D و G، ويقابل أياً من نقاط الالتقاء هذه جذر سالب هو إحداثيتها السينية.

في ما يخص اختيار المنحنيين، نلاحظ أن الصفر ليس جذراً للمعادلة ١٩ فهي بالتالي تكتب:

$$x+a=\frac{b}{x^2}\left(x+\frac{c}{b}\right)$$

وإذا ضربنا طرفيها بـ $\left(x+\frac{c}{b}\right)$ (وهو ما يدخل جذراً إضافياً هو $x=-\frac{c}{b}$ الذي يقابل النقطة D)، نحصل على

$$\left(x+\frac{c}{b}\right)(x+a)=\left(\sqrt{b}+\frac{c}{x\,.\,\sqrt{b}}\right)^2 .$$

فنضع

$$(y+\sqrt{b})^2=\left(x+\frac{c}{b}\right)(x+a)\,,$$

وهذه المعادلة هي معادلة $\mathscr{H}_2$، ذي القطر المجانب CD حيث $C(-a,\ -b^{\frac{1}{2}})$ وَ$D(-a,\ -b^{\frac{1}{2}})$. ومن ثم نضع

$$(y+\sqrt{b})^2=\left(\sqrt{b}+\frac{c}{x\sqrt{b}}\right)^2$$

فنحصل على المعادلتين:

$$y=\frac{c}{\sqrt{b}\,.\,x}\qquad (\text{معادلة } \mathscr{H}_1)$$

وَ

$$y=-2\sqrt{b}-\frac{c}{\sqrt{b}\,.\,x}$$

والأخيرة هي معادلة منحنٍ $\mathscr{H}'_1$ متناظر مع $\mathscr{H}_1$ بالنسبة إلى المحور CD. لذلك فإن نقاط التقاء $\mathscr{H}_1$ و $\mathscr{H}_2$ من جهة، ونقاط التقاء $\mathscr{H}'_1$ و $\mathscr{H}_2$ المقابلة لها، من جهة أخرى، لها الإحداثيات السينية نفسها.

ومن أجل أن يبرهن الطوسي وجود نقطة $G(x_0,\ y_0)$ مشتركة بين $\mathscr{H}_1$ و $\mathscr{H}_2$، يعطي أولاً، في حالة كون $a<\frac{c}{b}$، نقطة N تساوي $N(X,\ Y)$ على $\mathscr{H}_2$ حيث:

$$X+\frac{c}{b}<c^{\frac{1}{2}}\,.\,b^{-\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}$$

وبما أن

$$(Y+b^{\frac{1}{2}})^2 = \left(X+\frac{c}{b}\right)(X+a) > \left(X+\frac{c}{b}\right)^2,$$

يحصل على

$$Y+b^{\frac{1}{2}} > c^{\frac{1}{2}} \,.\, b^{-\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}$$

وبالتالي على

$$Y > c^{\frac{1}{2}} \,.\, b^{-\frac{1}{4}} \qquad (1)$$

يأخذ من ثم نقطة Q على $\mathscr{H}_1$، $Q = Q(X,\ y)$، فيحصل على:

$$y < c^{\frac{1}{2}} \,.\, b^{-\frac{1}{4}}, \qquad (2)$$

ذلك لأن BO خط مقارب لِـ $\mathscr{H}_1$. ومن (١) و (٢) نحصل على:

$$y < Y,$$

وبالتالي فإن Q داخل $\mathscr{H}_2$.

وبما أن $\mathscr{H}_1$ منحنٍ متواصل وبما أن لديه نقاطاً خارج $\mathscr{H}_2$ فهو حتماً يقطع $\mathscr{H}_2$ في نقطة G تساوي $G(x_0,\ y_0)$. إن x_0 هو حل للمعادلة ١٩.

فبما أن $G \in \mathscr{H}_1$، يكون لدينا:

$$x_0\, y_0 = cb^{-\frac{1}{2}},$$

وبالتالي:

$$x_0(y_0+b^{\frac{1}{2}}) = cb^{-\frac{1}{2}} + x_0 b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{2}}\left(x_0+\frac{c}{b}\right),$$

فيكون

$$\frac{b}{x_0^2} = \frac{(y_0+b^{\frac{1}{2}})^2}{\left(x_0+\frac{c}{b}\right)^2} \qquad (3)$$

وبما أن $G \in \mathscr{H}_2$، يكون لدينا:

$$(y_0+b^{\frac{1}{2}})^2 = \left(x_0+\frac{c}{b}\right)(x_0+a),$$

وبالتالي

$$\frac{(y_0+b^{\frac{1}{2}})^2}{\left(x_0+\frac{c}{b}\right)^2} = \frac{x_0+a}{x_0+\frac{c}{b}} \qquad (4)$$

إن العلاقتين (٣) وَ (٤) تعطيان العلاقة:

$$b\left(x_0+\frac{c}{b}\right) = x_0^2(x_0+a),$$

أي

$$x_0^3 + ax_0^2 = bx_0 + c;$$

وهذا يعني أن x_0 حل للمعادلة ١٩.

في الحالة $\frac{c}{b} > a$، يبرهن بطريقة مماثلة وجود نقطة مشتركة $G(x_0, y_0)$ بين $\mathscr{H}_1$ و $\mathscr{H}_2$ وأن x_0 حل للمعادلة ١٩.

في الحالة $\frac{c}{b} = a$، يكون $x_0 = b^{\frac{1}{2}}$ حلاً للمعادلة ١٩ لأن:

$$b.b^{\frac{1}{2}} + c = (b^{\frac{1}{2}})^3 + a.(b^{\frac{1}{2}})^2.$$

نلاحظ، في هذه الحالة أن C و D هما النقطة نفسها وتكتب معادلة $\mathscr{H}_2$ كما يلي:

$$(y + b^{\frac{1}{2}}) = \pm(x + a),$$

لذلك، فإن $\mathscr{H}_2$ هي عبارة عن مستقيمين، أحدهما:

$$y = x + a - b^{\frac{1}{2}},$$

يقطع $\mathscr{H}_1$ في النقطة $G(x_0, y_0)$ حيث $x_0 = b^{\frac{1}{2}}$ والآخر

$$y = -(x + a + b^{\frac{1}{2}}),$$

يقطع، في بعض الحالات، الفرع الثاني من $\mathscr{H}_1$ في نقاط إحداثياتها السينية سالبة.

ملاحظة: هنا أيضاً، كما في المسائل التي سبقت، كان بالإمكان اختيار قطعين يبدوان أكثر ملاءمة: القطع المكافئ

$$y = x^2 + ax$$

والقطع الزائد

$$y = \frac{c}{x} + b\ .$$

ينهي الطوسي دراسة هذا النوع من المعادلات بتقديم حل عددي لثلاث معادلات منه (راجع الفصل الأول، الفقرة سادساً، الجداول أرقام (١ ـ ١٨) و (١ ـ ١٩) و (١ ـ ٢٠)).

المعادلة ٢٠: $x^3 + bx = ax^2 + c$

ليكن $AB = \sqrt{b}$؛ $AC = a$؛ $AC \perp AB$. ولتكن D نقطة على AC بحيث يكون $AD.AB^2 = c$، أي $AD = \frac{c}{b}$.

ثلاث حالات تعترضنا:

الحالة الأولى: (الشكل رقم (٢ ـ ٢٦أ)): $AD < AC$، أي $c < ab$.

AC > AD

الشكل رقم (٢ ـ ١٢٦أ)

نبني المستطيل $ABED$ ونأخذ نصف الدائرة $\mathscr{C}$، ذات القطر CD، نطيل BE إلى BL وَ BA إلى BU.

ونأخذ القطع الزائد $\mathscr{H}$، ذا الخطين المقاربين BL و BU والذي يمر بِـ D، فتكون النقطة B في منتصف قطره المجانب. لذلك فإن $\mathscr{H}$ تدخل إلى داخل $\mathscr{C}$ وتقطع $\mathscr{C}$ في نقطة غير D. ومن أجل بيان ذلك، نأخذ PQ بحيث يكون:

$$\frac{AD}{DE}=\frac{DE}{PQ} \qquad (١)$$

وهذا يعني

$$PQ=\frac{DE^2}{AD}=\frac{AB^2}{AD}=\frac{b^2}{c}\ .$$

لتكن O نقطة على AC تحقق العلاقة:

$$\frac{AD+PQ}{PQ}=\frac{DC}{CO} \qquad (٢)$$

فيكون

$$\frac{AD}{PQ}=\frac{DO}{OC}\ .$$

ولتكن $S\in\mathscr{C}$ بحيث يكون $OS\perp AC$، فيكون:

$$OD.OC=OS^2 \qquad \text{(قدرة } O\text{)}$$

ويكون

$$\frac{OD}{OS}=\frac{OS}{OC}\ ,$$

وبالتالي

$$\frac{OD^2}{OS^2}=\frac{OD}{OC}=\frac{AD}{PQ}=\frac{AD^2}{DE^2}\ .$$

فيكون

$$\frac{OD}{OS}=\frac{AD}{DE}\ ,$$

ومنها

$$\frac{OD}{AD}=\frac{OS}{DE}\ .$$

ونسمي J نقطة التقاء OS و BL، فيكون $OJ = DE$ وبالتالي:

$$\frac{OD}{AD}=\frac{OS}{OJ}\ ;$$

لكن

$$\frac{OS}{OJ}<\frac{OS}{SJ}$$

فيكون

$$\frac{OD}{AD}<\frac{OS}{SJ}\ ,$$

وبالتالي

$$\frac{OA}{AD}<\frac{OJ}{SJ}\ .$$

وليكن N إسقاط S على AB فيكون:

$$\frac{SN}{AD}<\frac{DE}{SJ}\ ,$$

وبالتالي

$$SN.SJ < AD.DE \qquad (٣)$$

إن المستقيم DE يقسم $\mathscr{H}$ إلى قسمين، أحدهما في جهة AU والآخر في جهة نصف الدائرة $\mathscr{C}$. لذلك فإن $\mathscr{H}$ يدخل حتماً إلى داخل $\mathscr{C}$ وإلا فإنه يكون موجوداً بين DE ونصف الدائرة، وهذا الأمر محال. ولتبيان استحالته نأخذ النقطة P لالتقاء BS و $\mathscr{H}$ ونسقطها عمودياً على BE وBA بالتالي في نقطتين Y وَ U. فيكون $PYBU$ موجوداً كلياً داخل $SJBN$ ويكون:

$$SN.SJ > PY.YB \qquad (٤)$$

لكن، بما أن P موجود على $\mathscr{H}$ يكون:

$$PY.YB = DE.AD\ ;$$

فيكون، استناداً إلى (٣)

$$SN.SJ < PY.YB\ .$$

وهذا يعني أن الاستنتاج (٤) خاطئ، وبالتالي فإن افتراض عدم دخول $\mathscr{H}$ في الدائرة $\mathscr{C}$، خاطئ. لذلك، فإن $\mathscr{H}$ تنفذ إلى داخل $\mathscr{C}$ مقتربة بشكل مستمر من BL. لذلك فإن $\mathscr{H}$ تقطع $\mathscr{C}$ في النقطة C وفي نقطة أخرى هي G.

لتكن النقاط I، K وَ M' إسقاطات G العمودية على AC، BL و AB بالتالي.

لدينا:

$$GK.KB = AD.AB \quad (\text{معادلة } \mathscr{H})$$

لتكن M تقاطع GM' و DE؛ فيكون:

$$GK.GM = AD.DM$$

وبالتالي

$$IK.GM = AI.DM$$

فيكون

$$\frac{AB}{AI} = \frac{IK}{AI} = \frac{DM}{GM} = \frac{IG}{DI}$$

وبالتالي

$$\frac{AB^2}{AI^2} = \frac{IG^2}{DI^2}\ ;$$

لكن

$$CI.DI = GI^2 \quad (\text{قدرة } I)$$

فيكون

$$\frac{AB^2}{AI^2} = \frac{CI}{DI}$$

وبالتالي

$$AB^2.DI = AI^2.CI$$

ومنها

$$AB^2.DI + AI^3 = AI^2.AC$$

وأيضاً

$$AB^2.DI + AI^3 + AB^2.AD = AI^2.AC + AB^2.AD$$

فيكون

$$AB^2.AI + AI^3 = AI^2.AC + AB^2.AD \ ;$$

فإذا وضعنا $AI = x$، يكون:

$$bx + x^3 = ax^2 + c$$

ويكون AI حلاً للمعادلة ٢٠.

الحالة الثانية: (الشكل رقم (٢ ـ ٢٦ب)): $AD = AC$ ؛ $c = ab$.

في هذه الحالة يكون AC حلاً للمعادلة ٢٠، ذلك لأن:

$$AB^2.AC = bx = c$$

وَ

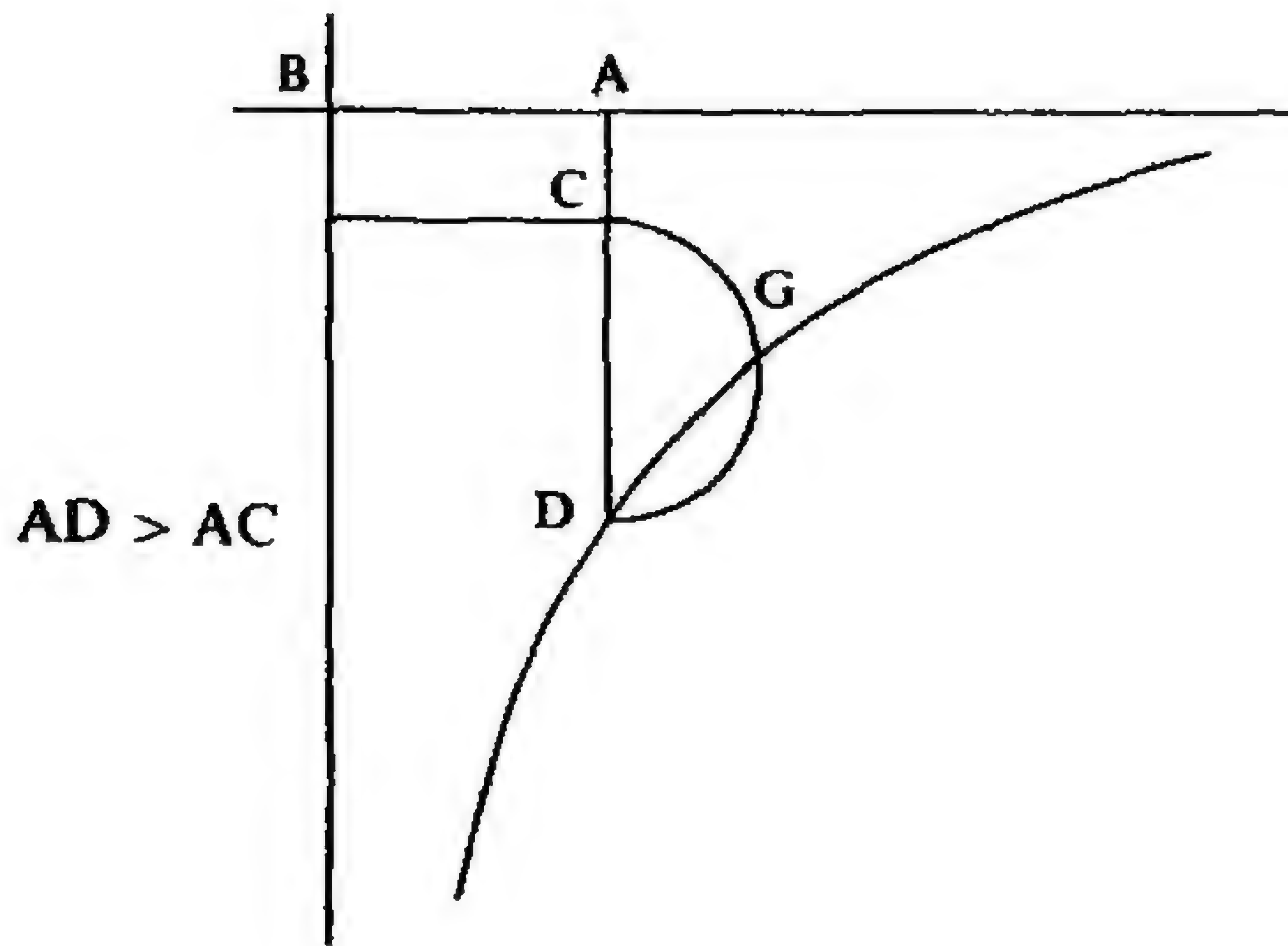
$$AC.AC^2 = ax^2 = x^3$$

فيكون

$$bx + x^3 = ax^2 + c \ .$$

الشكل رقم (٢ ـ ٢٦ب)

الحالة الثالثة: (الشكل رقم (٢ ـ ٢٦ج)): $AD > AC$ ؛ $c > ab$.



الشكل رقم (٢ ـ ٢٦ج)

فنرسم DE و BE والدائرة $\mathscr{C}$ والقطع الزائد $\mathscr{H}$. ونبرهن كما في السابق أن $\mathscr{H}$ تخترق $\mathscr{C}$ وتقطعها في نقطة G. نرسم $GIK \perp AD$، I على AD، K على BL، فيكون لدينا:

$$DI.IK = AI.IG \ ,$$

وبالتالي

$$\frac{AI}{IK}=\frac{AI}{AB}=\frac{ID}{IG}\ ,$$

فيكون

$$\frac{AI^2}{AB^2}=\frac{ID^2}{IG^2}=\frac{DI}{CI}\ ,$$

و

$$AI^2.CI=AB^2.DI\ ,$$

فيكون

$$(AI^3-AI^2.CI)+AB^2.AD=AB^2.AD-AB^2.DI+AI^3\ ,$$

وبالتالي

$$AI^2.AC+AB^2.AD=AB^2.AI+AI^3\ ,$$

أي

$$ax^2+c=bx+x^3\ .$$

فيكون AI حلاً للمعادلة ٢٠.

تعليق

المعادلة $x^3+bx=ax^2+c$ حيث a، b، c أعداد حقيقية موجبة، لها جذر موجب على الأقل. وتبعاً لبعض قيم a، b وَ c يمكن أن يكون لها، بالإضافة إلى هذا الجذر، جذر موجب مزدوج أو جذران موجبان. نشير إلى عدم إمكانية وجود جذور سالبة لهذه المعادلة.

الحالات التي ميّزها الطوسي لا تتلاءم مع الحالات التي تنتج عن دراسة ومناقشة المعادلة. لكن هذه الحالات تسمح له بتحديد وضعيات نصف الدائرة وفرع القطع الزائد المستخدَمَيْن. وعلى غرار الخيّام، لم يبحث سوى عن جذر موجب واحد، بمساعدة نصف الدائرة وفرع القطع الزائد. ولم يشر الطوسي (وكذلك الخيّام) إلى إمكانية أن يكون لهذه المعادلة ثلاثة جذور موجبة.

في ما يتعلق باختيار المنحنيين، نلاحظ أن الصفر ليس جذراً للمعادلة ٢٠ التي يمكن كتابتها:

$$(x-a)=\frac{b}{x^2}\left(\frac{c}{b}-x\right)\ ;$$

إن ضرب طرفي هذه العلاقة بـ $\left(\frac{c}{b}-x\right)$، مدخلين جذراً إضافياً هو $x=\frac{c}{b}$، يُعطي:

$$(x-a)\left(x-\frac{c}{b}\right)=\left(\frac{cb^{-\frac{1}{2}}}{x}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2;$$

فنضع

$$(y-b^{\frac{1}{2}})^2=(x-a)\,.\left(x-\frac{c}{b}\right)$$

وهي معادلة الدائرة $\mathscr{C}$ ذات القطر CD، $C(a,\ b^{\frac{1}{2}})$، $D\left(\frac{c}{b},\ b^{\frac{1}{2}}\right)$، فيكون معنا:

$$(y-b^{\frac{1}{2}})^2=\left(\frac{cb^{-\frac{1}{2}}}{x}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2,$$

التي تتفكك إلى:

$$y=\frac{cb^{-\frac{1}{2}}}{x} \qquad (\text{معادلة } \mathscr{H})$$

وإلى

$$y=2b^{\frac{1}{2}}-\frac{cb^{-\frac{1}{2}}}{x}$$

والأخيرة هي معادلة القطع $\mathscr{H}'$ المتناظر مع $\mathscr{H}$ بالنسبة إلى CD. لذلك، فإن $\mathscr{H}\cap\mathscr{C}$ وَ $\mathscr{H}'\cap\mathscr{C}$ متناظران بالنسبة إلى CD، وبالتالي فإن الإحداثيات السينية لنقاط الالتقاء المتناظرة متساوية.

من أجل برهان وجود نقطة التقاء بين $\mathscr{C}$ و $\mathscr{H}$، يأخذ الطوسي في الحالة $a<\frac{c}{b}$، النقطة $S(x',\ y')$ من $\mathscr{C}$ حيث:

$$(a-x')=\frac{\left(a-\frac{c}{b}\right)}{\left(1+\frac{c^2}{b^3}\right)} \qquad (1)$$

فيكون

$$(b^{\frac{1}{2}}-y')^2=\left(x'-\frac{c}{b}\right)(a-x'),$$

وبالتالي يكون

$$\frac{b^{\frac{1}{2}}-y'}{a-x'}=\frac{x'-\frac{c}{b}}{b^{\frac{1}{2}}-y'};$$

واستناداً إلى (١)

$$\frac{\left(x'-\frac{c}{b}\right)^2}{(b^{\frac{1}{2}}-y')^2}=\frac{x'-\frac{c}{b}}{a-x'}=\frac{c^2}{b^3},$$

وبالتالي

$$\frac{x'-\frac{c}{b}}{b^{\frac{1}{2}}-y'}=\frac{c}{b^{\frac{3}{2}}},$$

فيكون

$$\frac{x' - \frac{c}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{b^{\frac{1}{2}} - y'}{b^{\frac{1}{2}}} ,$$

لكن

$$\frac{b^{\frac{1}{2}} - y'}{b^{\frac{1}{2}}} < \frac{b^{\frac{1}{2}} - y'}{y'} ,$$

فيكون

$$\frac{x'}{\left(\frac{c}{b}\right)} < \frac{b^{\frac{1}{2}}}{y'} ,$$

وبالتالي

$$x'.y' < c.b^{-\frac{1}{2}} \qquad (٢)$$

نفرض أن $\mathscr{H}$ لا ينفذ إلى داخل $\mathscr{C}$ ونأخذ:

$$P = P(X,\ Y) \in \mathscr{H} \cap \Delta$$

حيث Δ هو المستقيم BS

$$\Delta = \left\{(x,\ y)\ ;\ y = \frac{y'}{x'}\ .\ x\right\}$$

يكون P عندئذٍ خارج $\mathscr{C}$، فيكون:

$$X.Y < x'.y' ;$$

لكن P موجود على $\mathscr{H}$، وبالتالي فإن لدينا:

$$X.Y = cb^{-\frac{1}{2}}$$

إذاً، واستناداً إلى (٢) يكون:

$$x'.y' < X.Y$$

وهو خُلف. لذلك، فإن $\mathscr{C}$ و $\mathscr{H}$ يلتقيان في نقطة G تساوي $G(x_0,\ y_0)$، ويكون x_0 حلاً للمعادلة ٢٠؛ ولبرهان ذلك، نلاحظ أن لدينا،

$$x_0\ .\ y_0 = c\ .\ b^{-\frac{1}{2}},$$

وذلك لأن $G \in \mathscr{H}$. فيكون:

$$y_0\left(x_0 - \frac{c}{b}\right) = \frac{c}{b}\ (b^{\frac{1}{2}} - y_0) ,$$

ويكون

$$b^{\frac{1}{2}}\left(x_0 - \frac{c}{b}\right) = x_0(b^{\frac{1}{2}} - y_0) ,$$

وبالتالي يكون:

$$\frac{b}{x_0^2}=\frac{(b^{\frac{1}{2}}-y_0)^2}{\left(x_0-\frac{c}{b}\right)^2} \qquad (٣)$$

وبما أن $G\in\mathscr{C}$، يكون:

$$(b^{\frac{1}{2}}-y_0)^2=\left(x_0-\frac{c}{b}\right)(a-x_0)\ ,$$

واستناداً إلى (٣) يكون:

$$\frac{b}{x_0^2}=\frac{a-x_0}{x_0-\frac{c}{b}}\ ,$$

وبالتالي فإن لدينا:

$$x_0^3+bx_0=ax_0^2+c\ ,$$

في الحالة $\frac{c}{b}=a$ نتحقق من أن $x_0=a$ هو حل للمعادلة، ذلك لأن:

$$a^3+b.a=a.a^2+c.$$

نشير، في هذه الحالة، إلى أن C و D هما النقطة نفسها، وأن $\mathscr{C}$ مختزلة إلى نقطة وأن $\mathscr{C}\cap\mathscr{H}$ مختزلة إلى النقطة C ذات الإحداثية السينية $x_0=a$.

في الحالة الثالثة، $\frac{c}{b}>a$، يلتقي $\mathscr{H}$ و $\mathscr{C}$ أيضاً في نقطة G تساوي $G(x_0,\ y_0)$، غير النقطة D، وذلك للأسباب نفسها التي وردت سابقاً؛ ونبرهن أن x_0 حلّ للمعادلة ٢٠. فلدينا

$$\left(\frac{c}{b}-x_0\right).\ b^{\frac{1}{2}}=x_0(y_0-b^{\frac{1}{2}})\ ,$$

وبالتالي

$$\frac{x_0^2}{b}=\frac{\left(\frac{c}{b}-x_0\right)}{(x_0-a)}\ ,$$

فيكون

$$x_0^3+bx_0=ax_0^2+c\ .$$

وينهي الطوسي دراسته لهذا النوع من المعادلات بحل عددي لثلاثة أمثلة منها (انظر الفصل الأول، الفقرة سادساً، الجداول أرقام (١ ـ ٢١) و (١ ـ ٢٢) و (١ ـ ٢٣)).

ملاحظة ١: يمكن أن تحل المعادلة ٢٠ عن طريق القطع المكافئ $\mathscr{P}$

$$y=x^2-ax\ ,$$

والقطع الزائد $\mathscr{H}$

$$y=\frac{c}{x}-b\ .$$

ملاحظة ٢: المعادلة ٢٠ هذه هي المسألة الوحيدة التي طرح فيها الخيّام مسألة برهان وجود نقاط التقاء للمنحنيين المستخدمين. لكن مقارنة طريقته في البرهان مع طريقة الطوسي تظهر فوارق واضحة. فنلاحظ أن الطوسي يُدخل مفهوم المسافة من نقطة إلى خط مستقيم ويستخدم هذا المفهوم ليضع حداً أقصى لبعض المسافات؛ كما أنه يستخدم في الوقت نفسه معادلة المنحني بشكل صريح. إلا أن الخيّام يستخدم قضية تتعلق بإنشاء هندسي وضعها أبولونيوس ويستنتج، عن طريق محاولة برهان هندسي.

وسوف نرى في ما سيتبع، أن نهج الطوسي العام كان بشكل ما تحليلياً ـ هندسياً.

تعليقات إضافية[1]

[2.8] عبارة «المعادلة» التي أدخلها الناسخ المجهول، استعملها الطوسي، على أية حال، مرتين في مجرى «الرسالة». لكن، هنا، كما عند الخيّام وباقي الجبريين، المقصود بهذه العبارة هو مساواة بين أنواع مختلفة ـ عدد، «شيء»، مربع، مكعب، . . . الخ. على هذا الأساس كتب الخيّام «واستخراجات الجبر إنما تتم بالمعادلة، أعني بمعادلة هذه المراتب بعضها ببعض على ما هو مشهور».

وهذا هو المعنى نفسه الذي نلتقيه في رسالة الطوسي كما في النصوص الجبرية العربية الأخرى.

[2.8] عبارة «التخت» فارسية معربة لها معانٍ عدة، منها «المكان المسطح». وقبل القرن العاشر، كانت هذه العبارة، في الحساب الهندي، تعارضاً مع الحساب الاصبعي، تشير إلى لوح تنثر عليه طبقة رقيقة من الرمل الناعم[2] وتُرسَمُ عليه الأرقام حيث تجري عليها عمليات الإزاحة أو المحو بواسطة أقلام خاصة أو، بكل بساطة، بواسطة الاصبع.

وقد عرض الإقليدسي في القرن العاشر [٣٤١هـ/ ٩٥٢ ـ ٩٥٣م] استبعاد هذه الوسيلة المادية مع الإبقاء على وظيفتها، مقدماً الورق بديلاً عنها لتدوين العمليات الحسابية المتتالية، مبقياً على عبارة «التخت» للإشارة إلى اللوحة[3] التي تودع عليها نتائج كل مرحلة. ويشرح الإقليدسي دواعي هذا التغيير كما يلي: «وذلك أن كثيراً من الناس يكره إظهار التخت بين يديه عند حاجته إلى استعمال هذا الفن من الحساب لما فيه من سوء تأويل من يحضره أو يراه بين يديه فينقص ذلك منه إذ كان يُرى بين يدي من لا خلاق له من المتكسبين بالتنجيم على الطرقات ومما لا يزال يعرض للحاسب به من استثقال اعتبار ما يحسبه فيه وشدة حاجته في أكثر الأمر إلى إعادته وتكشف معانيه في هبوب الريح من تغيير رسومه وما يلحقه فيه من تدنيس كفه وغير ذلك من الأسباب

---

(١) يرمز الرقمان داخل المعقوفتين إلى: الأول رقم الصفحة بحسب الأرقام العربية، والثاني رقم السطر في الفصل الرابع: النصوص.

(٢) الغبار. (المترجم).

(٣) المكان من الورقة. (المترجم).

المفسدة لما انتظم منه» [الإقليدسي، **الفصول في الحساب الهندي**، تحقيق أحمد سعيدان، **تاريخ علم الحساب العربي**؛ ج٢ (عمان: الأردنية للتعريب والنشر والترجمة، ١٩٧٣)، ص ٣١٥].

كلمة «الجدول» تعود إلى أصل يعبّر عن «التوالي المنتظم». وقد يعني «الساقية»، «مجرى الماء» كما قد يعني مخطط كتاب أو لائحة محتويات هذا الكتاب. إنها بالتحديد الكلمة التي استعارها مترجمو كتاب **المجسطي** العرب لترجمة كلمة «*κανῶν*»: وكأحد الأمثلة على ذلك، نأخذ ترجمة الحجاج للعبارة:

καί ἐστιν ἡ τοῦ κανονίου καταγραφὴ τοιαύτη

التي أوردها كما يلي: «وهكذا تخطيط الجداول» [مخطوطة ليدن شرقيات، ٦٨٠، ورقة ٨ ظ [1.35]، و: [Heiberg, t. 1, p. 47, [1.21]. وهو ما تحول مع حنين بن اسحق إلى «وهكذا رسم الجداول». المقصود بهذه العبارة إذن، اللوحة التي تودع عليها نتائج الحساب أو القيم التي تنتج من الملاحظة.

فإذا ما توقفنا عند كتب جبريّي القرنين الحادي عشر والثاني عشر، نستنتج أن هناك فرقاً واضحاً بين هذين النوعين من اللوحات. فعبارة «تخت»، «لوح الرمل»(٤) تستعمل في حالة عملية حسابية واحدة على الأعداد الصحيحة أو على التعابير الجبرية. بينما يعني «الجدول» في غالب الأحيان، لوحة يُودع عليها مجموع النتائج أو مجموع الأمثلة. هذا التفريق بين العبارتين يُستخلص من استعمالهما ليس فقط في «رسالة» الطوسي وإنما في كتابَي معاصره السمَوأل [انظر: السموأل بن يحيى بن عباس المغربي: **الباهر في الجبر**، تحقيق وتحليل صلاح أحمد ورشدي راشد، سلسلة الكتب العلمية؛ ١٠ (دمشق: جامعة دمشق، ١٩٧٢)، ص ٤٤ وما بعدها، وص ١٩٤ وما بعدها، و**القوامي في الحساب الهندي** [238, f. 5r sqq., et f. 96v sqq (Mss. Medicea Laurenziana, Orient) وهنا، كما فعل السموأل، كان كل ما مارسه الطوسي يتفق مع نهج متّبع في ذلك العصر.

[2.9] من السابق لأوانه المعرفة الدقيقة لمدى رسالة الطوسي وللتأثير الذي تركته في الرياضيات، سواء في الشرق أو في الغرب. ونعرف حالياً أن هذه الرسالة قد قرئت من قبل رياضيين في القرن الثالث عشر. لكننا رأينا، من جهة أخرى أن استنساخها استمر حتى القرن التاسع عشر. وقد كان لهذا الأمر أن يُفسر على أنه عملية دفعت إليها هواية مكتبية، لو لم نجد أثراً مما يتميز به الطوسي، ظاهراً على النشاطات الرياضية

---

(٤) أو الغبار. (المترجم).

المتأخرة. فبصمات الطوسي تظهر بديهياً، بالتحديد في رسالة كُتبت في أصفهان عام ١٨٢٤م وحَوَت على ما يبدو نتائج أخرى من رياضيات القرون الوسطى. إن استمرار بقاء النهج الرياضي، هذا، في كثير من بلدان الشرق، موضوع يهم بالدرجة الأولى سوسيولوجيا العلوم، كما أن له أهميته في مجال تاريخ العلوم. وقد شكل هذا الاستمرار أحياناً، وسيلة قيمة للتخفيف من النتائج السلبية لفقدان الرسائل الأصلية. وسنستخدم هذه الأداة التي أهملها مؤرِّخو العلم العربي ـ الإسلامي، لكي نبين بعض مظاهر تأثير مساهمة الطوسي في الأعمال اللاحقة.

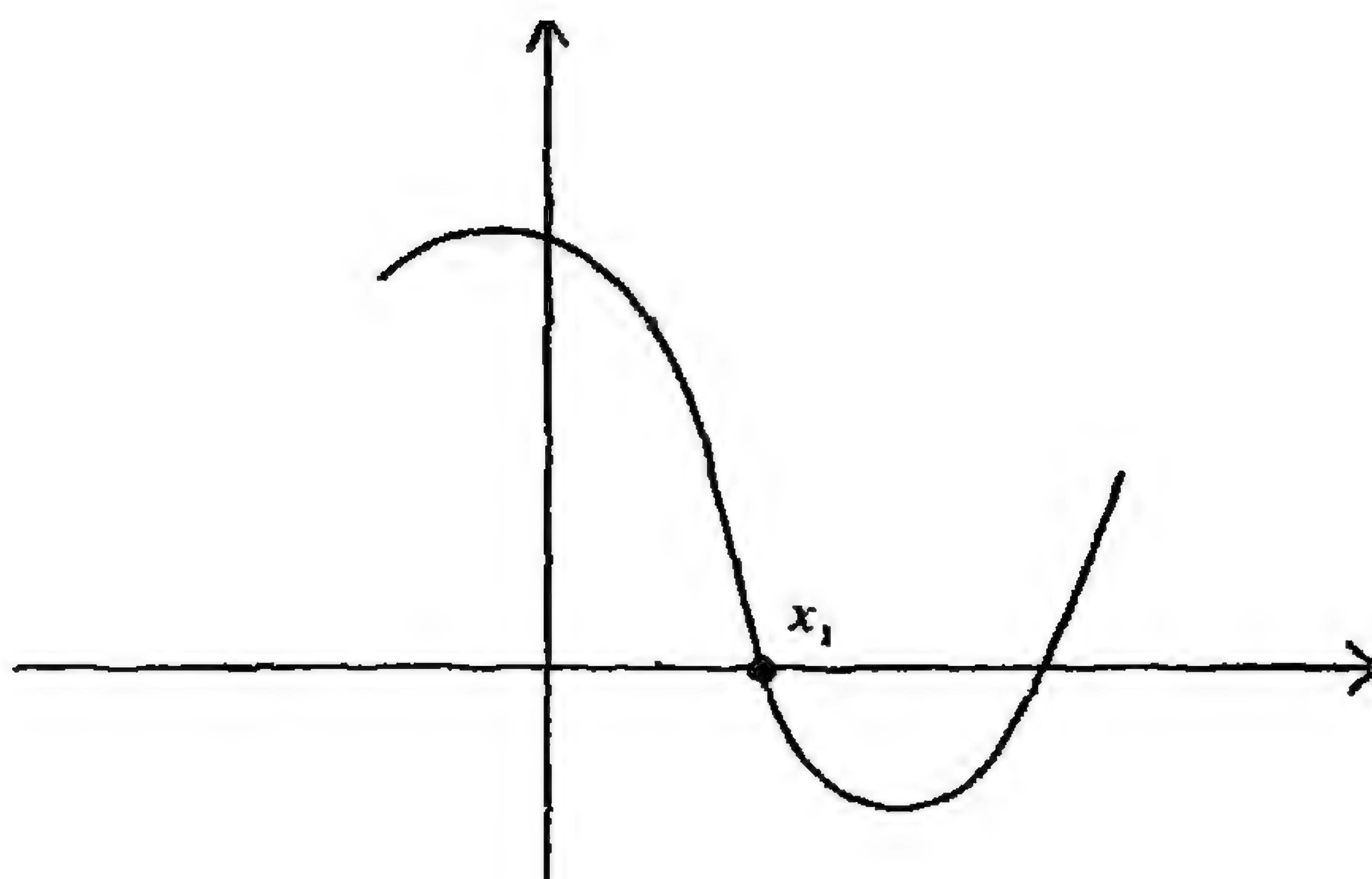
ففي العام ١٨٢٤م ألّف ميرزا علي محمد بن محمد بن حسين الأصفهاني كتاباً بعنوان **تكملة العيون**، كان الهدف منه على ما يبدو، إتمام رسالة **عيون الحساب** لليزدي. وكتاب الأصفهاني هذا هو عبارة عن مخطوطة أصيلة [مخطوطة جامعة طهران رقم ٣٥٥٢]. هذا الكتاب الذي لم يتفحصه أحد حتى الآن، مكرّس للمعادلات الخمس والعشرين من الدرجة الثالثة وما دون ويتكامل بالتالي مع تقليد الخيّام والطوسي. إن عنوانها لا يترك أي مجال للإبهام بشأن المشروع المحرّك لهذا العمل: «في استخراج خمس وعشرين مسألة من المسائل الجبرية خمس منها مشهورة والباقي غير مذكور». لكن التصنيف الذي اعتمده يختلف عن تصنيف الطوسي. فهو لا يعتمد كمعيار، سوى عدد الحدود: فلدينا بالتالي ست معادلات ذات حدّين، اثنتا عشرة ذات ثلاثة حدود، أربع رباعية الحدود ـ طرف من حد مساوٍ لطرف من ثلاثة حدود ـ وأخيراً ثلاث معادلات رباعية الحدود حيث كل طرف من المعادلة يحوي حدين.

ولسنا هنا لنعرض النتائج التي يحويها هذا الكتاب؛ لن نتعرض بشكل أساسي سوى للحل العددي للمعادلات، حيث نجد طرقاً تعود إلى القرون الوسطى وبصورة خاصة إلى طريقة الطوسي. نبدأ بتقديم هذه الطريقة كما يُطبِّقها الأصفهاني في حل المعادلات العددية. إن التحوير الوحيد الملحوظ هو تطبيقه لهذه الطريقة في تحديد القيم التقريبية، ولكي نبيِّن مسعاه بالمقارنة مع مسعى الطوسي، سنحلل أحد أمثلته، مستعينين باللغة التي تبنّيناها عند تحليل نص هذا الأخير.

لنأخذ المعادلة:

$$(E) \qquad f(x) = x^3 - bx + c = 0$$

ذات المعاملات الصحيحة ونأخذ الحالة التي تحوز فيها على جذرين موجبين x_1 و x_2. إن الرسم البياني لِـ $y = f(x)$ هو:



ولنشكّل استقرائياً المعادلات التالية:

$$(E_0) \qquad f_0(x) = f(x) = x^3 + a_0x^2 + b_0x + c_0 \ ; \ (a_0 = 0, \ b_0 = -b, \ c_0 = c)$$

....

$$(E_r) \qquad f_r(x) = f_{r-1}(x + t_r) = x^3 + a_rx^2 + b_rx + c_r \quad (r = 1, \ 2, \ ...)$$

ولنذكر [راجع الفصل الأول] أن جذور (E_r) هي بالضبط جذور (E_{r-1}) بإنقاص t_r من كل منها؛ وبالإمكان القول إنها أيضاً جذور (E_0) بإنقاص $(t_1 + t_2 + ... + t_r)$ من كل منها.

وإذا بدأنا بتطبيق $Tab\ (3;\ t_k;\ a_{k-1},\ b_{k-1},\ c_{k-1})$ حيث $(k = 1,\ 2,\ ...)$، والذي مخارجه هي: $a_k,\ b_k,\ c_k$، نجد:

$$a_k = 3(t_1, + ... + t_k) = T_k \qquad (1)$$

$$b_k = 3T_k^2 - b \ ,$$

$$c_k = T_k^3 - bT_k + c = f(T_k).$$

ويُعطي الأصفهاني طريقة لإيجاد قيمة مقرّبة (بالنقصان) لِـ x_1 على الشكل:

$$T_k = t_1 + t_2 + ... + t_k \ .$$

نشير هنا إلى أنه يأخذ في الاعتبار ضمناً، استمرارية الدالة f_k وتناقص الدالة f في الفترة $[0,\ x_1]$. وتعتمد طريقة الأصفهاني تحديد t_k على الشكل التالي:

[t_{k+1} هي قيمة مقرّبة بالنقصان لِـ $\frac{c_k}{b}$، حيث $(k = 0,\ 1,\ ...)$].

نستطيع، إذاً، أن نبين العلاقة (P_k) التالية، (انظر الشكل البياني):

$$(P_k) \qquad 0 < T_k = t_1 + ... + t_k \leq x_1, \qquad (k = 1,\ 2,\ ...)$$

وهذا يعطي:

$$c_k = f(T_k) \geq f(x_1) = 0 \ .$$

فلدينا

$$x_1^3 - bx_1 + c = 0$$

ومنها

$$0 < x_1^3 = bx_1 - c \ ,$$

التي تعطي

$$x_1 > \frac{c}{b} \geq t_1 \ .$$

فالعلاقة (P_k) هي، إذاً، محققة عند كون $k = 1$. ولنفرض الآن أنها محققة في ما يتعلق بكل عدد صحيح h، $(h \leq k)$، أي أن:

$$x_h = x_1 - T_h \geq 0.$$

بما أن x_k جذرٌ لِـ (E_k) يكون لدينا:

$$f_k(x_k) = x_k^3 + a_k x_k^2 + b_k \ . \ x_k + c_k = 0 \ ,$$

من هنا، وأخذاً في الاعتبار (١) يكون لدينا:

$$0 < x_k^3 + 3T_k^2 x_k^2 + 3T_k x_k = bx_k - c_k \ ,$$

فيكون

$$x_k > \frac{c_k}{b} > t_{k+1} \ ,$$

أي

$$x_1 - t_k > t_{k+1}$$

ويكون

$$x_1 - T_{k+1} > 0 \ .$$

ومما سبق يتبين أن (P_k) محققة بالنسبة إلى أي عدد صحيح k.

وإذا كان القصد مقاربة x_1 بواسطة T_r، فمن الواضح أن متابعة الطريقة، أو إيقافها، يتعلق بـ c_r كما تظهر العلاقة:

$$c_r = f_r(0) = f_{r-1}(t) = ... = f(t_1 + t_2 + ... + t_r) = f(T_r).$$

فإذا كان $c_r = 0$ مثلاً يكون T_r هو الجذر المطلوب؛ وإذا كان c_r قريباً من الصفر بما فيه الكفاية، نستطيع أن نستنتج، استناداً إلى تواصل f، أن T_r هي قيمة مقربة من x (بالنقصان). ويستخدم الأصفهاني عبارة مكافئة:

$$c_r = T_r^3 - T_{r-1}^3 + (c_{r-1} - bt_r) \qquad (٢)$$

صالحة بالنسبة إلى $(r = 1, 2, ...)$ شرط اعتبار $T_0 = 0$. وإذا ما سمينا T_r^3 الكعب من المرتبة r وَ $R_r = (c_{r-1} - bt_r)$ «الباقي» من المرتبة r كما فعل الأصفهاني، فيمكن كتابة (٢) على الشكل التالي:

$c_r =$ الكعب من المرتبة r ناقص الكعب من المرتبة $(r-1)$ زائد الباقي من المرتبة r.

ويجد الأصفهاني الباقي من المرتبة r بواسطة القسمة بكل بساطة. ولشرح كيفية احتسابه لِـ $T_r^3 = (t_1 + t_2 + ... + t_r)^3$، حيث $(r = 1, 2, ...)$، نفرض أن:

$$T_r = t_1 + ... + t_r = a_0 10^m + ... + a_m + \gamma_1 10^{-1} + ... + \gamma_h 10^{-h}$$

ونضع

$$a_k 10^{m-k} = s_k$$

$$\sum_{-1} = 0,\ \sum_k = s_0 + ... +\ s_k\ ;\ (k = 0, 1, ..., m)$$

$$\Gamma_0 = \sum_m;\ \Gamma_j = 10^j \sum_m + 10^{j-1}\gamma_1 + ... + \gamma_j \quad (j = 1, 2, ..., k).$$

إن الأصفهاني يُطبق أولاً:

$$Tab\ (3;\ s_k;\ 3\sum_{k-1},\ 3\sum_{k-1}^2,\ \sum_{k-1}^3)$$

حيث $k = 0, 1, ..., m$

$$(k.1) \qquad 3\sum_{k-1} \qquad\qquad 3\sum_{k-1}^2 \qquad\qquad \sum_{k-1}^3$$

$$\begin{matrix}(k.2)\\(k.3)\end{matrix} \quad \frac{s_k}{3\sum_{k-1} + s_k} \qquad \frac{(3\sum_{k-1} + s_k)s_k}{3\sum_{k-1}^2 + (3\sum_{k-1} + s_k)s_k} \qquad \frac{\{3\sum_{k-1}^2 + (3\sum_{k-1} + s_k)s_k\}s_k}{\sum_{k-1}^3 + \{3\sum_{k-1}^2 + (3\sum_{k-1} + s_k)s_k\}s_k} = \sum_k^3$$

$$\begin{matrix}(k.4)\\(k.5)\end{matrix} \quad \frac{s_k}{3\sum_{k-1} + 2s_k} \qquad\qquad \frac{(3\sum_{K-1} + 2s_k)s_k}{3\sum_{k-1}^2 + (6\sum_{k-1} + 3s_k)s_k} = 3\sum_k^2$$

$$\begin{matrix}(k.6)\\(k.7)\end{matrix} \quad \frac{s_k}{3\sum_{k-1} + 3s_k} = 3\sum_k$$

ومن ثم يُطبق $Tab\ (3;\ \gamma_j;\ 10\Gamma_{j-1},\ 3(10\Gamma_{j-1})^2,\ (10\Gamma_{j-1})^3)$, حيث $j = 1, 2, ..., h$.

$(j,1)'$	$3(10\Gamma_{j-1})$	$3(10\Gamma_{j-1})^2$	$(10\Gamma_{j-1})^3$
$(j,2)'$ $(j,3)'$	$\frac{\gamma_j}{3 \times 10\Gamma_{j-1} + \gamma_j}$	$\frac{(3 \times 10\Gamma_{j-1} + \gamma_j)}{3(10\Gamma_{j-1})^2 + (3 \times 10\Gamma_{j-1} + \gamma_j)\gamma_j}$	$\frac{\{3(10\Gamma_{j-1})^2 + (3 \times 10\Gamma_{j-1} + \gamma_j)\gamma_j\}\gamma_j}{(10\Gamma_{j-1})^3 + \{3(10\Gamma_{j-1})^2 + (3 \times 10\Gamma_{j-1} + \gamma_j)\gamma_j\}\gamma_j} = \Gamma_j^3$
$(j,4)'$ $(j,5)'$	$\frac{\gamma_j}{3 \times 10\Gamma_{j-1} + 2\gamma_j}$	$\frac{(3 \times 10\Gamma_{j-1} + 2\gamma_j)\gamma_j}{3(10\Gamma_{j-1})^2 + (6 + 10\Gamma_{j-1} + 3\gamma_j)\gamma_j} = 3\Gamma_j^2$	
$(j,6)'$ $(j,7)'$	$\frac{\gamma_j}{3 \times 10\Gamma_{j-1} + 3\gamma_j} = 3\Gamma_j$		

إن تكرار هذا المخطط يعطي في الكرّة الـ h مخرجاً هو:

$$\Gamma_h^3 = [10^h(s_0 + ... + s_m + \gamma_1 10^{-1} + ... + \gamma_h\ .\ 10^{-h})]^3 = (10^h T_r^3),$$

مما يعطي $(T_r)^3$، بواسطة إزاحة بسيطة. وهذا يسمح باحتساب c_r، استناداً إلى أن احتساب c_{r-1} قد حصل.

إن التحليل السابق يبيّن أن الطريقة المتبعة هي طريقة الطوسي. كما يُظهر أن التوسيع الذي قدمه الأصفهاني لهذه الطريقة يتناول الظاهر أكثر مما يطال الجوهر. يبقى أن الأصفهاني أدخل بعض التحويرات اللغوية التي تعود إلى تقليد الجبريين الحسابيين مثل الكاشي عند استتصال الجذر النوني لعددٍ صحيح. فجرياً على هذا التقليد، نجد أنه سمّى العمود الأول من اللوحة «عمود الضلع»، والعمود الثاني «عمود المربّع»، والثالث «عمود الكعب». نشير أخيراً إلى أن الأصفهاني، عند بنائه للّوحات، كان يُهمل السطور البديهية (المبتذلة). وإنهاءً لهذه النقطة، نأخذ مثلاً من أمثلة الأصفهاني:

$$b = 144000 \quad , \quad c = 661\ 4136$$

القسم الأول

$$c = t_1 . b + R_1 = 45 \times 144000 + 134136$$

(0.3.3) = (1.1.3)	6 4 0 0 0
(1.2.3)	2 7 1 2 5
(1.3.3)	9 1 1 2 5 = t_1^3
(0.3.2)	1 6 0 0
(0.4.2)	3 2 0 0
(0.5.2) = (1.1.2)	4 8 0 0
(1.2.2)	6 2 5
(1.3.2)	5 4 2 5
(0.3.1)	4 0
(0.5.1)	8 0
(0.7.1) = (1.1.1)	1 2 0
(1.3.1)	1 2 5

$T_1^3 = t_1^3$	=	91125
R_1	=	134134
c_1	=	225259

$$T_2^3 = 100544{,}625$$
$$T_1^3 = 91125$$
$$T_2^3 - T_1^3 = 9419{,}625$$
$$R_2 = 9261$$
$$c_2^2 = 18680{,}625$$

$$c_1 = t_2 b + R_2 = 1{,}5 \times 144000 + 9261$$
$$t_1 + t_2 = 45 + 1{,}5 = 46{,}5$$

(0.3.3) = (1.1.3)	6 4 0 0 0
(1.2.3)	3 3 3 3 6
(1.3.3)	9 7 3 3 6
(1.1.3)'	9 7 3 3 6 0 0 0
(1.2.3)'	3 2 0 8 6 2 5
(1.3.3)'	1 0 0 5 4 4 6 2 5 = $(10T_2)^3$
(0.3.2)	1 6 0 0
(0.4.2)	3 2 0 0
(0.5.2) = (1.1.2)	4 8 0 0
(1.2.2)	7 5 6
(1.3.2)	5 5 5 6
(1.4.2)	7 9 2
(1.5.2)	6 3 4 8
(1.1.2)'	6 3 4 8 0 0
(1.2.2)'	6 9 2 5
(1.3.2)'	6 4 1 7 2 5
(0.3.1)	4 0
(0.5.1)	8 0
(0.7.1)	1 2 0
(1.3.1)	1 2 6
(1.4.1)	6
(1.5.1)	1 3 2
(1.6.1)	6
(1.7.1)	1 3 8
(2.3.1)'	1 3 8 5

$T_3^3 = 101325{,}045528$
$T_2^3 = 100544{,}625$
$T_3^3 - T_2^3 = 780{,}420528$
$R_3 = 1400{,}625$
$c_3 = 2181{,}045528$

(0.3.3) = (1.1.3)	6 4 0 0 0
(1.2.3)	3 3 3 3 6
(1.3.3)	9 7 3 3 6
(1.3.3)'	9 7 3 3 6 0 0 0
(1.2.3)'	3 8 5 8 6 9 6
(1.3.3)'	1 0 1 1 9 4 6 9 6
(2.1.3)'	1 0 1 1 9 4 6 9 6 0 0 0
(2.2.3)'	1 3 0 3 4 9 5 2 8
(2.3.3)'	1 0 1 3 2 5 0 4 5 5 2 8 $= (10^2 T_3)^3$
(0.3.2)	1 6 0 0
(0.4.2)	3 2 0 0
(0.5.2) = (1.1.2)	4 8 0 0
(1.2.2)	7 5 6
(1.3.2)	5 5 5 6
(1.4.2)	7 9 2
(1.5.2)	6 3 4 8
(1.1.2)'	6 3 4 8 0 0
(1.2.2)'	8 3 1 6
(1.3.2)'	6 4 3 1 1 6
(1.4.2)'	8 3 5 2
(1.5.2)'	6 5 1 4 6 8
(2.1.2)'	6 5 1 4 6 8 0 0
(2.2.2)'	2 7 9 6 4
(2.3.2)'	6 5 1 7 4 7 6 4
(0.3.1)	4 0
(0.5.1)	8 0
(0.7.1)	1 2 0
(1.3.1)	1 2 6
(1.5.1)	1 3 2
(1.7.1)	1 3 8
(1.3.1)'	1 3 8 6
(1.5.1)'	1 3 9 2
(1.7.1)'	1 3 9 8
(2.3.1)'	1 3 9 8 2

$t_1+t_2+t_3+t_4 = 46{,}62+0{,}015$
$= 46{,}635$

$c_3 = t_4 \times b + R_4 = 2181{,}045528$
$= 0{,}015 \times 144000 + 21{,}045528,$

(0.0.3) = (1.1.3)	64000
(1.2.3)	33336
(1.3.3)	97336
(2.1.3)'	97336000
(2.2.3)'	3858696
(2.3.3)'	101194696
(3.1.3)'	101194696000
(3.2.3)'	195566247
(3.3.3)'	101390262247
(4.1.3)'	101390262247000
(4.2.3)'	3261885087 5
(4.3.3)'	101422881097875 = $(10^3 T_4)^3$
(0.3.2)	1600
(0.4.2)	3200
(0.5.2) = (1.1.2)	4800
(1.2.2)	756
(1.3.2)	5556
(1.4.2)	792
(1.5.2)	6348
(1.1.2)'	634800
(1.2.2)'	8316
(1.3.2)'	643116
(1.4.2)'	8352
(1.5.2)'	651468
(2.1.2)'	65146800
(2.2.2)'	41949
(2.3.2)'	65188749
(2.4.2)'	41958
(2.5.2)'	65230707
(3.1.2)'	6523070700
(3.2.2)'	699475
(3.3.2)'	6523770175
(0.1.1)	40
(1.3.1)	126
(1.4.1)	6
(1.5.1)	132
(1.6.1)	6
(1.7.1)	138
(1.3.1)'	1386
(1.4.1)'	6
(1.5.1)'	1392
(1.6.1)'	6
(1.7.1)'	1398
(2.3.1)'	13983
(2.4.1)'	3
(2.5.1)'	13986
(2.6.1)'	3
(2.7.1)'	13989
(3.3.1)'	139895

[3.6] نذكّر بأن «الضلع القائم» للقطع المكافئ هو ضعف وسيطه[٥]، هكذا انتقل إلى العربية التعبير اليوناني «ὀρθία» (وضمناً «πλευρά»). نسجّل بأن مصطلحات الطوسي في هذا الجزء التمهيدي هي عينها مصطلحات ترجمة كتاب **المخروطات** لأبولونيوس التي درج الرياضيون على تبنّيها قبل الطوسي بزمن طويل.

[3.15] «قطع مكافىء»: المقصود في الواقع هو نصف القطع المكافىء. ولقد كان هذا الاستعمال مهيمناً في ذلك العصر. لذلك لن نعود إلى الإشارة إليه في ما بعد.

[4.5] «فهو عمود على قطر القاعدة». ليكن $\mathscr{P}$ سطح القطع. السطحان $\mathscr{P}$ و(ABC) متعامدين حسب المعطيات ويلتقيان على الخط EF. فمطلق خط مرسوم في $\mathscr{P}$ عمودياً على EF هو عمود على (ABC). يكون GF إذن في قاعدة المخروط ويكون بالتالي عموداً على BC.

[8.3] كانت هذه القضية محطّ اهتمام الرياضيين منذ ترجمة **المخروطات**. كما أنها شغلت الفلاسفة السابقين للطوسي. ففي **المخروطات**، 2.14، نقرأ:

Αἱ ἀσύμπτωτοι καὶ ἡ τομὴ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι ἔγγιόν τε προσάγουσιν ἑαυταῖς καὶ παντὸς τοῦ δοθέντος διαστήματος εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα

وهو ما نقله المترجم العربي كما يلي:

«الخطان اللذان لا يقعان على القطع وخط القطع ـ إذا أخرجت ـ فإنها كلما بعدت من الزاوية التي يحيط بها الخطان قرب الخطان من القطع. وإن فرض مقدار ما فسيوجد مقدار آخر فيما بين القطع وكل واحد من الخطين أقل منه».

يعود الطوسي إلى هذه «القضية» مرتين: هنا وفي «الكتيب» الذي كرّسه لها. لكن، قبله بمدة لا بأس بها، كتب في ما خصّ هذا الموضوع ثلاثة من الرياضيين رسائل سنحققها وندرسها في مكان آخر. وهؤلاء الرياضيون هم: السِّجزي، القمّي وابن الهيثم. وفي كل حال لم يكن هؤلاء الرياضيون الوحيدين الذين عالجوا هذه المسألة. فقد حقق مارشال كلاغيت (M. Clagett) في مؤلفه الضخم: *Archimedes in the Middle Ages* ترجمة لاتينية لمذكرة عربية لم يتم إيجادها حتى الآن تحت عنوان «Tractatus de duabus lineis semper approximantibus sibi invicem et numquam concurrentibus» قام بها جان دو باليرم (Jean de Palerm). ومن دون أن ندخل في وصف وتحليل مختلف المذكرات هذه، نسجل فقط أن مقارنتها مع نص الطوسي تظهر أن هذا النص لم يكن أعمق منها ولا أشمل. وهنا، كما في «الكتيب» يجيب الطوسي عن السؤال المطروح

---

(٥) الوسيط هو البارامتر، أي p في المعادلة $y^2 = 2px$ (المترجم).

أمامه بالتحديد وهو: دراسة معادلة المنحني ـ القطع الزائد ـ في نظام متحاور آخر، بهدف استخدامها لاحقاً عند بناء جذور المعادلات.

[14.7] نستطيع مقارنة هذه المسألة بالقضية 2.4 من كتاب **المخروطات** يتخذ الطوسي هنا، خلافاً لأبولونيوس، زاوية قائمة BAC ونقطة D، أقرب إلى AB.

[15.11 وما يليها] «الواحد الخطي»، «الواحد السطحي»، «الواحد الجسمي»؛ «الجذر الخطي»، «الجذر السطحي»، «الجذر الجسمي»؛ «المربع (المال) السطحي»، «المال المجسّم»؛ هذه المصطلحات التي أعدها وحددها الطوسي تستجيب لهدفين مترابطين = إسناد المعادلات إلى قاعدة هندسية متينة من جهة؛ وتأمين التجانس الذي يقتضيه هذا الإسناد من جهة أخرى. ومن المعروف أن قاعدة التجانس أو الـ lex homogeneorum كما كتب ڤييت (Viète) ترتبط مباشرة ـ تاريخياً ومنطقياً ـ بمجمل عمل ترجمة المعطيات الجبرية إلى البنى الهندسية. لذلك فليس من المستغرب أو المفاجىء عدم مصادفة شيء من هذا القبيل في رسائل ومذكرات الجبر الحسابي مثل أعمال الكرجي ومن أتى بعده. إن فكرة إجراء حسابات على قِطَع من خطٍ مستقيم، اختيرت عليه وحدة قياسية، هي فكرة نصادفها للمرة الأولى في أعمال الخيّام، حيث نجد معها في الوقت نفسه فكرة مراعاة التجانس بين طرفي المعادلة. ابتداءً من هنا، كان على هذين الطرفين أن يحافظا على البعد نفسه [انظر بخاصة عمر الخيّام، **رسائل الخيام الجبرية**، حققها وترجمها وقدم لها رشدي راشد وأحمد جبار، مصادر ودراسات في تاريخ الرياضيات العربية؛ ٣ (حلب: معهد التراث العلمي العربي، ١٩٨١)، ص ٥؛ ١٠ ـ ١١؛ ٢٧ و ٨٧ ـ ٨٩]. والواقع أن الخيّام أعطى في هذا المجال صياغة عامة من دون أن يجهد نفسه في إبراز المفاهيم الضرورية، لكن الطوسي هو الذي تولى هذه المهمة. فالمعادلة بالنسبة إلى الطوسي مساواة بين طرفين تكون الحدود في أي منهما من البعد نفسه. فمعادلة من الشكل:

$$x^3 + ax = b$$

هي مساواة بين مجسّمين في طرف، ومجسّم (واحد) في طرف آخر. و a بالنسبة إليه، هي مساحة منسوبة إلى الوحدة السطحية؛ أما b فهو حجم منسوب إلى الوحدة الجسمية. نذكر أخيراً أنه، وإن احترم قانون التجانس في بداية رسالته، إلا أنه غالباً ما ينسى هذا القانون في ما بعد. ولئن تقدّم التجانس عند الطوسي كأساس انطلق منه في بناء نظرية المعادلات، فإن افتقاده في الكتاب كان يتزايد باستمرار، بقدر ما كانت تتطوّر دراسة الخصائص الموضعية.

[17.15] يستطيع الطوسي، بفضل المفاهيم التي سبق أن أدخلها، أن يشرع في مثل هذا النقاش مفسّراً عبارة الخيّام المقتضبة: «فيكون الجذر معلوماً باضطرار وحكمها في العدد والمساحات واحد» [المصدر نفسه، ص ٩].

[18.8] سنقدِّم، في ما خص هذه المسألة وما سيليها، ملاحظات مشابهة للملاحظة السابقة. نذكر أيضاً بأن الطوسي يفترض في القارئ دراية باستخراج الجذر التربيعي - وفي ما بعد، باستخراج الجذر التكعيبي - بواسطة طريقة روفيني - هورنر (انظر الفصل الأول). وهنا، كما في المسائل اللاحقة، نستطيع مقارنة نص الطوسي بدراسة الخيّام. وتفادياً لإثقال هذه الملاحظات الإضافية، ولأسباب بديهية أخرى، منها خاصة، الأسبقية التاريخية، اخترنا أن نحقق أولاً عمل الخيّام الجبري، بحيث أصبح من الممكن إرجاع القارئ إليه.

[22, 1 - 2] إن مسألة إدخال متوسّطين هي إحدى المسائل التي ورثها العرب عن الذين سبقوهم من الرياضيين الإغريق. وفي هذه الحالة، كما في جميع المسائل المجسمة يجدر التفريق بوضوح بين البناء الهندسي للمسألة وبين ترجمتها الجبرية؛ هذا ما سبق أن كتبناه غير مرة. فهذان الفعلان اللذان لا ينتميان للعصر نفسه لا ينتميان أيضاً إلى الرياضيات نفسها. ولقد جاء الحل الجبري، متأخراً ما يقرب من أربعة عشر قرناً، لا يرمي إلى حل هذه المسألة لذاتها بقدر ما يقصد حلها من أجل استخدامها كمقدمة أساسية من مقدمات حل المعادلات التكعيبية. ولقد شكّل عدم التفريق بين هذين المسعيين خطأً في الرؤية وقع فيه الكثيرون، موحياً بأن الرياضيين قبل القرن العاشر كانوا يرون في هذه المسألة معادلة جبرية.

ولقد كتب تاريخ البناء الهندسي للمسائل المجسمة في الرياضيات اليونانية مرّات عديدة. [انظر مثلاً: Th. Heath, *A History of Greek Mathematics* (Oxford: [n.pb.], 1921), vol. 1, pp. 244 sqq; أو Oskar Becker, *Das mathematische Denken der Antike* Studienhefte zur Altertumswissenchaft; Heft 3 (Göttingen: Vandenhock V. Ruprecht, 1966), pp. 75 sqq] فمن غير المجدي إيجاز موضوع سبق أن فصّله العديد من المؤرخين. لكننا لا بد من أن نذكر بالمراحل الأساسية:

تتخذ المسألة في البداية الشكل البسيط لمسألة مضاعفة الكعب [انظر Archimède, *Commentaires d'Entocius,* éd. Ch. Mugler (Paris: Les Belles lettres, 1972), t. IV, pp. 64 sqq]. وهي مسألة بناء مكعب يكون حجمه ضعف مكعب معطى. وينسب إلى أبيقراط الكيوسي (نسبة إلى مدينة كيوس (Chio)) أنه حوّل هذه المسألة إلى مسألة إدخال متوسطين بين طولين مُعطَيين. إن هذا الإدخال يصبح في لغة الجبر المتأخرة التالي: إذا كان a و $2a$ الطولان المعطيان وكان x و y المتوسطان بينهما، يكون:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{x}=\frac{2a}{y}$$

فيكون $x^3 = 2a^3$.

كان أول تعميم - إذا صح التعبير - لهذه المسألة هو التعامل مع مقدارين a و b أياً كانا بدل التعامل مع a و $2a$.

وكان الحل الأبسط لهذه المسألة هو الحل الذي نسبه أوطوقيوس إلى أفلاطون. وهو حل تفرعت منه حلول عدة. وقد كانت هناك حلول أخرى، منسوبة إلى إيراتوستين ومينيشم وديوقليس استخدمت قطوعاً مخروطية. كما وجدت حلول أخرى مثل حل أرشيتاس، استخدمت أسطوانة ومخروطاً وقولباً طوقياً (طارة (tore)).

وقد عاود الرياضيون دراسة هذه المسألة ابتداء من القرن التاسع. فقد اعتمد ثابت بن قرة (المتوفى سنة ٩٠١م) في حلّه على تقاطع دائرة مع قطع زائد، وتبعه في ذلك رياضيون آخرون كالخازن والقوهي. إلا أن تعميم المسألة لم يتأخر. فمن مؤلفات كتّاب السير كالقفطي [انظر: أبو الحسن علي بن يوسف القفطي، **تاريخ الحكماء، وهو مختصر الزوزني المسمى بالمنتخبات الملتقطات من كتاب إخبار العلماء بأخبار الحكماء**، تحقيق يوليوس ليبرت (ليبتزج: [ديتريخ]، ١٩٠٣)، ص ١٦٨] وابن أبي أصيبعة [انظر: أبو العباس أحمد بن أبي أصيبعة، **عيون الأنباء في طبقات الأطباء**، شرح وتحقيق نزار رضا (بيروت: دار مكتبة الحياة، ١٩٦٥)، ص ٥٥٩]. نعرف أن ابن الهيثم [المتوفى سنة ١٠٤٠م] ألّف رسالة بشأن «إيراد أربعة خطوط بين خطين لتتوالى الستة على نسبة واحدة». وهذا ما أكّده الخيّام في القرن الحادي عشر للميلاد عندما كتب في مؤلفه الجبري، بخصوص المعادلة [$x^5 = a$]، «فيحتاج إلى المقدمة المذكورة ولا يمكن استخراجها بطرقنا» [الخيّام، **رسائل الخيام الجبرية**، ص ٦٥].

فلنأخذ إذن العلاقة:

$$\frac{\alpha}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{u}=\frac{u}{\beta}$$

التي نحصل منها على $y^5 = \alpha^3\beta^2$. وإذا استخدمنا التقنية نفسها فسنعتمد تقاطع المنحنيين:

$$yz = \alpha\beta$$

$$y^3 = \alpha z^2$$

ويعود الأمر هنا، كما نرى، إلى تقاطع قطع مخروطي مع منحنٍ تكعيبي - وليس إلى تقاطع قطعين مخروطيين - وهذا ما قد يوحي بأن ابن الهيثم كان يحوز على طريقة تشبه طريقة فيرما في مؤلفه *Dissertatio Tripartita*.

ونحن، وإن لفتنا الانتباه إلى مساهمة ابن الهيثم [انظر: الخيّام، المصدر نفسه، ص ٦٦]، فإننا نبرهن هنا بأن التعميم الحقيقي لهذه المسألة لم يحصل، على ما يبدو، قبل القرن الحادي عشر للميلاد. ومن المحتمل أن يكون هذا التعميم من عمل أحد رياضيي الأندلس: عبد الرحمن بن سيّد. ففي كتيب خصصه لأعمال هذا الرياضي في نظرية المخروطات يذكر الفيلسوف ابن باجة، أنه استخدم تقاطع مساحة غير مسطحة مع

مساحة مخروطية. وذلك يعني أن ابن سيد قد عمل، بشكل عام، على منحنيات منحرفة[٦]. ومن بين ما ينسبه ابن باجة بالذات إلى ابن سيّد، طريقة يمكن بها استخراج «كم خطأ يشاء، بين خطين تتوالى على نسبة واحدة، وبهذا السبيل قسم الزاوية بأي نسبة عددية شاء» [انظر: أبو بكر محمد بن يحيى بن باجة، **رسائل فلسفية لأبي بكر بن باجة: نصوص فلسفية غير منشورة**، [تحقيق] جمال الدين العلوي (بيروت: دار الثقافة، ١٩٨٣)، ص ٨٦]. إن النص المذكور صعب وذو أسلوب إضماري موجز. إنه يتطلب تعمقاً بالمواضيع التي يطرحها قبل تحقيقه بشكل نهائي وصائب، أضف إلى ذلك أن أعمال ابن سيد لا تزال مفقودة حتى الآن.

---

(٦) Gauche. (المترجم).

القسم الثاني

الفصل الثالث

نقل وتعليق رياضي
(المعادلات ٢١ ـ ٢٥)

تكرّس القسم الأول من «الرسالة» لِـ:

- بناء الجذور الحقيقية الموجبة لمعادلات الدرجة الثالثة وما دون، بواسطة منحنيات جبرية مختارة؛

- حل عددي لهذه المعادلات؛

- تبرير خوارزمية الحل العددي.

تلك هي العناصر المكونة لنظرية المعادلات التي أعاد الطوسي صياغتها ضمن التقليد الخيّامي.

ولقد أردنا في المقدمة تشخيص الأسباب التي دعت الطوسي إلى التحوّل في رياضياته، مفجّراً وحدة «الرسالة». فلقد سيق، في الواقع، إلى طرح مسألة تفريق الجذور، وبالتالي مسألة حدودها. وهذا ما حصل ابتداءً من المعادلة ٢١ وحتى نهاية «الرسالة»، أي فيما يتعلّق بتلك المعادلات التي يمكن ألا تحوز على حلول موجبة. إن حل هذه المشكلة هو الذي قاد رياضيّي القرن الثاني عشر هذا إلى اكتشاف النهج الموضعي والتحليلي وإلى إحداث شرخ ضمن الرسالة في المفهوم وفي الأسلوب، وهذا ما خوّلنا تقسيمها إلى جزأين. أما تعليقنا على القسم الثاني فسيعتمد الطريقة نفسها التي اتبعناها بالنسبة إلى القسم الأول.

معادلات الدرجة الثالثة II

المعادلة ٢١: $x^3 + c = ax^2$

لنأخذ $AB = a$؛ بما أن $(x.x^2 = x^3)$ وَ $(ax^2 = x^3 + c)$، فإن $a > x$؛ لكن

$(ax^2 - x^3 = c)$، لذلك فمن الضروري أن يُكتب a على الشكل:

$$a = x + (a - x) \, ,$$

مع كون

$$x^2 \, . \, (a - x) = c \, .$$

ليكن $AC = \frac{AB}{3}$، ولتكن D وَ E نقطتين على AB. فمهما كانت وضعية النقطة D بين A و C ووضعية النقطة E بين B وَ C، (الشكلان رقما (٣ ـ ١) و (٣ ـ ٢))، يكون لدينا:

$$BC^2 \, . \, AC > BD^2 \, . \, DA \, ,$$

وَ

$$BC^2 \, . \, AC > BE^2 \, . \, EA \, .$$

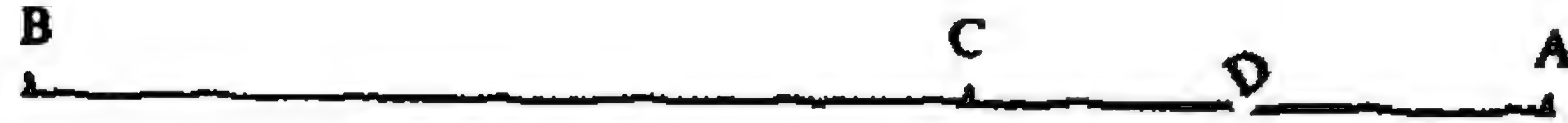


الشكل رقم (٣ ـ ١)



الشكل رقم (٣ ـ ٢)

دراسة النهاية العظمى (انظر الشكل رقم (٣ ـ ٣)):



الشكل رقم (٣ ـ ٣)

لنبرهن أولاً أن

$$BC^2 \, . \, AC > BD^2 \, . \, AD \, .$$

لدينا

$$BC^2 \, . \, AC = BC^2 \, . \, AD + BC^2 \, . \, DC \, ,$$

وكذلك

$$BD^2 . AD = BC^2 . AD + (BD^2 - BC^2) . AD ;$$

فإذا ألقينا $BC^2 . AD$ من كل من $BC^2 . AC$ و $BD^2 . AD$، يبقى علينا مقارنة $BC^2 . DC$ مع $(BD^2 - BC^2) . AD$. ولكن

$$(BD^2 - BC^2) . AD = (DB + BC)CD . AD ,$$

كما أن

$$BC^2 = 2BC . AC = 2BC . AD + 2BC . DC ,$$

وَ

$$(DB + BC) . AD = 2BC . AD + DC . AD .$$

وبعد التبسيط لا يبقى سوى مقارنة $DC.AD$ وَ $2BC . DC$؛

لكن

$$BC > AC ,$$

فيكون لدينا

$$BC > AD ,$$

ومنها

$$2BC . DC > DC . AD$$

فيكون

$$2BC . CA = 2BC . DC + 2BC . AD$$

وَ

$$2BC . CA > DC . AD + 2BC . AD = (DB + BC) . AD,$$

فيكون

$$BC^2 > (DB + BC)AD,$$

وبالتالي

$$\frac{DB + BC}{BC} < \frac{BC}{AD} ,$$

فيكون

$$\frac{DC(DB + BC)}{BC^2} < \frac{DC}{AD} ,$$

لكن

$$DC(DB+BC)=BD^2-BC^2\ ,$$

فيكون

$$AD(BD^2-BC^2)<BC^2\ .\ DC\ ;$$

فإذا أضفنا $AD\ .\ BC^2$ إلى كل من الطرفين يحصل لدينا:

$$BD^2\ .\ AD<BC^2\ .\ AC.$$

ولنبرهن الآن أن:

$$BC^2\ .\ AC>BE^2\ .\ AE.$$ ((الشكل رقم (٣ ـ ٤))



الشكل رقم (٣ ـ ٤)

بما أن

$$BC^2\ .\ AC=BE^2\ .\ AC+(CB+BE)\ .\ EC\ .\ AC,$$

وَ

$$BE^2\ .\ AE=BE^2\ .\ CE+BE^2\ .\ AC,$$

لذلك يبقى علينا مقارنة $BE^2\ .\ CE$ مع $(BC+BE)EC\ .\ AC$.

وطالما أن

$$BC^2=2AC\ .\ BC,$$

وَ

$$2BC\ .\ AC-(CB+BE)\ .\ AC=EC\ .\ AC,$$

وَ

$$(CB+BE)\ .\ CE>AC\ .\ EC,$$

لأن

$$CB+BE>AC,$$

يحصل لدينا إذن:

$$BC^2-BE^2>BC^2-(CB+BE)AC,$$

ومنها

$$\frac{CB+BE}{BE} > \frac{BE}{AC}$$

وَ

$$\frac{CE}{BE} \cdot \frac{CB+BE}{BE} > \frac{CE}{BE} \cdot \frac{BE}{AC}$$

فيكون

$$(CB+BE) \cdot CE \cdot AC > CE \cdot BE^2$$

وَ

$$(CB+BE) \cdot CE \cdot AC + BE^2 \cdot AC > CE \cdot BE^2 + BE^2 \cdot AC$$

ومنها

$$CB^2 \cdot AC > BE^2 \cdot AE.$$

هكذا نكون قد برهنا أن $\frac{a}{3} \cdot \left(\frac{2a}{3}\right)^2 = BC^2 \cdot AC$ هي النهاية العظمى لحاصل الضرب $AM \cdot BM^2$ حيث M هي أية نقطة موجودة بين A وَ B، أي النهاية العظمى لِـ $(a-x) \cdot x^2$، حيث $(0 < x < a)$. لذلك نستطيع القول انه:

- إذا كان $c > \frac{4a^3}{27}$، تكون المسألة مستحيلة؛

- وإذا كان لدينا $c = \frac{4a^3}{27}$ يكون للمسألة حلّ هو $BC = \frac{2a}{3} = x$، لأن

$$BC^2 \cdot BC = x^3,$$

وَ

$$BC^2 = x^2,$$

وَ

$$BC^2 \cdot AB = ax^2 = BC^3 + BC^2 \cdot AC = x^3 + c,$$

وبالتالي

$$ax^2 = x^3 + c.$$

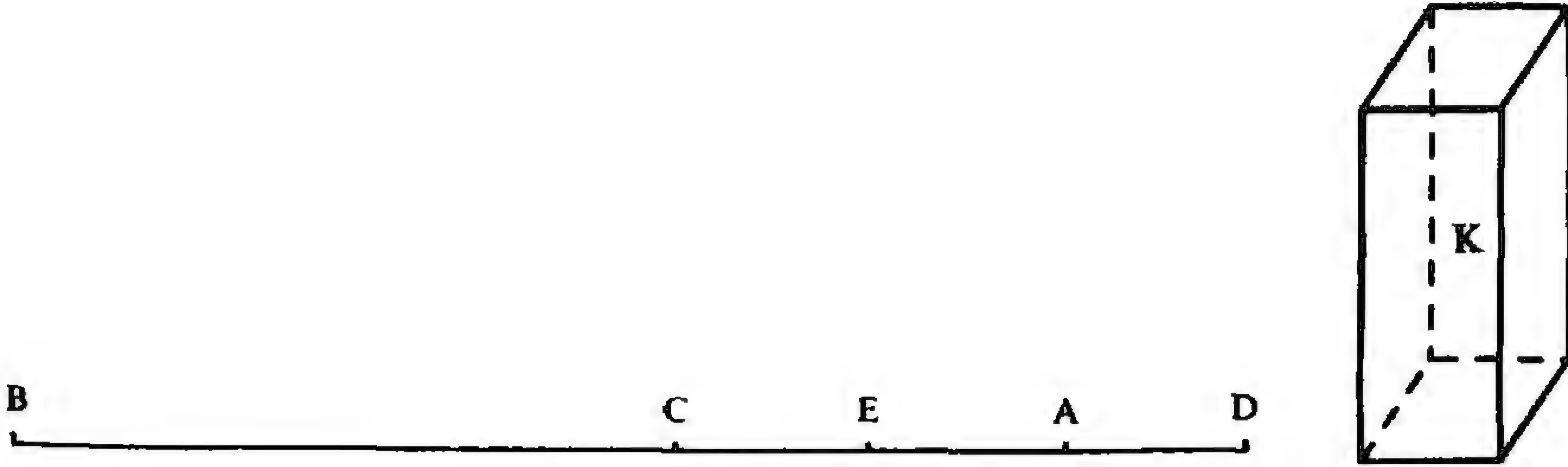
وهذا الحل هو الوحيد ولا توجد أي نقطة أخرى C' على AB تحقق:

$$BC'^2 \cdot AC' = c.$$

ـ وإذا كان $c < \frac{4a^3}{27}$ يكون للمعادلة حلّان x_1 و x_2 يحققان:

$$0 < x_1 < \frac{2a}{3} \quad \text{وَ} \quad \frac{2a}{3} < x_2 < a.$$

تحديد الجذر الأكبر: $x_2 = BE$ (انظر الشكل رقم (٣ ـ ٥)):



الشكل رقم (٣ ـ ٥)

لنأخذ $AB = a$، $BC = \frac{2a}{3}$، $AC = \frac{a}{3}$ حيث $c < \frac{4a^3}{27}$. ولنأخذ $K = \frac{4a^3}{27} - c$
ولتكن D نقطة على AB بحيث يكون:

$$AD^3 + a.AD^2 = K \qquad \text{(المعادلة ١٥)،}$$

ولنأخذ $CE = AD$؛ فيكون $BE = BC + AD$ ويكون:

$$BE^2 \,.\, AE = c.$$

فلدينا:

$$BC^2 \,.\, AC = BC^2 \,.\, AE + BC^2 \,.\, CE = BC^2 \,.\, AE + 2BC \,.\, AC \,.\, CE,$$
$$= BC^2 \,.\, AE \,.\, (2BC.AE + 2BC \,.\, EC) \,.\, CE,$$
$$= BC^2 \,.\, AE + 2BC \,.\, AE \,.\, CE + 2BC \,.\, CE^2,$$

لكن

$$2BC \,.\, CE^2 = (BC + CA + CE + EA) \,.\, CE^2,$$
$$= AB \,.\, CE^2 + EA \,.\, CE^2 + CE^3,$$

وبالتالي

$$BC^2 \,.\, AC = BC^2 \,.\, AE + 2BC \,.\, CE \,.\, AE + CE^2 \,.\, AB + CE^2 \,.\, AE + CE^3,$$

لكن

$$BE^2 \,.\, AE = 2BC \,.\, CE \,.\, AE + BC^2 \,.\, AE + CE^2 \,.\, AE,$$

فيكون

$$BC^2 . AC = BE^2 . AE + CE^2 . AB + CE^3$$
$$= BE^2 . AE + AD^2 . AB + AD^3$$
$$= BE^2 . AE + AD^2 . DB;$$

لكن

$$AD^2 . DB = AD^3 + a . AD^2 = K = BC^2 . AC - c,$$

فيكون

$$AD^2 . DB + c = BC^2 . AC = AD^2 . DB + BE^2 . AE,$$

وبالتالي

$$c = BE^2 . AE;$$

فيكون BE هو الجذر المطلوب وَ $BE > \frac{2a}{3}$.

تحديد الجذر الأصغر: $x_1 = BI$ (الشكل رقم (٣ ـ ٦)):



الشكل رقم (٣ ـ ٦)

لنأخذ $(BE = x_2)$، $(AE = a - x_2)$؛ BE و AE معروفان ولدينا $BE > AE$.
ولنأخذ $BG = AE$ ولنضع:

$$\alpha = BG \quad , \quad \beta = BE . AE$$

ونأخذ IG، الحلّ للمعادلة ٧:

$$X^2 + aX = \beta.$$

فيكون

$$BE . AE = IG . IB,$$

ومنها

$$\frac{BE}{IB} = \frac{IG}{AE} = \frac{IG}{GB}$$

وبالتالي

$$\frac{EB + IB}{IB} = \frac{IG + GB}{GB} = \frac{IB}{AE}$$

ومنها

$$\frac{EI(EB + IB)}{IB^2} = \frac{EI}{AE}$$

لكن

$$EI(EB+IB)+IB^2=EB^2,$$

فيكون

$$\frac{EB^2}{IB^2}=\frac{AI}{AE},$$

وبالتالي

$$EB^2 \,.\, AE=BI^2 \,.\, AI,$$

لكن

$$EB^2 \,.\, AE=c,$$

لذلك

$$BI^2 \,.\, AI=c,$$

ويكون BI بالتالي هو الحل المطلوب.

يبقى أن نبرهن أن $BI<\frac{2a}{3}$.

لدينا $BI \neq BE$؛ ذلك لأننا إذا فرضنا العكس أي $BI=BE$، يكون

$$AE \,.\, EB=EB \,.\, EG$$

ومنها

$$EG=GB=AE=\frac{1}{3}AB=AC$$

فيكون

$$EB=\frac{2}{3}AB,$$

وهذا محال (خُلف).

من جهة أخرى، لدينا $BI \neq BC$، لأننا إذا فرضنا أن $BI=BC$ يكون

$$c=BI^2 \,.\, AI=BC^2 \,.\, AC$$

وهذا خُلف.

وهكذا، يكون، في نهاية الأمر: $BI<BE$ وَ $BI<\frac{2a}{3}$.

العلاقة بين المعادلة ٢١ والمعادلة ١٥ (الشكل رقم (٣ ـ ٧)):



الشكل رقم (٣ ـ ٧)

تكتب المعادلة ١٥ على الشكل التالي:

$$X^3 + aX^2 = K.$$

لنأخذ $(AB = a)$، $\left(BC = \frac{2a}{3}\right)$ وَ $\left(BC^2 \,.\, AC = \frac{4a^3}{27} = c_0\right)$؛ وَ c_0 نسميه «العدد الأعظم». ولنأخذ BE، الجذر الكبير للمعادلة ٢١. يكون لدينا إذاً:

$$c = BE^2 \,.\, AE$$

ومن جهة أخرى

$$c_0 = BC^2 \,.\, AC = BC^2 \,.\, AE + BC^2 \,.\, CE$$

حيث $BC^2 \,.\, CE$ هو القسم «الذي يخص» c_0[١]،

كما أن لدينا

$$c = BE^2 \,.\, AE = BC^2 \,.\, AE + (BC + BE) \,.\, CE \,.\, AE$$

و

$$(BC + BE) \,.\, CE \,.\, AE$$

هو القسم «الذي يخص» c[١]، أما $c_0 - c = k$، «عدد التفاوت»[١]، فهو معروف:

$$k = BC^2 \,.\, CE - (BC + BE)CE \,.\, AE.$$

فإذا وضعنا $EC = X$، نحصل على:

$$k = \left(\frac{2a}{3}\right)^2 X - \left(\frac{4a}{3} + X\right) \,.\, X \,.\, \left(\frac{a}{3} - X\right)$$

ومنها

$$k = X^3 + aX^2 \,;$$

---

(١) نص الطوسي، ص 8. (المترجم).

فيكون CE جذر المعادلة ١٥ و $\left(BE = BC + CE = \frac{2a}{3} + X\right)$ هو الجذر x_2 للمعادلة ٢١.

مثال: لتكن المعادلة:

$$x^3 + 14837904 = 465x^2.$$

في هذه الحالة، يكون:

$$\frac{a}{3} = 155 \ , \ \frac{2a}{3} = 310 \ , \ \frac{4a^2}{9} = 96100 \ ,$$

$$\frac{4a^3}{27} = c_0 = 14895500 \ , \ k = c_0 - c = 57596 \ .$$

فيكون لدينا المعادلة

$$57596 = X^3 + 465X^2$$

التي تحل بحسب الطريقة المتبعة في المعادلة ١٥ وتعطي $X = 11$ فيكون:

$$x_2 = X + 310 = 321.$$

دراسة الجذر الأصغر (الشكلان رقما (٣ ـ ٨) و (٣ ـ ٩)):

تمهيد ١: إذا كانت BC قطعة مستقيم و D نقطة منها، يكون لدينا:

$$CD \ . \ DB \ . \ CB = CD^2 \ . \ DB + BD^2 \ . \ CD \ ;$$

وبرهانه يستند إلى كون CB مساوياً لِـ $(CD + DB)$ وإلى إبدالية وتجميعية الضرب والجمع وإلى توزيعية الضرب بالنسبة إلى الجمع:



الشكل رقم (٣ ـ ٨)

تمهيد ٢: لتكن AB قطعة مستقيم ولتكن C نقطة على AB بحيث $AC = \frac{AB}{3}$ وD نقطة على CB؛ فيكون لدينا:

$$\begin{matrix} CB^2 \ . \ AC & = & BD^2 \ . \ DA & + & (CD^2 \ . \ AC + CD^2 \ . \ DB) \\ u & = & v & + & w \end{matrix}$$

فبالنسبة إلى المجسم الأول u، لدينا:

$$u = (CD + DB)^2 \ . \ CA = CD^2 \ . \ CA + DB^2 \ . \ CA + 2CD \ . \ DB \ . \ CA$$

أما بالنسبة إلى المجسمين الباقيين فلدينا:

$$v = BD^2 . DA = BD^2 . AC + BD^2 . DC.$$

$$w = CD^2 . AC + CD^2 . DB.$$

لكن $BD^2 . AC$ مشترك بين u و v، كما أن $CD^2 . AC$ مشترك بين u و w. وإذا أخذنا بالاعتبار كون $(2CA = CD + DB)$ يكون لدينا، استناداً إلى التمهيد ١:

$$2CA . CD . DB = BD^2 . DC + CD^2 . DB,$$

ويكون بالتالي

$$u = v + w$$

فإذا كان $v = \frac{1}{2}u$، يكون $v = w$، وَ $BD = DC = \frac{1}{3}AB$؛ وإذا كان $v > \frac{1}{2}u$ يكون $\left(BD > \frac{1}{2}BC > DC\right)$ وَ $BD > \frac{1}{3}AB$؛ وإذا كان $v < \frac{1}{2}u$، يكون $BD < \frac{1}{3}AB$.



الشكل رقم (٣ ـ ٩)

قضية: ليكن $AB = a$ ولتكن C نقطة على AB بحيث يكون $AC = \frac{a}{3}$ وَ $BC = \frac{2a}{3}$؛ فإذا كان BD الجذر الأصغر وكان k «عدد التفاوت»، يكون لدينا:

$$CD^3 + k = CD^2 . AB.$$

فبما أن BD هي الجذر الأصغر للمعادلة ٢١، يكون لدينا

$$BD^2 . AD = c,$$

ويكون بالتالي

$$CD^3 + c_0 - c = CD^2 . AB.$$

فلدينا

$$BD^2 . DA + c_0 - c = BC^2 . AC,$$

لكن، استناداً إلى التمهيد ٢:

$$BD^2 . DA + (CD^2 . AC + CD^2 . DB) = CB^2 . AC$$

فيكون

$$c_0 - c = CD^2 \,.\, AC + CD^2 \,.\, DB.$$

فإذا وضعنا $CD = X$، يكون

$$(AC + DB) = a - X \;,\; X^2(a - X) = c_0 - c; \quad (c_0 - c = k);$$

وهذا يعني

$$aX^2 = X^3 + k. \qquad (*)$$

فيكون

$$CD^3 + k = AB \,.\, CD^2.$$

قضية: في ظل معطيات القضية السابقة يكون

$$BD^3 + c = BD^2 \,.\, AB \qquad \text{((الشكل رقم (٣ ـ ١٠))}$$



الشكل رقم (٣ ـ ١٠)

فلدينا

$$BD^2 \,.\, AB = BD^2(AD + BD),$$

$$BD^2 \,.\, AB = BD^3 + BD^2 \,.\, AD,$$

ومنها

$$BD^2 \,.\, AB = BD^3 + c.$$

مثال: لتكن المعادلة

$$x^3 + 66152322 = 963x^2$$

حيث $c = \frac{c_0}{2} = 66152322$.

تُحل هذه المعادلة بالطريقة المعتادة (راجع الجدول في النص الأصلي ـ المعادلة ٢١، ص ١٣ من الترقيم في الأعلى). والحلّ هو:

$$321 = \frac{963}{3} = \frac{a}{3} \;.$$

ملاحظة: إذا كان $c = \frac{c_0}{2}$ يكون $X = \frac{1}{3}a$ وبالتالي $BD = x_1 = \frac{a}{3}$ وذلك لأن $BD = \frac{2a}{3} - X$.

وإذا كان $c > \frac{c_0}{2}$ يكون $c_0 - c = k < \frac{c_0}{2}$، فتُحل المعادلة (*) ويطرح حلّها X من $\frac{2a}{3}$، لأن $x_1 = \frac{2a}{3} - X$.

أما إذا كان $c < \frac{c_0}{2}$، فنضع، في الجدول، العددين:

$$a = AB \quad \text{وَ} \quad c = BD^2 \,.\, AD$$

فلو كان AD معلوماً لحصلنا على $\frac{c}{AD} = BD^2 = x_1^2$؛ إلا أن المعلوم هو $AB = a$، لا AD المساوي لِـ $a - x_1$. ولكي نحدد الرقم الأول من x_1، نأخذ $\frac{c}{a}$؛ لدينا $\frac{c}{AD} > \frac{c}{a}$، أي $\frac{c}{a - x_1} > \frac{c}{a}$[٢]. لنفرض أن $x_1 = s_1 + s_2 + s_3$؛ إن $\frac{c}{a}$ يتيح لنا تحديد العدد s'_1 وهو العدد الأصغر الذي يحقق العلاقة:

$$\frac{c}{a} \leq s_1'^2 < s_1^2 \,.$$

وهنا نجد أنفسنا أمام حالتين:

- $s'_1 = s_1$؛ وهنا، إذا وضعنا $f(x) = x^2(a - x)$، نحصل على:

$$f(x_1) - f(s_1) = c - c_1 = \varphi(s_2,\ s_3)$$

- $s'_1 < s_1$، وهنا يمكن أن نكتب $s'_1 = s_1 - \varepsilon$ ويكون s_1 من مرتبة القسم الأخير من x_1.

ليكن $s_1 = BE$، $a - s_1 = AE$. نحتسب $c - BE^2 \,.\, AE$ الذي نضعه في الجدول، ويكون لدينا:

$$\begin{aligned} c - BE^2 \,.\, AD &= (BD^2 - BE^2)AD \\ &= 2BE \,.\, ED \,.\, AD + ED^2 \,.\, AD. \end{aligned}$$

ليكن DE هو الرقم الثاني المطلوب، $DE = s_2$، ولنأخذ بالتالي المساحات التالية:



الشكل رقم (٣ ـ ١١)

---

(٢) «يمكن أن يكون $\frac{c}{a}$ أصغر من $\frac{c}{AD}$». وطالما أن الطوسي لا يعتبر الحالة $c = 0$ أو الحالة $x_1 = 0$، تقرأ هذه العبارة كما يلي: $\frac{c}{a}$ أصغر من $\frac{c}{AD}$.

$$S = BE \cdot AE = BE \cdot AD + BE \cdot DE$$

$$S_1 = (AE - BE) \cdot BE = AE \cdot BE - BE^2$$
$$= AD \cdot BE + DE \cdot BE - BE^2$$

$$S_2 = (AE - 2BE - DE) \cdot DE = (AD - 2BE) \cdot DE$$
$$= AD \cdot DE - 2BE \cdot DE$$

$$S_1 + S_2 = AD \cdot BE + DE \cdot BE - BE^2 + AD \cdot DE - 2BE \cdot DE$$

$$S + S_1 + S_2 = 2AD \cdot BE + AD \cdot DE - BE^2$$

$$(S + S_1 + S_2) \cdot DE = 2AD \cdot BE \cdot DE + AD \cdot DE^2 - BE^2 \cdot DE$$
$$= (BD^2 - BE^2) \cdot AD - BE^2 \cdot DE$$

$$c - (S + S_1 + S_2) \cdot DE = c + BE^2 \cdot DE - (BD^2 - BE^2) \cdot DA.$$

وإذا فرضنا أن $(s_2 = EI < DE)$، (الشكل رقم (٣ ـ ١٢)) لحصلنا، بالطريقة نفسها على:

$$c - 2AI \cdot BE \cdot EI - AI \cdot IE^2 + BE^2 \cdot IE = c + BE^2 \cdot IE - (BI^2 - BE^2) \cdot IA$$
$$= c - BI^2 \cdot AI + BE^2 \cdot IE + BE^2 \cdot IA$$



الشكل رقم (٣ ـ ١٢)

ويتابع مشيراً إلى أن المساحة:

$$2BI \cdot AD + 2BI.AI - BI^2$$

والطول $(AI - 2BI)$، سيدخلان في البحث عن DI ويذكّر بأن هذه العملية عملية تكرارية.

ولنعد إلى الحالة $c > \frac{c_0}{2}$؛ في هذه الحالة، الجذر الأصغر، x_1 للمعادلة $BD^3 + c = BD^2 \cdot AB$، أي للمعادلة $x^3 + c = ax^2$، هو جذر أصغر يحقق العلاقة $x_1 > \frac{a}{3}$. ولكي نجد CD، نستخدم المعادلة

$$X^3 + k = aX^2$$

حيث $k = c_0 - c$، (أي $k < \frac{c_0}{2}$). ففي العملية التكرارية المتبعة، يجب أن يكون $x_1 \leq \frac{a}{3}$ لكي نستطيع طرح x_1 من AB أي من a ثلاث كرّات، وهذا الشرط غير متوفر عند كون $c > \frac{c_0}{2}$. ونستخدم k عند البحث عن $CD = X$، لأن $CD < \frac{a}{3}$. عند ذلك نحصل على:

$$x_1 = \frac{2a}{3} - X \,.$$

تعليـق

تكتب المعادلة

$$ax^2 = x^3 + c.$$

على الشكل

$$c = x^2 \,.\, (a - x) \qquad (١)$$

لنأخذ الدالة التالية:

$$f(x) = x^2 \,.\, (a - x) \qquad (٢)$$

إن دراسة المعادلة تُظهر ما يلي:

- إذا كان $c > \frac{4a^3}{27}$ يكون لِـ (١) جذر واحد، سالب.

- إذا كان $c = \frac{4a^3}{27}$ يكون لها جذر سالب وجذر مزدوج $x_0 = \frac{2a}{3}$.

- إذا كان $0 < c < \frac{4a^3}{27}$، يكون لها جذر سالب وجذران موجبان x_1 وَ x_2:

$$0 < x_1 < \frac{2a}{3} < x_2 < a.$$

- إذا كان $c = 0$، يكون لها جذر موجب $x_2 = a$ وجذر مزدوج $x_1 = 0$.

- إذا كان $c < 0$، يكون لها جذران غير حقيقيين وجذر موجب x_2، $x_2 > a$.

يبدأ الطوسي بملاحظة أن أي جذر للمعادلة (١) هو أصغر من a، وهذا صحيح لأنه يعتبر $c > 0$. وهنا يفرّق بين حالات ثلاث:

- $c > \frac{4a^3}{27}$، وهنا تكون المسألة مستحيلة؛

- $c = \frac{4a^3}{27}$، فيجد الجذر المزدوج $x_0 = \frac{2a}{3}$؛

- $c < \frac{4a^3}{27}$، فيهمل الجذر السالب (يجهله) ويحدد الجذرين الموجبين x_1 و x_2 حيث

$$0 < x_1 < \frac{2a}{3} < x_2 < a.$$

ومسار عمله هو التالي:

١ ـ دراسة النهاية العظمى للدالة (٢)

يأخذ الطوسي $x_0 = \frac{2a}{3}$ ويبرهن ما يلي:

$$f(x_0) = \underset{0<x<a}{Sup}\ f(x) \qquad (٣)$$

وذلك ببرهانه أن $f(x) < f(x_0)$ له في كل من الحالتين: $x_0 < x$ وَ $x < x_0$.

الحالة الأولى وهي تعود إلى برهان العلاقة: $x_1 > x_0 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_0)$؛
في هذه الحالة لدينا $x_1 > x_0$ وبالتالي

$$\begin{aligned}
x_0^2(a - x_0) &= x_0^2(a - x_1) + x_0^2(x_1 - x_0),\\
x_1^2(a - x_1) &= x_0^2(a - x_1) + (x_1 + x_0)\ (x_1 - x_0)\ (a - x_1),\\
x_0^2 &= 2x_0\ .\ (a - x_0),\\
&= 2x_0(a - x_1) + 2x_0(x_1 - x_0),\\
(x_1 + x_0)\ (a - x_1) &= 2x_0(a - x_1) + (x_1 - x_0)\ (a - x_1),
\end{aligned}$$

ومنها

$$f(x_0) - f(x_1) = 2x_0(x_1 - x_0)^2 - (a - x_1)\ (x_1 - x_0)^2.$$

لكن

$$x_0 > a - x_0 > a - x_1,$$

فيكون بالتالي:

$$f(x_0) > f(x_1).$$

الحالة الثانية وهي تعود إلى برهان العلاقة: $x_2 < x_0 \Longrightarrow f(x_2) < f(x_0)$؛

في هذه الحالة لدينا $x_2 < x_0$ وبالتالي

$$x_0^2(a-x_0) = x_2^2(a-x_0) + (x_0+x_2)\,(x_0-x_2)\,(a-x_0),$$
$$x_2^2(a-x_2) = x_2^2(a-x_0) + x_2^2(x_0-x_2),$$
$$x_0^2 = 2x_0(a-x_0),$$
$$2x_0(a-x_0) - (x_0+x_2)\,(a-x_0) = (x_0-x_2)\,(a-x_0),$$
$$(x_0+x_2)\,(x_0-x_2) > (x_0-x_2)\,(a-x_0),$$

فيكون

$$x_0^2 - x_2^2 > x_0^2 - (x_0+x_2)\,(a-x_0),$$

ومنها

$$x_2^2 < (x_0+x_2)\,(a-x_0)$$

وبالتالي

$$f(x_2) < f(x_0).$$

ملاحظة: لا يشير الطوسي هنا إلى التصرّف الذي قاده لإيجاد x_0، $\left(x_0 = \dfrac{2a}{3}\right)$.
لكنه، سيعمد لاحقاً، كما سنرى إلى حل المعادلة:

$$f'(x) = 0$$

٢ ـ احتساب النهاية العظمى

$$f(x_0) = f\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{4a^3}{27} \qquad (٤)$$

وهذا ما يبرر اعتباره للحالات الثلاث التي أشار إليها.

في الحالة الثالثة حيث $c < \dfrac{4a^3}{27}$، يوجد بالنسبة إلى الطوسي حلّان x_1 و x_2 بحيث $0 < x_1 < \dfrac{2a}{3} < x_2 < a$.

٣ ـ تحديد x_2

ليكن $k = c_0 - c = \dfrac{4a^3}{27} - c$ وليكن X الجذر الموجب للمعادلة من النوع ١٥:

$$x^3 + ax^2 = k$$

عند ذلك يكون $x_2 = x_0 + X$ الجذر الأكبر للمعادلة ٢١. فبما أن:

$$x_0 = \frac{2a}{3} = 2(a-x_0),$$

يكون

$$c_0 = x_0^2(a - x_0) = x_0^2(a - x_2) + x_0^2(x_2 - x_0)$$
$$= x_0^2(a - x_2) + 2x_0(a - x_0)\ (x_2 - x_0)$$
$$= x_0^2(a - x_2) + 2x_0(a - x_2)X + 2x_0X^2.$$

لكن، بما أن:

$$2x_0 = a + (a - x_0) = a + (a - x_2) + X,$$

فيكون

$$c_0 = x_0^2(a - x_2) + 2x_0X(a - x_2) + aX^2 + (a - x_2)X^2 + X^3.$$

ومن جهة أخرى، لدينا:

$$x_2^2(a - x_2) = (x_0 + X)^2(a - x_2)$$
$$= x_0^2(a - x_2) + X^2(a - x_2) + 2x_0X(a - x_2),$$

فيكون بالتالي:

$$c_0 = x_2^2(a - x_2) + aX^2 + X^3,$$

وبما أن

$$aX^2 + X^3 = k = c_0 - c,$$

يكون

$$x_2^2(a - x_2) = c,$$

ويكون x_2 بالتالي جذراً للمعادلة (٢١).

٤ ـ تحديد x_1

إن التحويل الأفيني $x_1 = x_0 - X$ يقود إلى معادلة من النوع نفسه (٢١) لكن مع c' مختلف عن c. هنا يبدّل الطوسي طريقته، فيأخذ الجذر الموجب X للمعادلة من النوع ٧، التالية:

$$X^2 + (a - x_2)X = x_2(a - x_2),$$

حيث x_2 وَ $a - x_2$ معلومان، $x_2 > a - x_2$؛ ومنها يحصل على:

$$X(X + a - x_2) = x_2(a - x_2),$$

ومن ثم على:

$$\frac{x_2}{X + a - x_2} = \frac{X}{a - x_2}\ ,$$

وبالتالي

$$\frac{X + a}{X + a - x_2} = \frac{X + a - x_2}{a - x_2} \qquad (١)$$

ومنها

$$\frac{[x_2-(X+a-x_2)](X+a)}{(X+a-x_2)^2}=\frac{x_2-(X+a-x_2)}{a-x_2} \qquad (٢)$$

وذلك بعد ضرب كلٍّ من طرفي (١) بـ $\frac{x_2-(X+a-x_2)}{X+a-x_2}$.

وعند إضافة العدد ١ إلى كل من طرفي المعادلة (٢) نحصل على:

$$\frac{x_2^2}{(X+a-x_2)^2}=\frac{x_2-X}{a-x_2}.$$

ومنها

$$c=x_2^2(a-x_2)=(X+a-x_2)^2(x_2-X)$$

فإذا وضعنا $x_1=X+a-x_2$، نكون قد حصلنا على:

$$c=x_1^2(a-x_1).$$

ملاحظة ١ : العلاقة بين المعادلة ٢١ والمعادلة ٧.

يمكن كتابة المعادلة ٢١ على الشكل $g(x)=0$ حيث:

$$g(x)=-x^3+ax^2-c$$

وكون $g(x_2)=0$ يمكننا من كتابة:

$$\begin{aligned} g(x)&=(x-x_2)\ [-x^2+(a-x_2)\ .\ x+x_2(a-x_2)] \\ &=(x-x_2)\ .\ h(x) \end{aligned}$$

ليكن x_1 الحل الإيجابي للمعادلة $h(x)=0$. فإذا وضعنا $x_1=X+(a-x_2)$، يكون X حلاً للمعادلة من النوع ٧:

$$X^2+(a-x_2).X=x_2(a-x_2)$$

وهو حل أعطاه الطوسي. نلاحظ إذن، أن الطوسي يعمد إلى تحليل الحدودية $g(x)$ إلى عوامل(٣). ومن ثم يعمد الطوسي إلى تحويل $h(x)$ بواسطة التحويل الأفيني

$$x=X+a-x_2$$

ويحصل على

$$h(X+a-x_2)=-X^2-(a-x_2)X+x_2(a-x_2)$$

---

(٣) تعميلها. (المترجم).

ومن هنا معادلة الطوسي التي منها يستخرج x_1.

ملاحظة ۲: عند كتابة $x_1 = X + a - x_2$، يعرِض الطوسي في الواقع الجذر الثالث للمعادلة ٢١، وهو الجذر السالب $x_3 = -X$، فلدينا:

$$a = x_1 + x_2 - X ,$$

لكنه لم يتعرف بتاتاً إلى هذا الجذر.

بعد تحديد x_1 يبرهن الطوسي أن $x_1 \neq x_0$ وأن $x_1 \neq x_2$؛ فعندما يفترض أن $x_1 = x_2$ يحصل على:

$$x_2(a - x_2) = x_2 \; [x_2 - (a - x_2)],$$

وذلك استناداً إلى:

$$x_2(a - x_2) = X[X + a - x_2] \quad \text{وَ} \quad X = x_1 + x_2 - a;$$

ومن ذلك يحصل على $x_2 = \frac{2a}{3}$ وهو خُلف.

ويبرهن أن $x_1 \neq x_0 = \frac{2a}{3}$ استناداً إلى أن:

$$x_1^2 \, . \, (a - x_1) < \frac{4a^3}{27} \, .$$

هكذا يكون الطوسي قد برهن بأن $x_1 \neq x_0$ و $x_1 \neq x_2$. لكن، استناداً إلى برهانه أن $x_2 = x_0 + X$ حيث X هو الجذر الموجب الوحيد للمعادلة ١٥، يكون x_2 هو الحل الوحيد للمعادلة ٢١، الأكبر من x_0 ويكون بالتالي:

$$[x_1 \neq x_2 \quad , \quad x_1 \neq x_0] \Longrightarrow x_1 < x_0$$

٥ ـ العلاقة بين المعادلة ٢١ والمعادلة ١٥

يبرر الطوسي هنا استخدامه للتحويل الأفيني الذي يقوده إلى المعادلة ١٥. فليكن $x_0 = \frac{2a}{3}$؛ فيكون $f(x_0) = x_0^2 \, . \, (a - x_0) = \frac{4a^3}{27}$.

وليكن $x_2 = x_0 + X$ الجذر الأكبر، فيكون:

$$f(x_2) = x_2 \, . \, (a - x_2) = c \, .$$

لذلك يكون:

$$\begin{aligned} c_0 = f(x_0) &= x_0^2(a - x_0) = x_0^2(a - x_2) + x_0^2(x_2 - x_0), \\ c = f(x_2) &= x_0^2(a - x_2) + (x_2^2 - x_0^2) \; (a - x_2), \\ &= x_0^2(a - x_2) + (x_2 - x_0) \; (x_2 + x_0) \; (a - x_2), \end{aligned}$$

ومنها

$$c_0 - c = f(x_0) - f(x_2) = x_0^2(x_2 - x_0) - (x_2 - x_0)\ (x_2 + x_0)\ (a - x_2).$$

وإذا وضعنا $X = x_2 - x_0$، نصل إلى:

$$c_0 - c = f(x_0) - f(x_2) = \frac{4a^2}{9} X - X\ .\ \left(\frac{4a}{3} + X\right)\ \left(\frac{a}{3} - X\right);$$

$$c_0 - c = f(x_0) - f(x_2) = aX^2 + X^3\ ;$$

فإذا وضعنا $c_0 - c = k$، نحصل على:

$$k = aX^2 + X^3 \quad \text{(المعادلة ١٥)}$$

هكذا يكون الطوسي قد برهن في الفقرة السابقة ما يلي:

- إذا كان X الجذر الموجب للمعادلة ١٥ فإن $x_2 = x_0 + X$ هو جذر للمعادلة ٢١.

لكنه هنا يبرهن العكس:

- إذا كان x_2 جذراً للمعادلة ٢١ يكون $X = x_2 - x_0$ جذراً للمعادلة ١٥.

٦ ـ دراسة x_1

لنسجّل أننا نحصل على المعادلة ١٥ عن طريق التحويل الأفيني:

$$x \longrightarrow X = x - x_0\ ,$$

ولهذه المعادلة، بالإضافة إلى الجذر الموجب الذي يعطي x_2، جذرٌ سالبٌ يعطينا x_1. لكن الطوسي لا يتعرف إلى مثل هذا الجذر؛ هذا ما اضطره إلى تغيير طريقته. وقد سبق وأشرنا إلى أنه، توسل في بحثه عن x_1 تحليل حدوديةٍ أوصلته إلى حل معادلة من الدرجة الثانية. وهنا يعتمد التحويل الأفيني:

$$x \longrightarrow X = x_0 - x$$

الذي يقوده إلى معادلة من النوع ٢١

$$X^3 + k = aX^2$$

حيث $k \neq c$. ولقد بدأ ببرهان التمهيديتين ١ وَ ٢ التاليتين:

١ ـ مهما كان العددان a وَ b يكون:

$$ab(a + b) = a^2b + b^2a$$

٢ ـ إذا كانت الأعداد a، b وَ c تحقق

$$a+b+c=k \quad ، \quad a=\frac{k}{3} \quad وَ \quad b+c=\frac{2k}{3}$$

يكون

$$a(b+c)^2=b^2(a+c)+c^2(a+b).$$

ويبرهن، من ثم، أنه إذا كان $x_0=\frac{2a}{3}$ وإذا كان x_1 الجذر الأصغر للمعادلة فإن $X=x_0-x_1$ يكون حلاً للمعادلة:

$$X^3+c_0-c=aX^2.$$

فلدينا

$$c_0=f(x_0)=x_0^2(a-x_0),$$
$$c=f(x_1)=x_1^2(a-x_1)$$

ومنها

$$x_1^2(a-x_1)+c_0-c=x_0^2(a-x_0);$$

لكن، استناداً إلى ٢،

$$x_1^2(a-x_1)+(x_0-x_1)^2(a-x_0+x_1)=x_0^2(a-x_0)$$

فيكون

$$c+(x_0-x_1)^2(a-x_0+x_1)=c_0\ ;$$

فيكون إذن

$$X^2\ .\ (a-X)=c_0-c\ ,$$

وبتعبير آخر

$$aX^2=X^3+k \qquad \text{(المعادلة ٢١َ)}$$

وهي معادلة من النوع ٢١.

ولقد رأينا أنه إذا كان $c=\frac{c_0}{2}$ يكون $X=\frac{a}{3}$ فيكون $x_1=\frac{a}{3}$؛ وإذا كان $c>\frac{c_0}{2}$ يكون $k<\frac{c_0}{2}$. إن حل المعادلة ٢١َ يعطي X ومنه نحصل على $x_1=x_0-X$.

ويختم الطوسي عرضه بحسابات تقريبية متتالية لمختلف أرقام x_1 عند كون $c<\frac{c_0}{2}$.

المعادلة ٢٢: $x^3+c=bx$

من هذه المعادلة نحصل على:

$$b>x^2.$$

نأخذ $(AC)=b$ وَ $(AC)=AB^2$ فيكون $AB>x$. ونأخذ $AE=x$ ـ فتكون

النقطة E بين A و B ـ و $(AG) = AE^2$، فيكون:

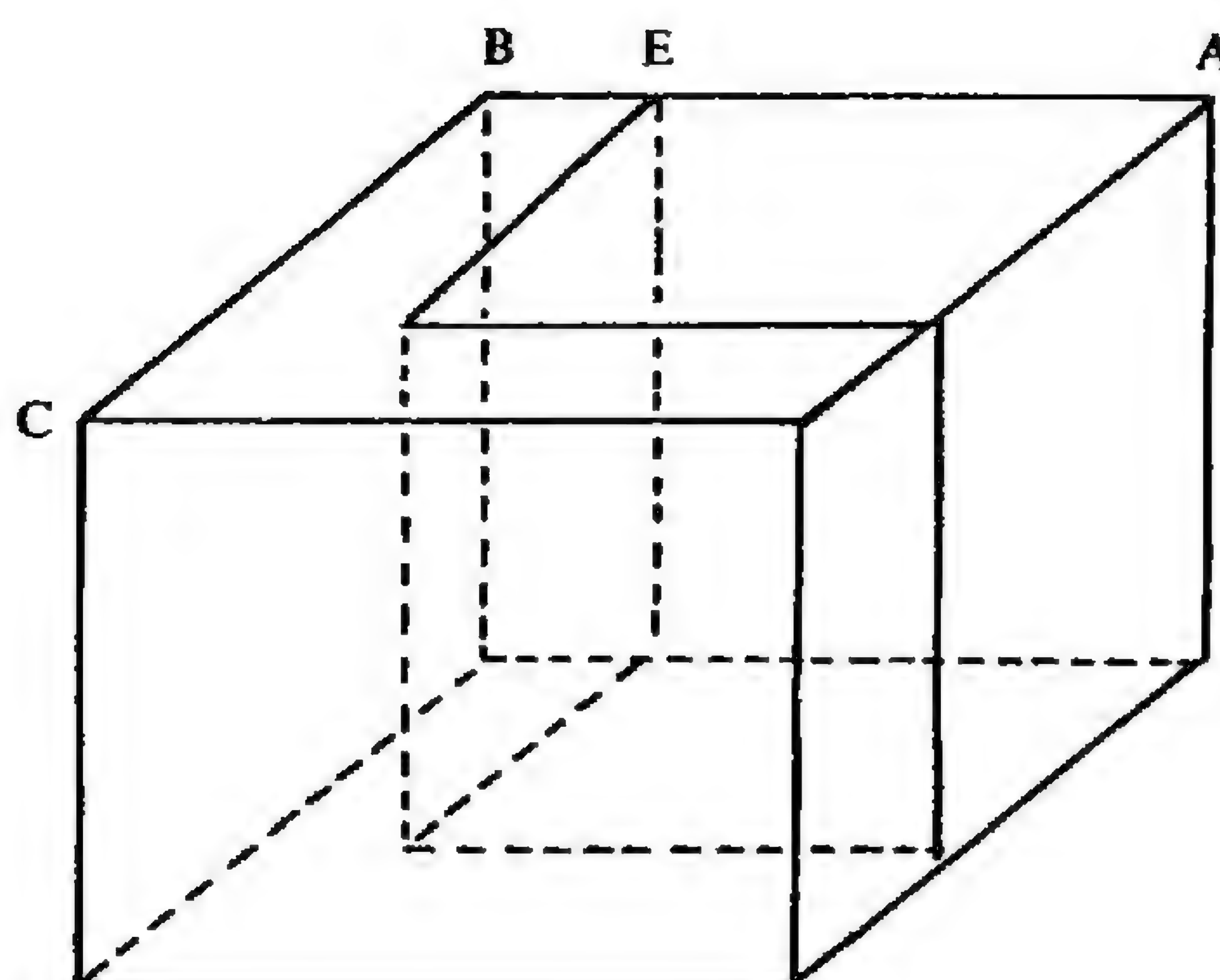
$$(AC) . AE = x^3 + c,$$ ((الشكل رقم (٣ ـ ١٣))

وَ

$$(AC) . AE = AE^3 + (CG) . AE,$$

ومنها

$$(CG) . AE = c.$$



الشكل رقم (٣ ـ ١٣)

فتكون المسألة ممكنة عند وجود حجم ـ «علم مجسّم» ـ مساوٍ لِـ c.

دراسة النهاية العظمى

ليكن AE بحيث

$$(AG) = AE^2 = \frac{1}{3} AB,$$

ولنأخذ

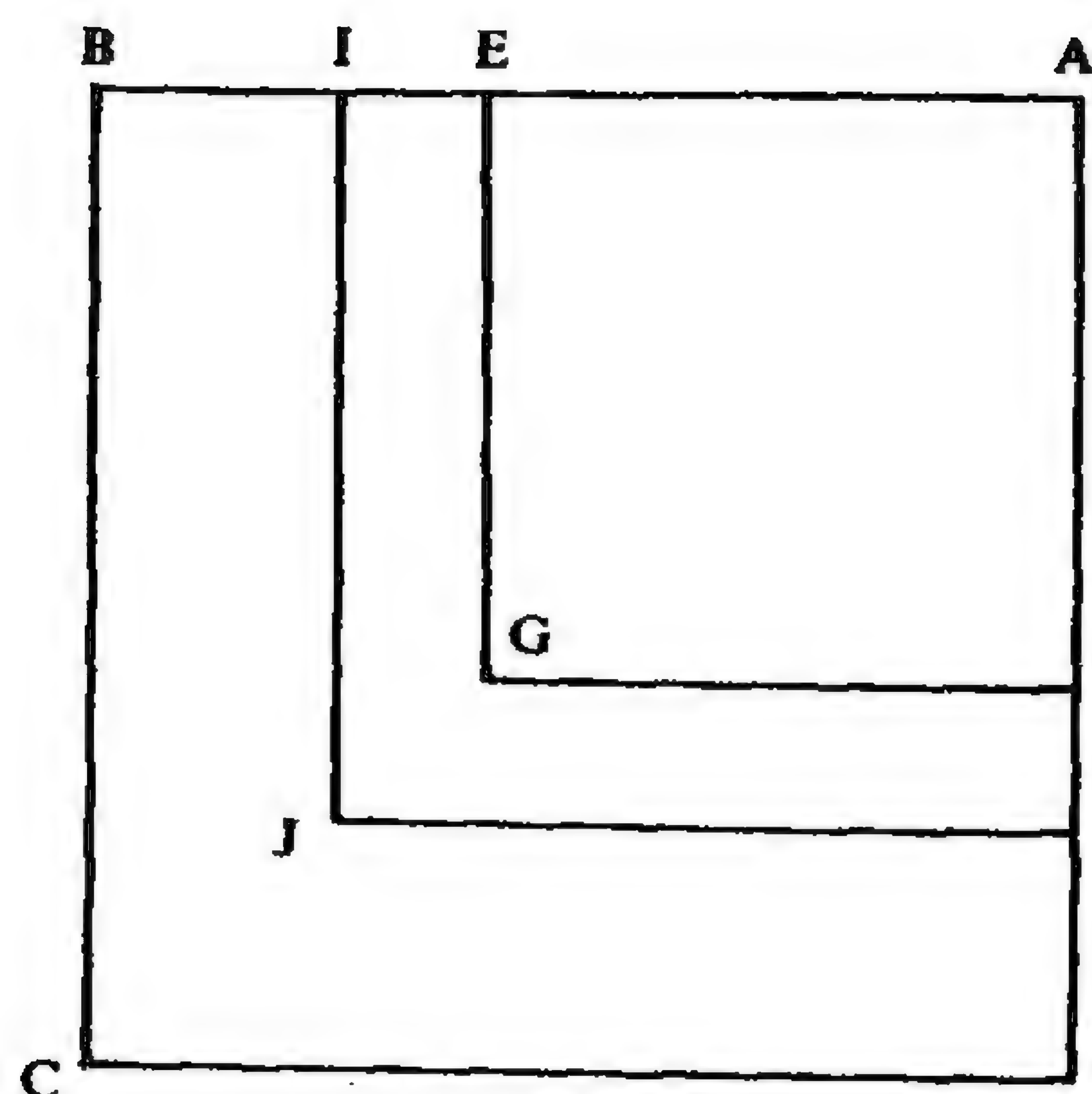
$$c_0 = (CG) . AE = (b - AE^2) . AE.$$

الحالة الأولى: $AI > AE$ (الشكل رقم (٣ ـ ١٤)):

إذا كان $c = (b - AI^2) . AI$ يكون $c < c_0$.

ولبيان ذلك نأخذ $(CJ) = b - AI^2$ فيكون:

$$c_0 = (CJ) . AE + (JG) . AE,$$



الشكل رقم (٣ ـ ١٤)

وَ

$$c = (CJ) \,.\, AE + (CJ) \,.\, EI.$$

فيبقى علينا مقارنة $(CJ) \,.\, EI$ مع $(JG) \,.\, AE$

لكن، بما أن

$$(AG) = \frac{1}{3}(AC),$$

يكون

$$(CG) = 2(AG)$$

ويكون

$$(CG) = (AB + AE) \,.\, BE = 2AE^2.$$

لكن

$$(IA + AE) \,.\, AE = (IE + 2AE) \,.\, AE > 2AE^2$$

وَ

$$(CJ) = (AB + AI) \,.\, BI < 2AE^2$$

لأن

$$(CJ) < (CG).$$

فيكون

$$(AB + AI) \,.\, BI < (AI + AE) \,.\, AE,$$

ومنها

$$\frac{AB+AI}{AI+AE} < \frac{AE}{BI}$$

وَ

$$\frac{AB+AI}{AI+AE} \times \frac{BI}{IE} < \frac{AE}{IE} ,$$

فيكون

$$\frac{(CJ)}{(JG)} < \frac{AE}{IE}$$

وَ

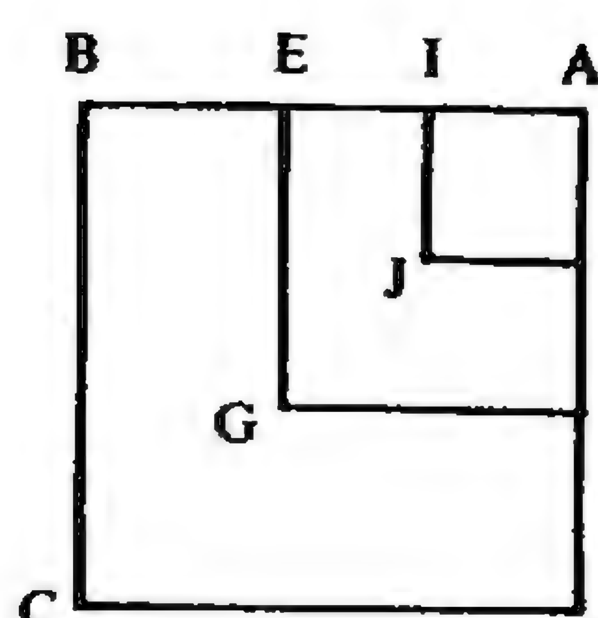
$$(CJ) \,.\, EI < (JG) \,.\, AE,$$

فيكون

$$(CJ) \,.\, AI = (CJ) \,.\, EI + (CJ) \,.\, AE < (JG) \,.\, AE + (CJ) \,.\, AE = (CG) \,.\, AE$$

وبالتالي

$$c < c_0.$$



الشكل رقم (٣ ـ ١٥)

الحالة الثانية: $AI < AE$ (الشكل رقم (٣ ـ ١٥)):

إذا كان $c = (CJ) \,.\, AI$، يكون $c < c_0$.

ذلك لأن

$$(CG) = (AB + AE) \,.\, BE = 2AE^2$$

وَ

$$(AE + AI) \,.\, AI = 2AI^2 + AI \,.\, EI < 2AE^2$$

فيكون

$$\frac{AB+AE}{AE+AI} > \frac{AI}{BE} ,$$

ومنها

$$\frac{(CG)}{(GJ)} = \frac{AB+AE}{AE+AI} \times \frac{BE}{EI} > \frac{AI}{IE}$$

وَ

$$(CG) \,.\, IE > (GJ) \,.\, AI$$

ومنها

$$(CG) \,.\, AE = (CG) \,.\, IE + (CG) \,.\, AI > (GJ) \,.\, AI + (CG) \,.\, AI = (CJ) \,.\, AI$$

وبالتالي

$$c_0 > c.$$

مما سبق نستنتج ما يلي:

- إذا كان $c > c_0$، أي $c > \frac{2}{3}b \cdot \left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$، تكون المسألة مستحيلة؛

- إذا كان $c = \frac{2}{3}b.\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$، يكون الجذر المطلوب $x = \left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$، لأن:

$$x \cdot (AC) = bx$$

وَ

$$bx - x^3 = b \cdot \left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}b \cdot \left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = c$$

فيكون

$$x = \left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

هو الجذر الوحيد؛ فإذا كان x_1 جذراً آخر، يكون لدينا:

$$bx_1 - x_1^3 = c = c_0;$$

وهذا مستحيل لأننا بيّنا أنه مهما كان x، $\left(x \neq \left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$، يكون

$$bx - x^3 < c_0,$$

- إذا كان $c < \frac{2}{3}b.\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$، يكون للمسألة حلّان، x_1 وَ x_2 يحققان:

$$x_1 < x_0 < x_2 < b^{\frac{1}{2}}.$$

تحديد الجذر الأصغر x_1

ليكن $(AC) = b$، $(AC) = AB^2$، $(AG) = \frac{1}{3}AC$، (الشكل رقم (٣ ـ ١٦)). وليكن k عدداً (موجباً) بحيث $c_0 - c = k$؛ (نذكر أن الطوسي في نصه يبدل الحرف c بـ i، أي ج بـ ي)، وليكن $AH = 2AE$، فيكون

$$EH = 3AE.$$

لنأخذ المعادلة

$$x^3 + k = EH \cdot x^2 \qquad \text{(المعادلة ٢١)}$$

وليكن EL جذرها الأصغر (انظر التعليق على المعادلة ٢٢) وليكن $EJ = EL$، فيكون لدينا:

$$EL^2 \,.\, JH = k.$$

ولنبرهن الآن أن $EL < AE$ وأن $AJ = AE - EJ = x_1$. لدينا $AE^2 = \frac{(AC)}{3}$ وبالتالي $(CG) = \frac{2}{3}(AC) = 2AE^2$، فيكون:

$$c_0 = (CG) \,.\, AE = 2AE^3.$$

لكن $AH = 2AE$، فيكون

$$AE^2 \,.\, AH = 2AE^3 = c_0 \,. \qquad (١)$$

لكن

$$(CG) = 2BE \,.\, AE + BE^2 = 2AE^2,$$

ومنها

$$BE < AE \,؛ \qquad (٢)$$

وليكن $BE = AM$؛ فيكون

$$AM^2 + 2AE \,.\, AM = 2AE^2,$$

ومنها

$$AM^2 = 2AE \,.\, EM;$$

فيكون

$$\frac{EM}{AM} = \frac{AM}{2AE} = \frac{AM}{AH} \qquad (٣)$$

ليكن $HS = AM$ وَ $OS = EM$ فيكون $OE = AH$ ويحصل:

$$\frac{OS}{SH} = \frac{SH}{OE}$$

ومنها

$$\frac{OH + HS}{HS} \times \frac{OS}{HS} = \frac{OH + HS}{HS} \times \frac{SH}{OE}$$

وهذا يعني

$$\frac{(OH + HS) \,.\, OS}{HS^2} = \frac{OH + HS}{OE} \,,$$

ومنها

$$(OH + HS) \,.\, OS \,.\, OE = (OH + HS) \,.\, HS^2,$$

فيكون

$$OH^2 \,.\, OE = (OH + HS) \,.\, OS \,.\, OE + HS^2 \,.\, OE,$$
$$= (OH + HS) \,.\, HS^2 + HS^2 \,.\, OE = EB^2 \,.\, BH.$$

لكن

$$HO = AE \quad \text{وَ} \quad OE = AH,$$

فيكون

$$HO^2 \,.\, EO = AE^2 \,.\, AH = 2AE^3 \qquad (٤)$$ ،

واستناداً إلى (١) يكون لدينا[٤]

$$AE^2 \,.\, AH = c_0$$

وأيضاً

$$AE^2 \,.\, AH > k.$$

لكن لدينا

$$EL^2 \,.\, JH = k$$

وبالتالي

$$AE^2 \,.\, AH > EL^2 \,.\, JH;$$

وعلماً بأن

$$AH < JH,$$

يكون

$$AE > EL.$$

ولدينا $EL = EJ$. فإذا وضعنا $x_1 = AE - EJ = AJ$، يكون x_1 حلاً.

ولدينا

$$c_0 = (CG) \,.\, AJ + (CG) \,.\, EJ,$$

وَ

$$(CG) = 2AE^2$$

---

(٤) في الواقع، يستنتج الطوسي بشكل آخر؛ فمن (٤)، استناداً إلى (١)، يحصل على:

$$BE^2 \,.\, BH = 2AE^3 = c_0$$

وبالتالي

$$BE^2 \,.\, BH > k$$

لكن

$$EL^2 \,.\, JH = k \quad \text{(معطية)}$$

فيستنتج من دون أي تبرير آخر

$$EL < BE$$

ومنها

$$EL < AE$$

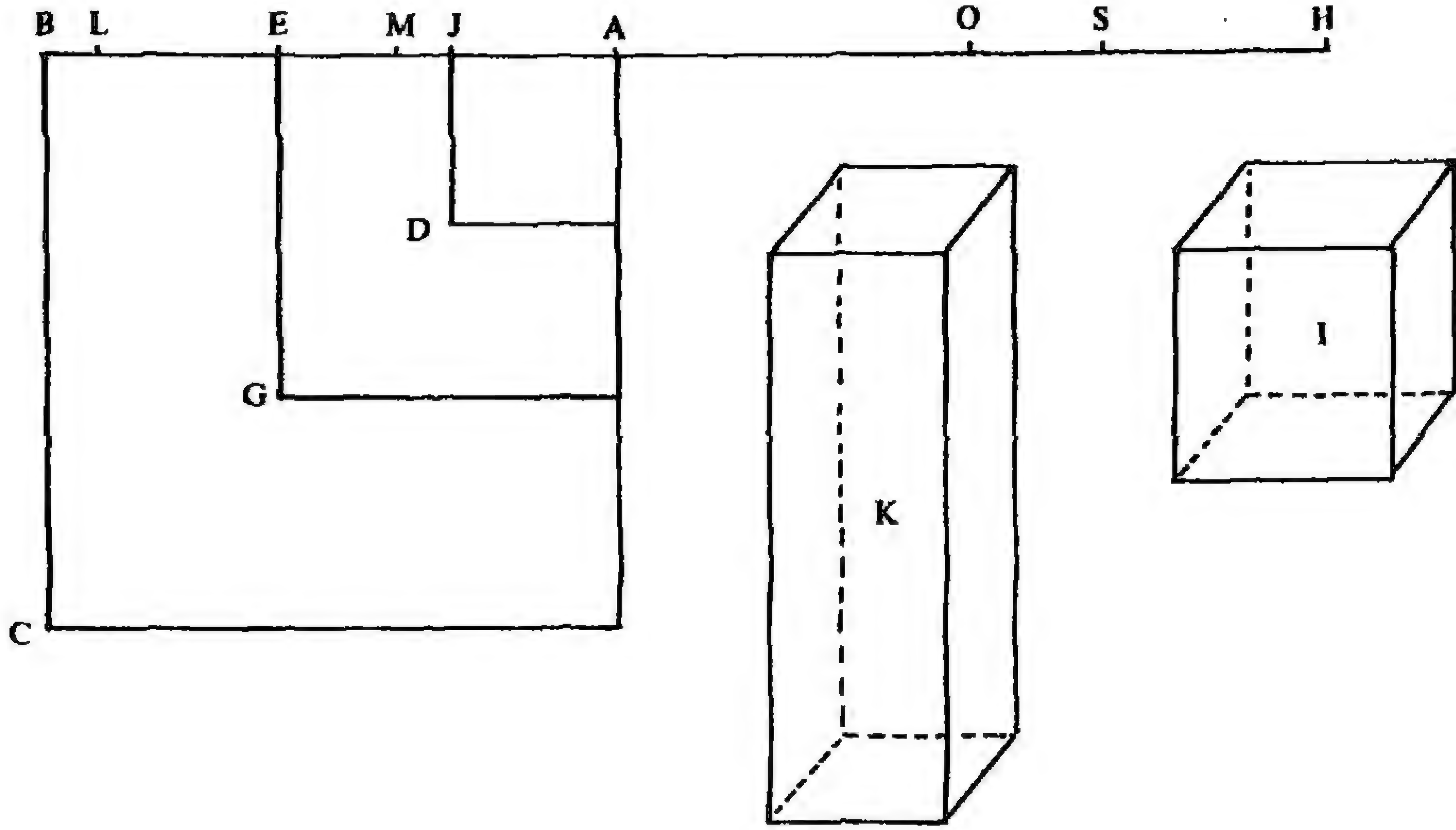
لأن $BE < AE$، استناداً إلى (٢).

ومنها

$$(CG) . EJ = 2AE^2 . EJ = 2(GD) . EJ + 2AJ^2 . EJ,$$

لكن

$$(GD) = EJ . (AE + AJ)$$ ((الشكل رقم (٣ ـ ١٦))



الشكل رقم (٣ ـ ١٦)

ومنها

$$2(GD) . EJ = EJ^2 . 2AE + EJ^2 . AJ + EJ^2 . AJ,$$

لكن

$$2AJ^2 . EJ + EJ^2 . AJ = (GD) . AJ,$$

وَ

$$EJ^2 . 2AE + EJ^2 . AJ = EJ^2 . HJ,$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} c_0 &= (CG) . AJ + (GD) . AJ + EJ^2 . HJ \\ &= (CD) . AJ + EJ^2 . HJ. \end{aligned}$$

لكن

$$c_0 = c + k,$$

وَ

$$EJ^2 \,.\, HJ = k,$$

فيكون

$$(CD) \,.\, AJ = c.$$

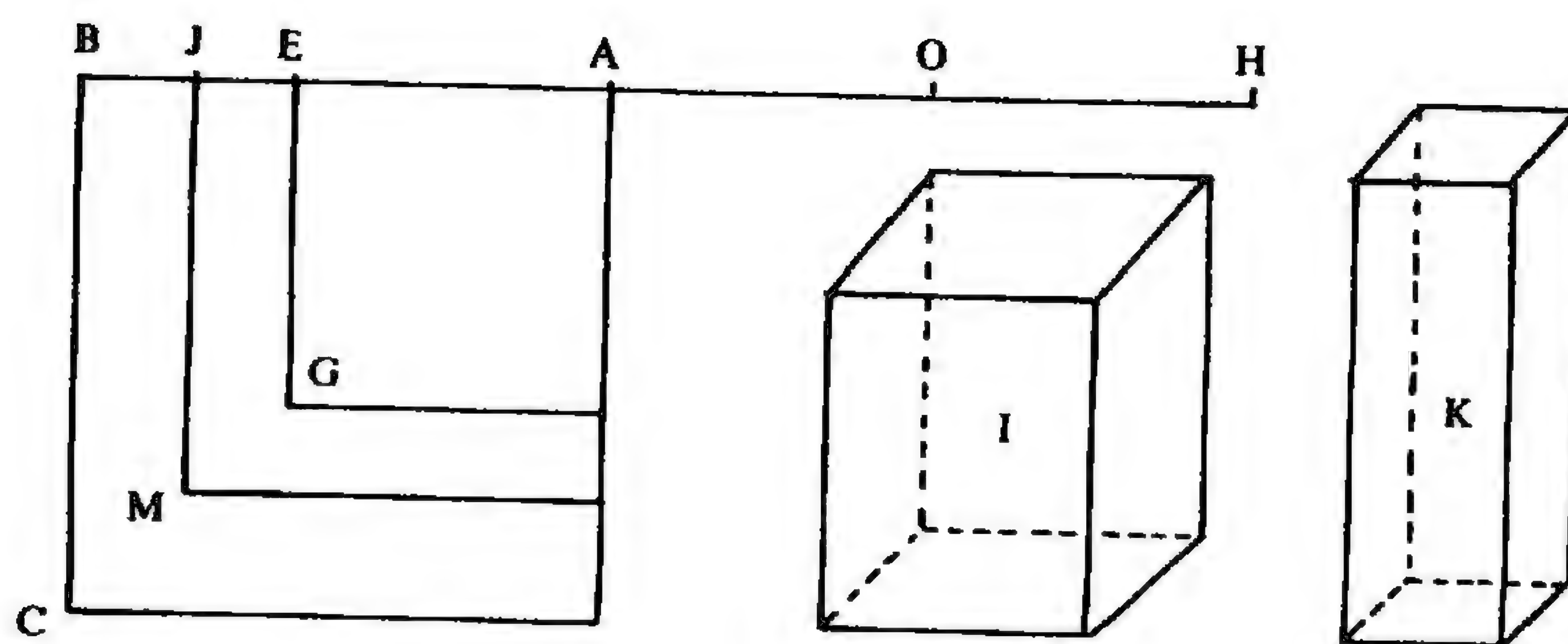
وإذا وضعنا $AJ = x_1$، نحصل على:

$$bx_1 = (AC) \,.\, x_1 = (AD) \,.\, AJ + (CD) \,.\, AJ = AJ^3 + c$$

ومنها

$$bx_1 = x_1^3 + c.$$

تحديد الجذر الأكبر x_2 (الشكل رقم (٣ ـ ١٧)):



الشكل رقم (٣ ـ ١٧)

لدينا

$$(CG) \,.\, AE = c_0 = c + k.$$

ليكن $AH = 2AE$، $EH = 3AE$ ولنأخذ المعادلة (من النوع ١٥)

$$x^3 + EH \,.\, x^2 = k$$

وليكن EJ حلّ هذه المسألة. فيكون لدينا:

$$EJ^2 \,.\, HJ = k$$

ونبرهن كما سبق أن

$$BJ < BE$$

فيكون $x_2 = AE + EJ = AJ$ حلاً، وذلك يعني أن لدينا:

$$(CM) \,.\, AJ = c.$$

ولدينا كذلك

$$(CG) \,.\, AE = (CM) \,.\, AE + (MG) \,.\, AE,$$

لكن

$$(MG) = 2EJ \,.\, AE + EJ^2,$$

ومنها

$$(MG) \,.\, AE = 2EJ \,.\, AE^2 + EJ^2 \,.\, AE;$$

ومنها

$$(CG) = 2AE^2$$

وَ

$$2EJ \,.\, AE^2 = (CG) \,.\, EJ = (CM) \,.\, EJ + (MG) \,.\, EJ,$$

وَ

$$2EJ \,.\, AE \,.\, EJ = 2AE \,.\, EJ^2,$$

ومنها

$$(MG) \,.\, EJ = EJ^2 \,.\, AE + EJ^2 \,.\, AE + EJ^3,$$

وَ

$$3EJ^2 \,.\, AE + EJ^3 = EJ^2 \,.\, HJ,$$

فيكون

$$c + k = c_0 = (CM) \,.\, AJ + EJ^2 \,.\, HJ,$$

ومنها

$$c_0 = (CM) \,.\, AJ + k,$$

وَ

$$c = (CM) \,.\, AJ,$$

فيكون

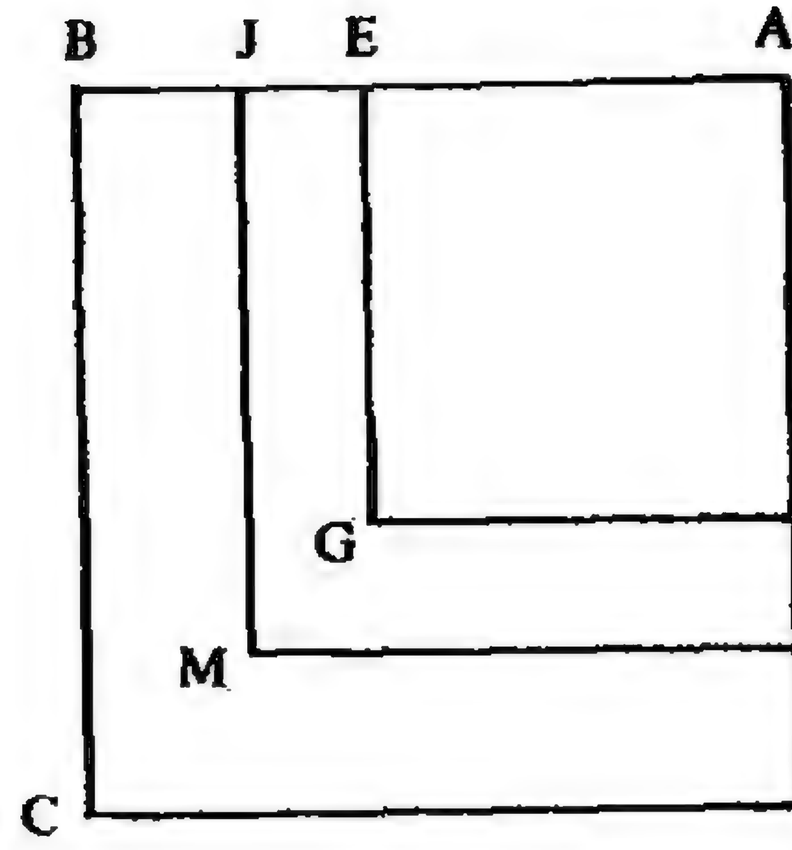
$$bx_2 = (AC) \,.\, AJ = AJ^2 \,.\, AJ + (CM) \,.\, AJ = AJ^3 + c$$

ومنها

$$bx_2 = x_2^3 + c,$$

فيكون x_2 حلاً للمعادلة ٢٢.

العلاقة بين المعادلة ٢٢ والمعادلة ١٥ (الشكل رقم (٣ ـ ١٨)):



الشكل رقم (٣ ـ ١٨)

ليكن $(AC) = b$ وَ $x_0 = \sqrt{\frac{b}{3}} = AE$؛ ولنأخذ المعادلة ١٥ التالية:

$$X^3 + 3AE \,.\, X^2 = k.$$

وليكن $AJ = x_2$ الجذر الأكبر للمعادلة ٢٢؛ فيكون

$$c_0 = (CG) \,.\, AE \qquad \text{(المجسّم الأول)}$$

وَ

$$c = (CG) \,.\, AJ \qquad \text{(المجسّم الثاني)}$$

والقسمان اللذان يخصان هذين المجسمين هما بالتتالي $(MG) \,.\, AE$ وَ $(CM) \,.\, JE$ فيكون لدينا:

$$k = c_0 - c = (MG) \,.\, AE - (CM) \,.\, JE,$$

ومنها

$$k + (CM) \,.\, JE = (MG) \,.\, AE.$$

وإذا وضعنا $EJ = X$، نحصل على:

$$(MG) \,.\, AE = (2AE + X)X \,.\, AE,$$
$$= (2AE \,.\, X + X^2)AE = 2AE^2 \,.\, X + AE \,.\, X^2,$$

$$(CM) \,.\, JE = (BA + AJ)BJ \,.\, JE = (BA + AE + X)\,(BE - X)X,$$
$$= [2AE^2 - (AB + AE)X + BE \,.\, X - X^2]X,$$
$$= (2AE^2 - 2AE \,.\, X - X^2)X = 2AE^2 \,.\, X - 2AE \,.\, X^2 - X^3.$$

فيكون لدينا بالتالي:

$$2AE^2 \cdot X - 2AE \cdot X^2 - X^3 + k = 2AE^2 \cdot X + AE \cdot X^2 ,$$

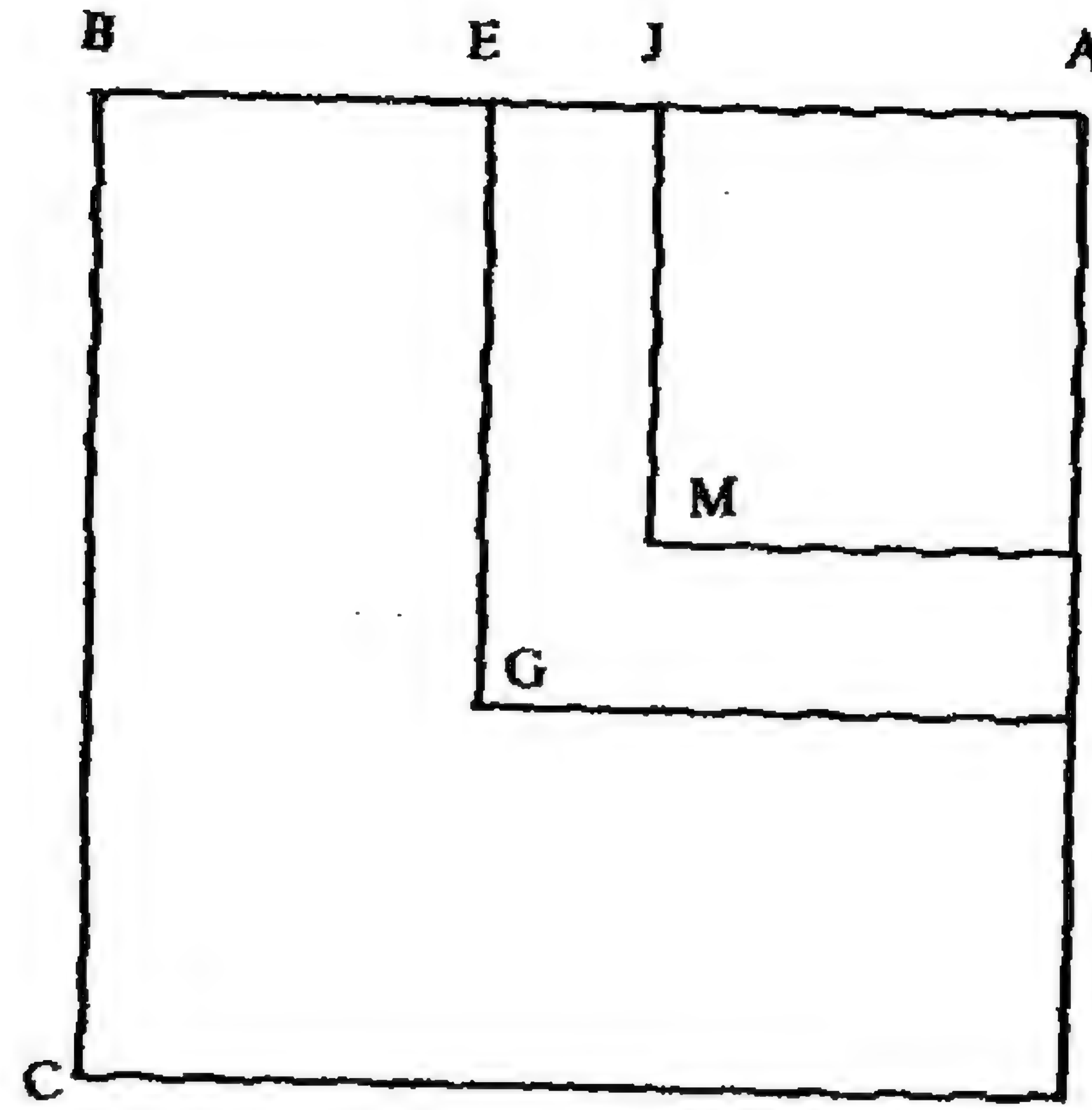
ومنها

$$k = X^3 + 3AE \cdot X^2;$$

فنحصل على X، أي على $x_2 - x_0$، ومنها على:

$$x_2 = x_0 + X.$$

العلاقة بين المعادلة ٢٢ والمعادلة ٢١ (الشكل رقم (٣ ـ ١٩)):



الشكل رقم (٣ ـ ١٩)

ليكن $(AC) = b$، $(AG) = AE^2 = \frac{1}{3}b = x_0^2$ و$x_1 = AJ$ الجذر الأصغر. القسمان اللذان «يخصان» المجسمين الأول والثاني هما بالتالي $(CG).JE$ و$(MG).AJ$، فيكون

$$k = c_0 - c = (CG) \cdot EJ - (MG) \cdot AJ$$

ويكون

$$k + (MG) \cdot AJ = (CG) \cdot EJ.$$

فإذا وضعنا $X = EJ$، نحصل على:

$$(CG) \cdot EJ = \frac{2}{3}b \cdot X,$$

ويكون

$$\begin{aligned}(MG)\ .\ AJ &= (AJ+AE)\ .\ EJ\ .\ AJ,\\ &= (2AE-X)\ .\ X\ .\ (AE-X),\\ &= (X^2+2AE^2-3AE\ .\ X)X,\\ &= X^3+\frac{2}{3}bX-3AE\ .\ X^2,\end{aligned}$$

ومنها المعادلة من النوع ٢١:

$$X^3+k=3AE\ .\ X^2$$

فإذا كان $EJ=X$ هو الجذر الأصغر لهذه المعادلة، يكون لدينا

$$x_2=AE-X=x_0-X.$$

ويمكن إيجاز ما سبق كما يلي: يُحتسب العدد

$$c_0=\frac{2b}{3}\sqrt{\frac{b}{3}};$$

ـ فإذا كان $c>c_0$ تكون المسألة مستحيلة كما في المثال:

$$x^3+7524872=309123x,$$

حيث: $\frac{b}{3}=103041$ و $\sqrt{\frac{b}{3}}=321$، فيكون $c_0=66152322<c$.

ـ وإذا كان $c_0=c$ يكون للمعادلة جذر واحد $x=x_0$.

ـ وإذا كان $c<c_0$ يكون لها جذران؛ وإذا وضعنا $k=c_0-c$ نحصل على الجذر الأكبر بواسطة المعادلة:

$$X^3+\sqrt{\frac{b}{3}}\,X^2=k,$$

حيث $x_2=x_0+X$، وذلك كما في المثال:

$$x^3+13957722=146523x,$$

حيث

$$\frac{b}{3}=48841,\quad \sqrt{\frac{b}{3}}=221,\quad c_0=21587722,\quad k=7630000\ ,\ 3.\sqrt{\frac{b}{3}}=663.$$

فمنها نحصل على المعادلة:

$$X^3+663X^2=7630000,$$

وجذرها (الموجب) $X=100$ وبالتالي:

$$x_2=x_0+100=321.$$

ولإيجاد الجذر الأصغر، نستخدم المعادلة ٢١:

$$X^3 + k = 3\sqrt{\frac{b}{3}}\, X,$$

فيكون $x_1 = x_0 - X$، كما في المثال:

$$x^3 + 137606922 = 531723x,$$

حيث

$$\frac{b}{3} = 177241\ ,\ \sqrt{\frac{b}{3}} = 421 = x_0\ ,\ c_0 = 149236922,\ K = 11630000,$$

ومنها نحصل على المعادلة

$$X^3 + 11630000 = 1263\ X^2,$$

وجذرها الأصغر 100، فيكون

$$x_1 = x_0 - X = 321$$

تعليـق

تكتب المعادلة

$$x^3 + c = bx$$

على الشكل

$$(b - x^2)\ .\ x = c \qquad (١)$$

فلنضع

$$f(x) = (b - x^2)\ .\ x \qquad (٢)$$

١ ـ دراسة النهاية العظمى لِـ (٢)

يأخذ الطوسي $x_0 = \sqrt{\frac{b}{3}}$ ويبرهن ما يلي:

$$f(x_0) = \underset{0<x<b^{\frac{1}{2}}}{Sup}\,[f(x)] \qquad (٣)$$

وذلك ببرهانه أن $f(x) < f(x_0)$ في كل من الحالتين، $x > x_0$ وَ $x < x_0$.

الحالة الأولى: يكفي برهان ما يلي:

$$x_1 > x_0 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_0).$$

لدينا $x_1 > x_0$ وبالتالي:

$$f(x_0) = (b - x_1^2)x_0 + (x_1^2 - x_0^2)x_0,$$
$$f(x_1) = (b - x_1^2)x_0 + (b - x_1^2)(x_1 - x_0).$$

لكن

$$2x_0^2 = b - x_0^2 = (b^{\frac{1}{2}} + x_0)\ (b^{\frac{1}{2}} - x_0),$$

ومنها

$$(x_1 + x_0)x_0 = [(x_1 - x_0) + 2x_0]x_0 > 2x_0^2,$$

وأيضاً

$$b - x_1^2 = (b^{\frac{1}{2}} + x_1)\ (b^{\frac{1}{2}} - x_1) < b - x_0^2,$$

ومنها

$$b - x_1^2 < 2x_0^2,$$

فيحصل

$$(b^{\frac{1}{2}} + x_1)\ (b^{\frac{1}{2}} - x_1) < [(x_1 - x_0) + 2x_0]x_0,$$

ويكون

$$(b - x_1^2)\ (x_1 - x_0) < (x_1^2 - x_0^2)\ .\ x_0$$

ومنها

$$f(x_1) < f(x_0).$$

الحالة الثانية: يكفي برهان ما يلي:

$$x_2 < x_0 \Longrightarrow f(x_2) < f(x_0).$$

لدينا

$$2x_0^2 = b - x_0^2 = (b^{\frac{1}{2}} + x_0)\ (b^{\frac{1}{2}} - x_0),$$

ومنها

$$(x_2 + x_0)x_2 = 2x_2^2 + (x_0 - x_2)x_2 < 2x_0^2$$

وأيضاً

$$(b^{\frac{1}{2}} + x_0)\ (b^{\frac{1}{2}} - x_0) > (x_2 + x_0)x_2;$$

لكن، أخذاً في الاعتبار أن $x_2 < x_0$، لدينا:

$$f(x_0) = (b - x_0^2)x_2 + (b - x_0^2)\ (x_0 - x_2)$$

ومنها

$$f(x_0) > (b - x_0^2)x_2 + (x_2 + x_0)\ (x_0 - x_2)\ .\ x_2 > (b - x_2^2)x_2,$$

فيكون

$$f(x_0) > f(x_2);$$

وبنتيجة دراسة الحالتين المذكورتين نكون قد حصلنا على (٣).

ملاحظة: على غرار ما قام به بالنسبة إلى المعادلة ٢١، لا يشير الطوسي إلى ما أوصله لإيجاد $x_0 = \sqrt{\frac{b}{3}}$.

٢ ـ احتساب النهاية العظمى

النهاية العظمى لِـ $f(x)$ هي:

$$f(x_0) = \frac{2b}{3} \cdot \sqrt{\frac{b}{3}} = 2\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = 2x_0^3 \qquad (٤)$$

مما يسمح بتمييز الحالات التالية:

ـ إذا كان $c > 2\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ فالمسألة لا حل لها.

ـ إذا كان $c = 2\left(\frac{b}{3}\right)3$، يكون $x_0 = \left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ حلاً مزدوجاً، فلدينا:

$$b \cdot \left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = 2\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = c$$

وهو الحل الوحيد في هذه الحالة لأن دراسة النهاية العظمى أظهرت أن:

$$x' \neq x_0 \Longrightarrow f(x') < f(x_0)$$

ـ وأخيراً، إذا كان $c < 2\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$، يكون للمعادلة حلّان، x_1 و x_2:

$$x_1 < x_0 < x_2.$$

٣ ـ تحديد الجذر الأصغر x_1

ليكن $c_0 = f(x_0)$ وليكن X حل المعادلة من النوع ٢١:

$$X^3 + (c_0 - c) = 3x_0X^2 \qquad (٥)$$

نُذكّر أن لهذه المعادلة، في ظل شروط الطوسي، حلين وأن X هو الحل الأصغر. فلكي يكون لِـ (٥) حل يكفي أن يتحقق الشرط:

$$c_0 - c < 4x_0^3.$$

لكن $c_0 = 2x_0^3$، فالشرط المذكور محقق.

ومن جهة أخرى، إذا كان X_1 و X_2 حلّي المعادلة (٥) يكون

$$X_1 < 2x_0 < X_2 .$$

ولقد رأينا، إضافة إلى ذلك، ونحن بصدد دراسة المعادلة ٢١ أنه عندما يكون $c_0 - c_1 < 2x_0^3$، يكون $X_1 < x_0$. إلا أن الطوسي، يصل إلى هذه النتيجة، بطريقة مختلفة بدل استنتاجها من دراسة المعادلة ٢١.

بعد ذلك يبرهن الطوسي أن $x_1 = x_0 - X$، مستخدماً:

$$f(x_0) = (b - x_0^2) \,.\, x_1 + (b - x_0^2) \,.\, X$$
$$= (b - x_0^2)x_1 + (x_0^2 - x_1^2) \,.\, x_1 + X^2 \,.\, (3x_0 - X),$$

ومنها يستنتج استناداً إلى (٥)

$$f(x_0) = (b - x_1^2) \,.\, x_1 + f(x_0) - c$$

فيكون

$$c = (b - x_1^2) \,.\, x_1,$$

ويكون x_1 بالتالي الجذر الأصغر.

٤ ـ تحديد الجذر الأكبر x_2

إذا كان X الجذر الوحيد للمعادلة من النوع ١٥ التالية:

$$X^3 + 3x_0X^2 = f(x_0) - c \qquad (٦)$$

يكون $X < x_0$ و $x_2 = x_0 + X$.

وهنا لا يقدّم الطوسي أي برهان، مرجعاً القارئ إلى ما تقدّم ـ انظر الهامش رقم (٤) من دراسة هذه المعادلة في هذا الفصل.

إن دراسة المعادلة (٦) تظهر أن $X < x_0$ وأن تأكيد الطوسي صحيح. لنبرهن أن $x_2 = x_0 + X$. فلدينا ما يلي:

$$(b - x_0^2) \,.\, x_0 = (b - x_2^2)x_0 + (x_2^2 - x_0^2) \,.\, x_0.$$

لكن

$$(x_2^2 - x_0^2) = 2Xx_0 + X^2$$

فيكون

$$(x_2^2 - x_0^2)x_0 = 2x_0^2 \,.\, X + X^2x_0.$$

لكن

$$\begin{aligned}2x_0^2 &= (b - x_2^2) + (x_2^2 - x_0^2)\\ &= (b - x_2^2) + (2x_0 + X)X;\end{aligned}$$

فيحصل

$$f(x_0) = c_0 = (b - x_2^2)x_0 + (b - x_2^2)X + (2x_0 + X)X^2 + x_0X^2,$$

ومنها

$$c_0 = (b - x_2^2)x_2 + 3x_0X^2 + X^3.$$

لكن

$$3x_0X^2 + X^3 = c_0 - c,$$

ومنها

$$c_0 = (b - x_2^2)x_2 + c_0 - c$$

فيكون

$$x_2^3 + c = bx_2,$$

ويكون x_2 جذراً للمعادلة ٢٢.

٥ ـ العلاقة بين المعادلة ٢٢ والمعادلة ١٥

إذا كان x_2 الجذر الأكبر للمعادلة ٢٢ يكون $X = x_2 - x_0$ جذر المعادلة من النوع ١٥ :

$$X^3 + 3x_0X^2 = c_0 - c$$

فمن المعطيات، لدينا:

$$c = (b - x_2^2) \,.\, x_2$$

ولدينا

$$c_0 = (b - x_0^2) \,.\, x_0,$$

فإذا ألقينا القسم المشترك وهو $(b - x_2^2)x_0$ نحصل على:

$$c_0 - c = (x_2^2 - x_0^2)x_0 - (b - x_2^2)\ (x_2 - x_0).$$

لكن

$$(x_2^2 - x_0^2)x_0 = (2x_0 + X)X \,.\, x_0 = 2x_0^2X + x_0X^2$$

وَ

$$\begin{aligned}(b - x_2^2)(x_2 - x_0) &= (3x_0^2 - x_2^2)X\\ &= [2x_0^2 - (x_2^2 - x_0^2)]X = [2x_0^2 - (2x_0 + X) \,.\, X]X\\ &= 2x_0^2X - 2x_0X^2 - X^3.\end{aligned}$$

فينتج

$$c_0 - c = 3x_0X^2 + X^3.$$

وهذه المعادلة تعطي X التي تعطي بدورها x_2 $(x_2 = x_0 + X)$.

٦ ـ العلاقة بين المعادلة ٢٢ والمعادلة ٢١

إذا كان x_1 الجذر الأصغر للمعادلة ٢٢ يكون $X = x_0 - x_1$ جذر المعادلة من النوع ٢١ التالية:

$$X^3 + c_0 - c = 3x_0X^2$$

فلدينا

$$c_0 = (b - x_0^2)x_0 = (b - x_0^2)x_1 + (b - x_0^2)\ .\ X$$

ولدينا

$$c = (b - x_1^2)x_1 = (b - x_0^2)x_1 + (x_0^2 - x_1^2)x_1,$$

فيكون

$$c_0 - c = (b - x_0^2)X - (x_0^2 - x_1^2)x_1.$$

لكن

$$\begin{aligned}(x_0^2 - x_1^2)x_1 &= (x_0 + x_1)\ (x_0 - x_1)x_1\\ &= (2x_0 - X)\ .\ X\ .\ (x_0 - X) = (2x_0^2 - 3x_0X + X^2)X\\ &= X^3 + 2x_0^2X - 3x_0X^2;\end{aligned}$$

فينتج

$$c_0 - c = 3x_0X^2 - X^3,$$

أو

$$X^3 + c_0 - c = 3x_0X^2$$

والمعادلة الأخيرة هذه تعطي X فينتج $x_1 = x_0 - X$.

المعادلة ٢٣: $x^3 + ax^2 + c = bx$

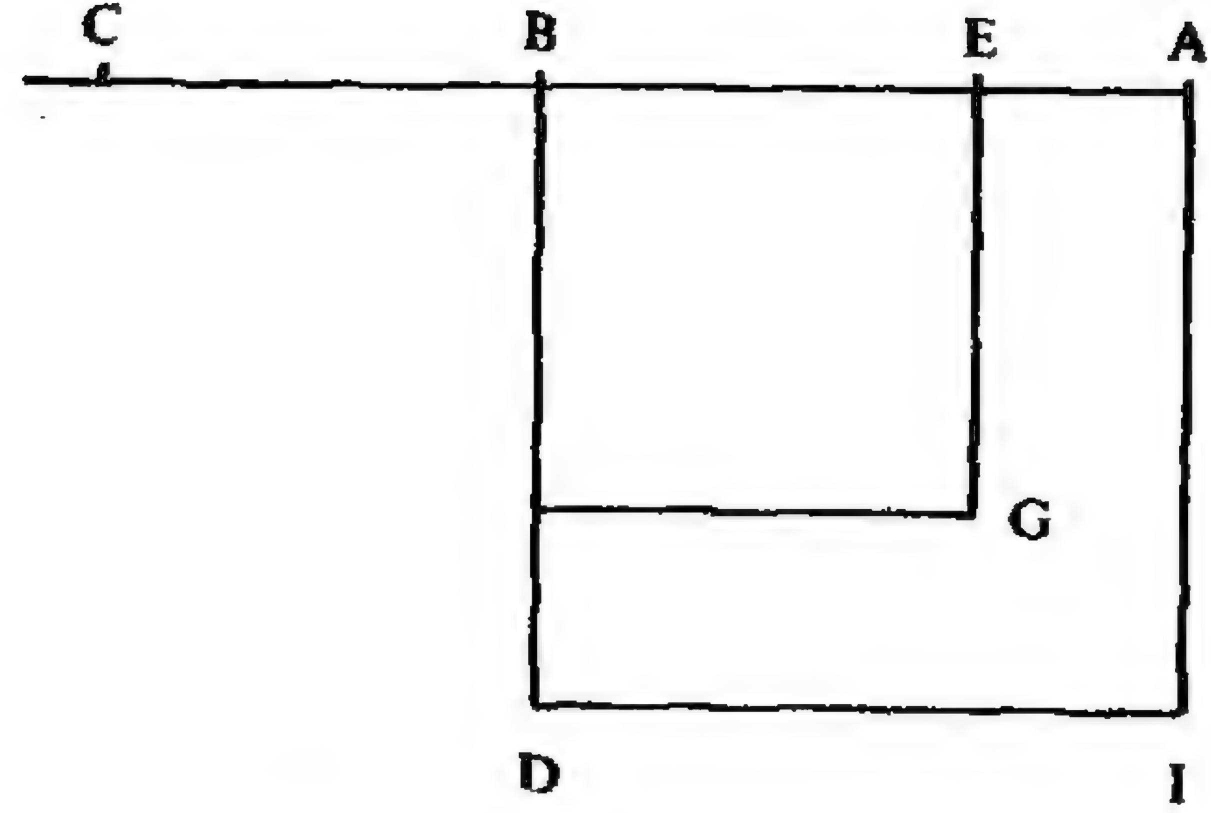
ليكن

$$BC = a \quad \text{وَ} \quad (AD) = AB^2 = b$$

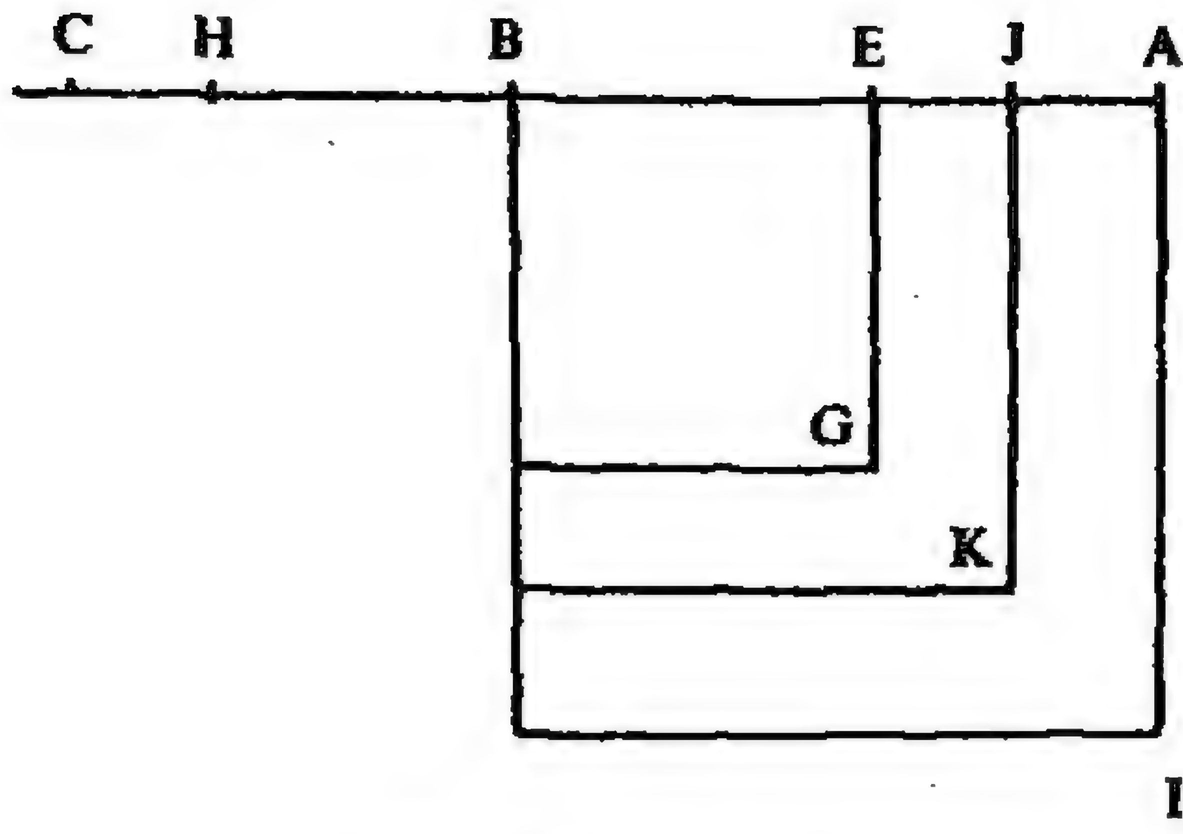
تُكتب المعادلة على الشكل:

$$bx - x^3 = c + ax^2$$

فيكون إذن $b > x^2$ وَ $AB > x$.



الشكل رقم (٣ ـ ٢٠)



الشكل رقم (٣ ـ ٢١)

وليكن $BE = x$، فيكون لدينا:

$$(AD) \cdot BE = b.BE = BE^3 + a.BE^2 + c$$
$$= (BG) \cdot BE + [(AD) - (BG)] \cdot BE,$$

فيكون

$$(IG) \cdot BE = [(AD) - (BG)] \cdot BE = BC \cdot (BG) + c \qquad (١)$$

فإذا تعذّرت قسمة AB على نقطة E بحيث تتحقق العلاقة (١)، تكون المسألة مستحيلة.

دراسة النهاية العظمى

ليكن $BH = \frac{2a}{3}$ وليكن BE حلّ المعادلة:

$$x^2 + \frac{2}{3}a.x = \frac{1}{3}b \qquad (٢)$$

وليكن $(BG) = BE^2$؛ فإذا وضعنا:

$$(IG) \cdot BE - (BG) \cdot BC = c_0,$$

فلن يوجد أي عدد x، $(x \neq BE)$، يحقق

$$bx - x^3 - ax^2 \geq c_0,$$

هذا يعني أن أي عدد x، مختلف عن BE يحقق حتماً

$$bx - x^3 - ax_2 < c_0,$$

فإذا كان $c > c_0$ تكون المسألة مستحيلة.

الحالة الأولى: $BJ > BE$ (الشكل رقم (٣ ـ ٢١)):

إذا وضعنا $c = (b - BJ^2) \,.\, BJ - BC \,.\, BJ^2$ يكون $c < c_0$. وإذا كانت K نقطة بحيث يكون $(BK) = BJ^2$، يكون لدينا:

$$(IG) \,.\, BE = (IK) \,.\, BE + (KG) \,.\, BE \qquad (٣)$$

$$(b - BJ^2) \,.\, BJ = (b - BJ^2) \,.\, BE + (b - BJ^2).EJ \qquad (٤)$$
$$= (IK) \,.\, BE + (IK) \,.\, EJ.$$

فمن (٣) يبقى $(KG) \,.\, BE$ ومن (٤) يبقى $(IK) \,.\, EJ$. ولكن، لدينا

$$(BG) \,.\, BC < (BK) \,.\, BC,$$

كما أن لدينا

$$(BK) \,.\, BC = (BG) \,.\, BC + (KG) \,.\, BC.$$

فتتوجب علينا إذن مقارنة:

$(KG) \,.\, BE - (BG) \,.\, BC$ وَ $(IK) \,.\, EJ - (BK) \,.\, BC$

أي مقارنة

$(KG)BE$ وَ $(IK) \,.\, EJ - (KG) \,.\, BC$

أو

$(KG) \,.\, (BE + BC)$ وَ $(IK) \,.\, EJ$

أي في النهاية، مقارنة

$(KG)EC$ وَ $(IK) \,.\, EJ$.

فإذا برهنا أن

$$(KG) \,.\, EC > (IK) \,.\, EJ$$

نكون قد برهنا العلاقة المطلوبة.

لهذه الغاية، نذكر أن لدينا:

$$3BE^2 + 2BC \,.\, BE = (AD),$$

وبالتالي

$$2EC \,.\, BE = 2BE^2 + 2BC \,.\, BE = (AD) - BE^2 = (IG), \qquad (٥)$$

فيكون

$$2EC \cdot BE = (AB + BE) \cdot AE,$$

ومنها

$$\frac{AB + BE}{2BE} = \frac{EC}{AE} \qquad (٦)$$

لكن

$$(IK) < (IG),$$

فيكون

$$(AB + BJ) \cdot AJ < 2EC \cdot BE,$$

ونحصل على

$$\frac{AB + BJ}{2BE} < \frac{EC}{AJ} \, .$$

لكن

$$\frac{AB + BJ}{2BE} > \frac{AB + BJ}{BE + BJ} \quad (\text{لأن } BJ > BE)$$

فيكون

$$\frac{AB + BJ}{BE + BJ} < \frac{EC}{AJ} \, .$$

فينتج

$$\frac{AB + BJ}{BE + BJ} \cdot \frac{AJ}{JE} = \frac{(IK)}{(KG)} < \frac{EC}{AJ} \cdot \frac{AJ}{JE} = \frac{EC}{EJ} \, ,$$

ومنها

$$(IK) \cdot JE < (KG) \cdot EC;$$

فنحصل على المتباينة المطلوبة.

الحالة الثانية: $BM < BE$ (الشكل رقم (٣ ـ ٢٢)):

إذا وضعنا

$$c = (b - BM^2)BM - BC \cdot BM^2$$

يكون $c < c_0$. فإذا وضعنا $(BN) = BM^2$ يكون

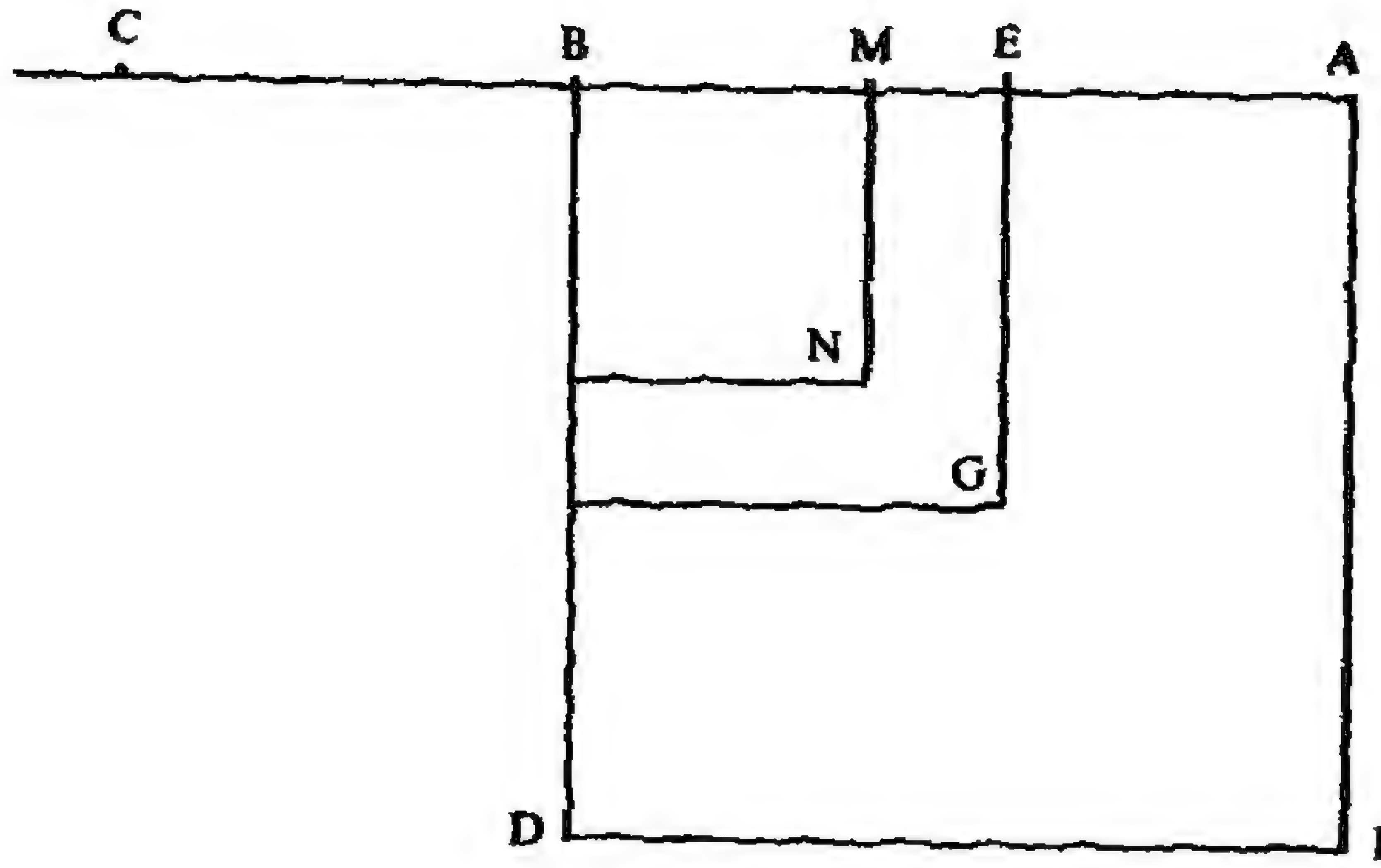
$$(IG) \cdot BE = (IG) \cdot BM + (IG) \cdot EM$$

ويكون

$$(b - BM^2) \cdot bM = (IN) \cdot BM = (IG) \cdot BM + (GN) \cdot BM$$

فتبقى علينا مقارنة

$(IG) \cdot EM$ وَ $(GN) \cdot BM - BC \cdot BM^2$



الشكل رقم (٣ ـ ٢٢)

لكن

$$BC \,.\, BM^2 = BC \,.\, (BN) = BG \,.\, (BG) - BC \,.\, (GN),$$

فيتوجب علينا مقارنة

$$(GN) \,.\, (BM + BC) = (GN) \,.\, MC \quad \text{وَ} \quad (IG) \,.\, EM$$

ولكن، لدينا

$$\frac{AB+BE}{2EB} = \frac{CE}{AE}$$

وكذلك

$$\frac{AB+BE}{EB+BM} > \frac{AB+BE}{2BE}$$

وَ

$$\frac{CM}{AE} < \frac{CE}{AE}\ ,$$

وبالتالي

$$\frac{AB+BE}{EB+EM} > \frac{CM}{AE}\ .$$

فيكون

$$\frac{(AB+BE)}{EB+BM} \cdot \frac{AE}{EM} = \frac{(IG)}{(GN)} > \frac{CM}{AE} \cdot \frac{AE}{EM} = \frac{CM}{EM},$$

ونحصل على

$$(IG) \,.\, EM > (GN) \,.\, CM,$$

وهذا ما يعطي المتباينة المطلوبة.

وبعد أن برهن الطوسي على أنه لو كان BE جذراً للمعادلة (٢) فإن E يحقق (٦)، يبرهن العكس: إذا كان E يحقق (٦)، يكون BE، العدد الأول المطلوب، جذراً للمعادلة (٢).

فالعلاقة (٦) تكتب على الشكل التالي:

$$(AB + BE) \,.\, AE = 2BE \,.\, EC,$$

فإذا وضعنا $BE = x$ نحصل على:

$$(\sqrt{b} + x)\ (\sqrt{b} - x) = 2x(a + x),$$

أي على

$$b - x^2 = 2x^2 + 2ax,$$

ومنها

$$b = 3x^2 + 2ax,$$

أي

$$\frac{b}{3} = x^2 + \frac{2a}{3} x \,.$$

ليكن الآن x_0 حلاً لهذه المعادلة، فيكون

$$c_0 = (b - x_0^2) \,.\, x_0 - a x_0^2 \,.$$

إن الدراسة السابقة تُظهر أن لدينا ما يلي:

- إذا كان $c > c_0$ تكون المسألة مستحيلة.
- إذا كان $c = c_0$ تكون المسألة ممكنة ويكون x_0 حلاً.
- إذا كان $c < c_0$ يكون للمسألة حلّان x_1 وَ x_2 يحققان:

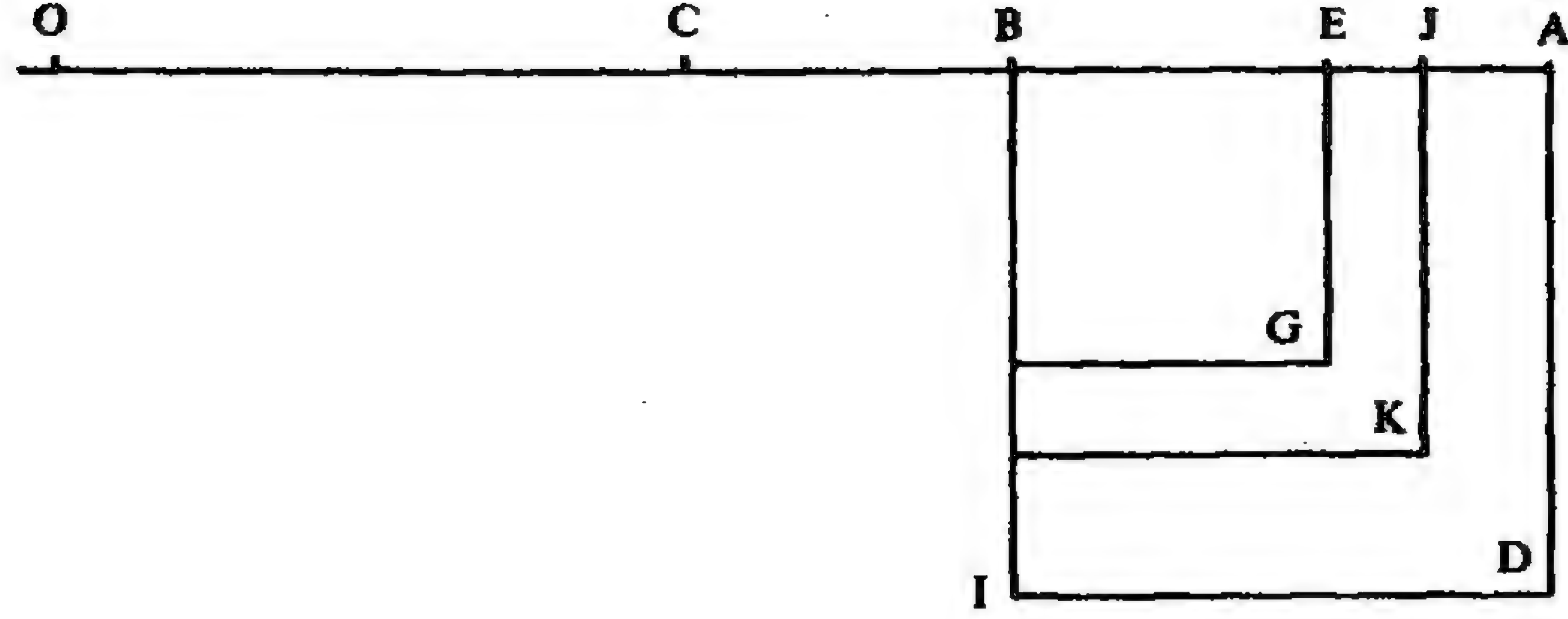
$$x_1 < x_0 < x_2.$$

تحديد الجذر الأكبر x_2 (الشكل رقم (٣ - ٢٣)):

ليكن $BC = a$ على امتداد AB وليكن $CO = 2BE$. فبما أن BO، BC و CO معلومة، يكون EO معلوماً.

ليكن $k = c_0 - c$ ولنأخذ المعادلة من النوع (١٥)

$$x^3 + EO \,.\, x^2 = k$$



الشكل رقم (٣ ـ ٢٣)

وليكن EJ حل هذه المعادلة. يستنتج الطوسي (راجع التعليق) أن $EJ < AE$ ويبرهن أن $BJ = BE + EJ$ هو الحل المطلوب. فلدينا ما يلي:

$$(GK) \,.\, CE = 2BE \,.\, CE \,.\, EJ + EJ^2 \,.\, CE.$$

لكن، استناداً إلى (٥)، لدينا $2BE \,.\, CE = IG$، فيكون

$$(GK) \,.\, CE = EJ^2 \,.\, CE + (IG) \,.\, EJ,$$
$$= EJ^2 \,.\, CE + (IK) \,.\, EJ + (KG) \,.\, EJ.$$

لكن

$$(GK) \,.\, EJ = 2BE \,.\, EJ^2 + EJ^3 = CO \,.\, EJ^2 + EJ^3$$

فيكون

$$(GK) \,.\, EC = EJ^2 \,.\, EC + EJ^2 \,.\, CO + EJ^3 + (IK) \,.\, EJ$$
$$= EJ^2 \,.\, JO + (IK) \,.\, EJ.$$

وبطرح $(KG) \,.\, BC$ من كلا الطرفين

$$(KG) \,.\, BE = (IK) \,.\, EJ + EJ^2 \,.\, OJ - (KG) \,.\, BC;$$

وبإضافة $(IK) \,.\, BE$ إلى كل من الطرفين

$$(IG) \,.\, BE = (IK) \,.\, BJ + EJ^2 \,.\, OJ - (KG) \,.\, BC;$$

وبطرح $BE^2 \,.\, BC$ من كلا الطرفين

$$(IG) \,.\, BE - BE^2 \,.\, BC = (IK) \,.\, BJ + EJ^2 \,.\, OJ - (BK) \,.\, BC$$
$$= (IK) \,.\, BJ - BJ^2 \,.\, BC + EJ^2 \,.\, OJ.$$

لكن، استناداً إلى المعادلة ١٥، لدينا:

$$c + EJ^2 \,.\, JO = c_0,$$

فيكون

$$(IK) . BJ - BJ^2 . BC + EJ^2 . JO = c + EJ^2 . JO,$$

ومنها

$$(IK) . BJ - BJ^2 . BC = c,$$

وبالتالي

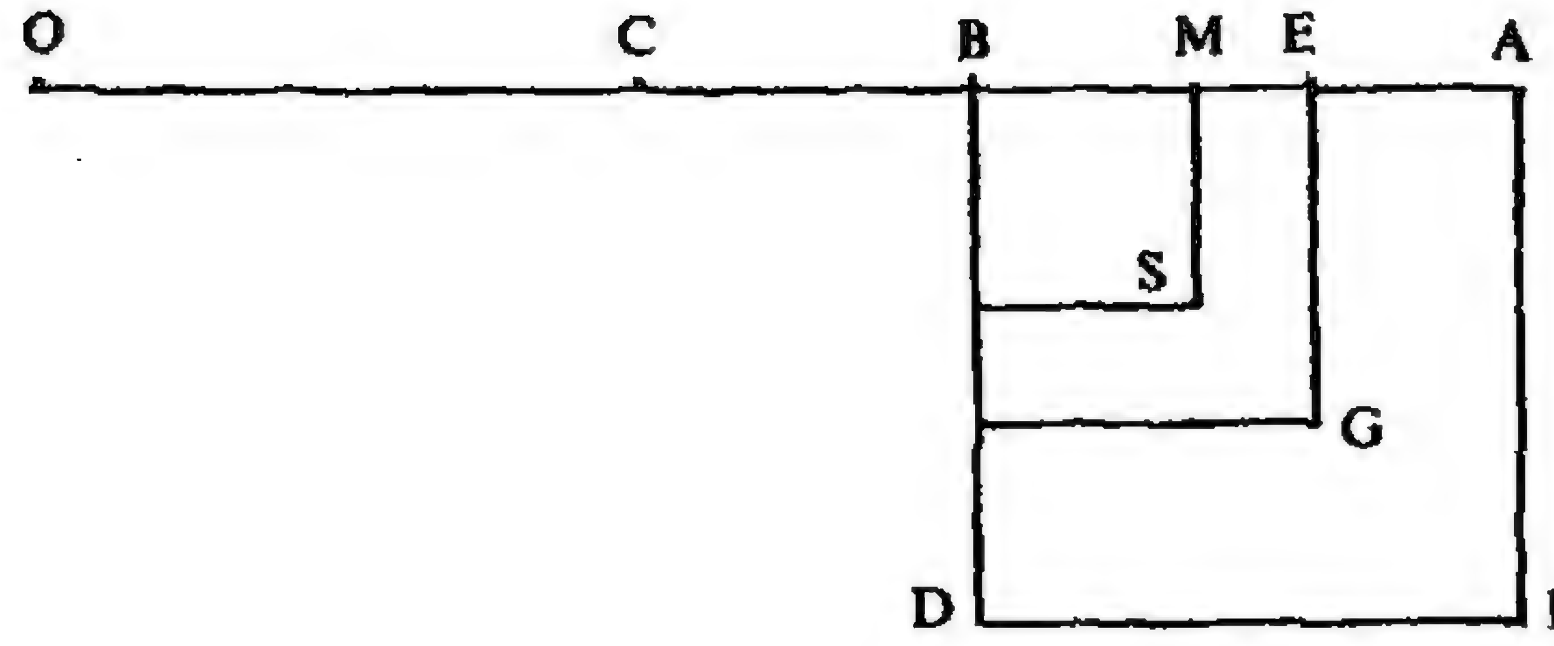
$$(AB^2 - BJ^2)BJ - BJ^2 . BC = c$$

فيكون

$$BJ^3 + aBJ^2 + c = b . BJ$$

فيكون BJ الجذر الأكبر للمعادلة ٢٣.

تحديد الجذر الأصغر x_1 (الشكل رقم (٣ ـ ٢٤)):



الشكل رقم (٣ ـ ٢٤)

ليكن $CO = 2BE$، $k = c_0 - c$، وليكن EM حلاً للمعادلة

$$x^3 + k = EO . x^2$$

وهي من النوع ٢١، فيكون

$$EM^2 . MO = k,$$

واستناداً إلى المسألة السابقة

$$EM < BE$$

ويكون الحل المطلوب هو $BM = BE - EM$. وبرهانه أن لدينا، استناداً إلى (٥)

$$(IG) = 2BE . CE$$

ومنها

$$\begin{aligned}(IG) . EM &= 2BE . CE . EM\\ &= (GS) . EC + EM^2 . EC\\ &= (GS) . EM + (GS) . MC + EM^2 . EC\\ &= EM^2 . EB + BM . EM^2 + (GS) . MC + EM^2 . EC.\end{aligned}$$

لكن

$$EM^2 \,.\, EC = EM^2 \,.\, EB + EM^2 \,.\, BC,$$

فيكون

$$(IG) \,.\, EM = 2EM^2 \,.\, BE + EM^2 \,.\, (MB + BC) + (GS) \,.\, MC$$
$$= EM^2 \,.\, MO + (GS) \,.\, MC.$$

فإذا طرحنا BC . (GS) من كلا الطرفين نحصل على:

$$(IG) \,.\, EM - (GS) \,.\, BC = (GS) \,.\, MB + EM^2 \,.\, MO;$$

وإذا أضفنا BM . (IG) إلى كلا الطرفين نحصل على:

$$(IG) \,.\, EB - (GS) \,.\, BC = (IS) \,.\, MB + EM^2 \,.\, MO;$$

وإذا طرحنا BC . BM^2 من كلا الطرفين نحصل على:

$$c_0 = (IG) \,.\, EB - (BG) \,.\, BC = (IS) \,.\, MB + EM^2 \,.\, MO - BM^2 \,.\, BC.$$

لكن

$$c_0 = k + c = EM^2 \,.\, MO + c$$

فيكون

$$c = (AB^2 - MB^2) \,.\, MB - BC \,.\, BM^2$$

أي

$$c = b \,.\, MB - MB^3 - a \,.\, BM^2,$$

فيكون BM هو الحل المطلوب.

العلاقة بين المعادلة ٢٣ والمعادلة ١٥ (الشكل رقم (٣ ـ ٢٥)):

تبيّن مما سبق أن:

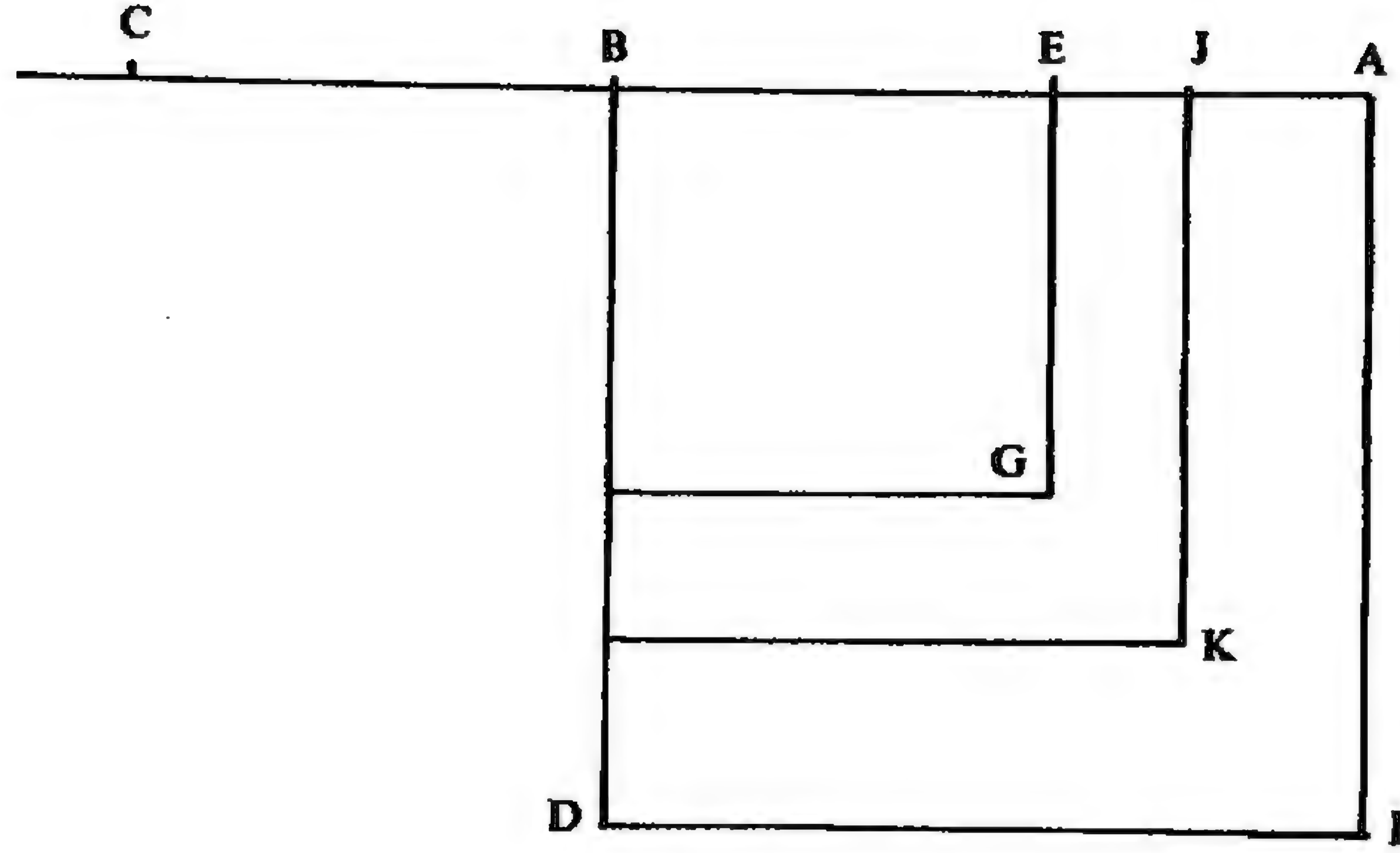
$$c_0 - c = (KG) \,.\, EC - (IK) \,.\, JE.$$

وبوضع $EJ = X$ نحصل على:

$$(KG) \,.\, EC = (BE + BJ)EJ \,.\, EC = (2BE + EJ)EJ \,.\, EC$$
$$= (2x_0 + X) \,.\, X \,.\, EC$$

وَ

$$(IK) \,.\, JE = (AB + BJ) \,.\, AJ \,.\, JE$$
$$= (AB + BE + EJ)\,(AE - EJ) \,.\, JE$$
$$= (AB + BE) \,.\, AE \,.\, JE - (AB + BE)EJ^2 + AE \,.\, EJ^2 - EJ^3.$$



الشكل رقم (٣ ـ ٢٥)

فيكون

$$(IK) . JE + c_0 - c = (KG) . EC = 2BE . CE . EJ + CE . EJ^2$$

و

$$(AB + BE) . AE . JE + c_0 - c = JE^2(2BE + CE) + JE . 2BE . CE + JE^3,$$

لكن، استناداً إلى (٥)، لدينا:

$$(AB + BE)AE = 2BE . CE,$$

ومنها المعادلة من النوع ١٥:

$$c_0 - c = k = X^2(3x_0 + a) + X^3$$

وحل هذه المعادلة هو $X = EJ$، لذلك يكون

$$x_2 = x_0 + X = BE + EJ = BJ.$$

العلاقة بين المعادلة ٢٣ والمعادلة ٢١ (الشكل رقم (٣ ـ ٢٦)):

لقد بينّا أن:

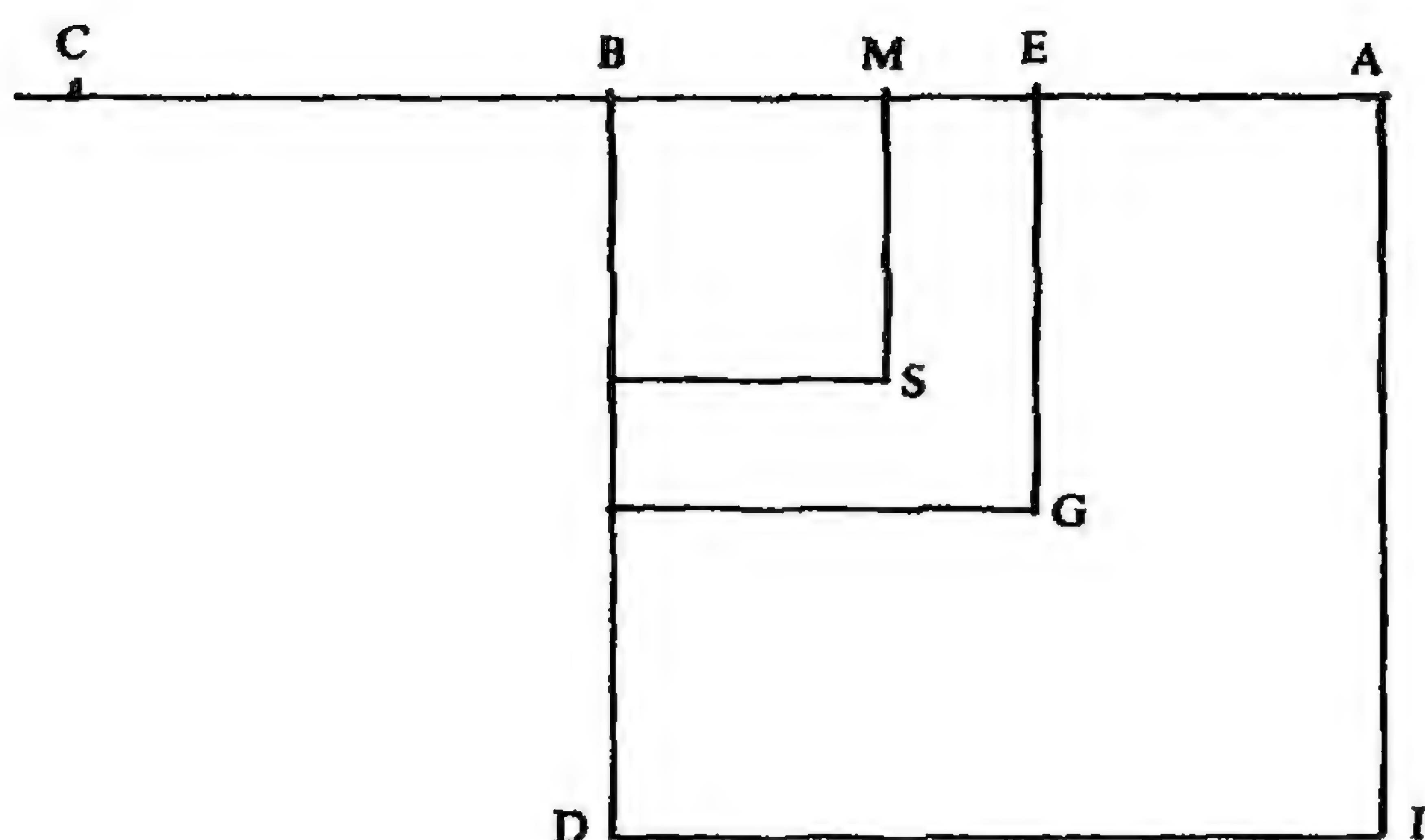
$$c_0 - c = (IG)EM - (GN)MC.$$

وبوضع $EM = X$ نحصل على:

$$c_0 - c = (IG)X - (EM + BM) . X . (EC - X),$$

ومنها

$$k = c_0 - c = (IG)X - (2BE . X - X^2)(EC - X)$$
$$= (IG) . X - [2BE . CE . X + X^3 - X^2(2BE + EC)]$$



الشكل رقم (٣ ـ ٢٦)

و

$$k + 2BE \cdot CE \cdot X + X^3 = (AB + BE)AE \cdot X + X^2(2BE + EC)$$

ومنها المعادلة من النوع ٢١:

$$k + X^3 = X^2(3x_0 - a)$$

هذه المعادلة تعطي $X = EM$ فنحصل على:

$$x_1 = x_0 - X = BE - EM = BM.$$

مثال: (يكون فيه x_0 جذراً).

في المعادلة

$$x^3 + 30x^2 + 69\ 243\ 552 = 328\ 383x.$$

نحتسب $\frac{b}{3}$ وَ $\frac{2a}{3}$:

$$\frac{b}{3} = 109\ 461,\ \frac{2a}{3} = 20.$$

فتُكتب المعادلة

$$x^2 + \frac{2a}{3}x = \frac{b}{3}$$

على الشكل

$$x^2 + 20x = 109\ 461$$

ومنها نحصل على

$$x_0 = 321.$$

ونحتسب:

$$x_0^2 = 103\ 041, \quad b - x_0^2 = 225\ 342,$$

ومنها

$$c_0 = 321 \times 225\ 342 - 30 \times 103\ 041,$$

$$c_0 = 72\ 334\ 782 - 3\ 091\ 230 = 69\ 243\ 552.$$

فيكون $c_0 = c$ ويكون للمعادلة حلّ وحيد هو $x_0 = 321$.

ولو كان $a' = a$، $b' = b$، $c' = c + \alpha$ حيث α عدد موجب، لكانت المعادلة ذات المعاملات a'، b' وَ c'، مستحيلة.

مثال عن احتساب x_2:

نأخذ المعادلة

$$x^3 + 60x^2 + 57\ 127\ 086 = 300\ 267x\ .$$

فيكون للمعادلة $\frac{b}{3} = x\frac{2a}{3} + x^2$ جذرٌ هو $x_0 = 297$، فيكون

$$c_0 = 57\ 688\ 686$$

ويكون $c_0 > c$، فالمسألة ممكنة؛ ونحتسب

$$3x_0 + a = 951 \quad ، \quad c_0 - c = 561\ 600$$

ونضع المعادلة من النوع ١٥

$$x^3 + 951x^2 = 561\ 600$$

ذات الجذر $X = 24$، فيكون

$$x_2 = x_0 + X = 321.$$

مثال عن احتساب x_1:

نأخذ المعادلة

$$x^3 + 60x^2 + 88\ 651\ 854 = 398\ 475x\ .$$

فنجد $x_0 = 345$. نحتسب $3x_0 + a = 1095$، وَ $c_0 - c$ ونضع المعادلة من النوع ٢١:

$$x^3 + c_0 - c = 1095x^2$$

فيكون $X = 24$ أحد جذري هذه المعادلة ونستنتج:

$$x_1 = x_0 - X = 321.$$

تعليـق

تُكتب المعادلة

$$x^3 + ax^2 + c = bx$$

على الشكل

$$c = x(b - x^2) - ax^2 \qquad (١)$$

حيث $0 < x < b^{\frac{1}{2}}$.

لنضع

$$f(x) = x(b - x^2) - ax^2. \qquad (٢)$$

١ ـ دراسة النهاية العظمى لِـ (٢)

لدينا

$$f'(x) = b - 3x^2 - 2ax \qquad (٣)$$

ولنأخذ الجذر الموجب، x_0، للمعادلة $(f'(x) = 0)$. إن كل x، مخالف لِـ x_0، $x \in]0, b^{\frac{1}{2}}[$، يحقق العلاقة

$$f(x) < f(x_0).$$

الحالة الأولى: $x_0 < x$ يكفي أن نبرهن العلاقة:

$$x_1 > x_0 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_0).$$

لدينا:

$$(b - x_0^2)x_0 = (b - x_1^2)x_0 + (x_1^2 - x_0^2)x_0,$$
$$(b - x_1^2)x_1 = (b - x_1^2)x_0 + (b - x_1^2)(x_1 - x_0)$$

ومن جهة أخرى

$$ax_0^2 < ax_1^2;$$

فمن الممكن أن نكتب

$$ax_1^2 = ax_0^2 + a(x_1^2 - x_0^2).$$

فلنبرهن أن

$$(x_1^2 - x_0^2)\ (x_0 + a) > (b - x_1^2)\ (x_1 - x_0).$$

لدينا، استناداً إلى (٣):

$$3x_0^2 + 2ax_0 = b,$$

ومنها

$$2(x_0 + a)x_0 = b - x_0^2,$$

لكن

$$b - x_1^2 < b - x_0^2,$$

ومنها

$$(b - x_1^2) < 2(x_0 + a)x_0 < (x_0 + a)\ (x_1 + x_0)$$

فنحصل على

$$(b - x_1^2)\ (x_1 - x_0) < (x_1^2 - x_0^2)\ (x_0 + a),$$

ومنها

$$\begin{aligned}(b - x_1^2)x_0 + (b - x_1^2)(x_1 - x_0) - ax_1^2 &< (b - x_1^2)x_0 \\ &+ (x_1^2 - x_0^2)(x_0 + a) - ax_0^2 - a(x_1^2 - x_0^2),\end{aligned}$$

فيكون

$$f(x_1) < f(x_0).$$

الحالة الثانية: $x < x_0$ يكفي أن نبرهن العلاقة:

$$x_2 < x_0 \Longrightarrow f(x_2) < f(x_0).$$

لدينا

$$\begin{aligned}(b - x_0^2)x_0 &= (b - x_0^2)x_2 + (b - x_0^2)(x_0 - x_2), \\ (b - x_2^2)x_2 &= (b - x_0^2)x_2 + (x_0^2 - x_2^2)x_2, \\ ax_2^2 &= ax_0^2 - a(x_0^2 - x_2^2).\end{aligned}$$

فلنبرهن أن

$$(x_0^2 - x_2^2)\ (a + x_2) < (b - x_0^2)\ (x_0 - x_2).$$

لدينا

$$b - x_0^2 = 2x_0(x_0 + a)$$

ومنها

$$b - x_0^2 > (x_0 + x_2)\ (a + x_2)$$

فيكون

$$\frac{(a+x_2)}{x_0-x_2} < \frac{b-x_0^2}{x_0^2-x_2^2}\ ;$$

وبالتالي

$$(a+x_2)\ (x_0^2-x_2^2) < (x_0-x_2)\ (b-x_0^2)$$

ومنها

$$f(x_2) < f(x_0).$$

نتيجة لدارسة الحالتين الأولى والثانية يتبين أن $f(x_0)$ هي النهاية العظمى لِـ $f(x)$. لذلك يكون لدينا:

- إذا كان $c > f(x_0)$ تكون المسألة مستحيلة.
- إذا كان $c = f(x_0)$ يكون x_0 حلاً (وحيداً) لها.
- إذا كان $c < f(x_0)$ يكون للمسألة حلاّن x_1 و x_2 بحيث $x_1 < x_0 < x_2$.

٢ ـ تحديد x_2

ليكن X الحل الموجب للمعادلة من النوع ١٥:

$$x^3 + (3x_0+a)x^2 = f(x_0) - c = c_0 - c \qquad (٤)$$

حيث $X < b^{\frac{1}{2}} - x_0$.(٥)

---

(٥) تظهر دراسة المعادلة ١٥ أن للمعادلة

$$\varphi(x) = x^3 + (3x_0+a)x^2 = k$$

جذراً موجباً وحيداً، x. ولكي نبرهن أن $x < b^{\frac{1}{2}} - x_0$، يكفي أن نبرهن أن:

$$\varphi(b^{\frac{1}{2}} - x_0) > k$$

ذلك لأن φ تزايدية على الفسحة $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}\varphi(b^{\frac{1}{2}} - x_0) &= (b^{\frac{1}{2}} - x_0)^2(b^{\frac{1}{2}} + 2x_0 + a)\\ &= b^{\frac{3}{2}} - 3b^{\frac{1}{2}}\,x_0^2 + 2x_0^3 + ax_0^2 - 2ab^{\frac{1}{2}}x_0.\end{aligned}$$

ولكن، استناداً إلى (٣) لدينا $2ax_0 = b - 3x_0^2$، لذلك

$$2ab^{\frac{1}{2}}x_0 = b^{\frac{3}{2}} - 3b^{\frac{1}{2}}x_0^2.$$

فيكون

$$\varphi(b^{\frac{1}{2}} - x_0) = 2x_0^3 + ax_0^2.$$

ولنضع $x_2 = x_0 + X$. إن x_2 جذر للمعادلة ٢٣. فلدينا

$$(x_2^2 - x_0^2)\ (a + x_0) = 2x_0\ .\ X(a + x_0) + X^2(a + x_0)$$

فيكون، استناداً إلى (٣):

$$(x_2^2 - x_0^2)(a + x_0) = X^2\ .\ (a + x_0) + (b - x_2^2)X + (x_2^2 - x_0^2)X \qquad (٥)$$

ومن جهة أخرى

$$(x_2^2 - x_0^2)\ .\ X = 2x_0X^2 + X^3,$$

فيكون

$$(x_2^2 - x_0^2)\ (a + x_0) = (3x_0 + a + X)X^2 + (b - x_2^2)X,$$

فإذا أضفنا

$$(b - x_2^2)x_0 - ax_2^2$$

إلى كل من الطرفين، نحصل على:

$$f(x_0) = (b - x_2^2)x_2 - ax_2^2 + (X + 3x_0 + a)X^2 \qquad (٦)$$

لكن، استناداً إلى (٤)

$$c + (X + 3x_0 + a)X^2 = f(x_0),$$

فيكون

$$c = f(x_2)$$

ويكون $x_2 = x_0 + X$ جذراً للمعادلة ٢٣.

نذكر هنا أن النتيجة (٦) التي حصل عليها الطوسي ليست إلا نتيجة للتوسيع

$$f(x_2) = f(x_0 + X) = f(x_0) + Xf'(x_0) - X^2(X + 3x_0 + a)$$

= ومن جهة أخرى، لدينا:

$$k = bx_0 - ax_0^2 - x_0^3 - c$$

$$\varphi(b^{\frac{1}{2}} - x_0) > k \iff 2x_0^3 + ax_0^2 > bx_0 - ax_0^2 - x_0^3 - c$$
$$\iff c > x_0(b - 2x_0 - 3x_0^2).$$

لكن، استناداً إلى (٣)، لدينا

$$b = 2ax_0 + 3x_0^2$$

فهذا الشرط إذن محقق ويكون لدينا

$$x < b^{\frac{1}{2}} - x_0$$

حيث $f'(x_0) = 0$، وهذا ما استخدمه في (٥).

٣ - تحديد x_1

ليكن X الجذر الأصغر للمعادلة من النوع ٢١:

$$x^3 + f(x_0) - c = (3x_0 + a)x^2 \qquad (٧)$$

لدينا $X < x_0$ [٦]. وإذا وضعنا $x_1 = x_0 - X$، يكون x_1 هو الجذر الأصغر المطلوب.

فاستناداً إلى (٣)، لدينا

$$b - x_0^2 = 2x_0(x_0 + a),$$

ومنها

$$\begin{aligned}(b - x_0^2)X &= x_0X^2 + x_1X^2 + (x_0^2 - x_1^2)\ (x_1 + a) + X^2(x_0 + a)\\ &= X^2(x_1 + a + 2x_0) + (x_0^2 - x_1^2)(x_1 + a).\end{aligned}$$

---

(٦) للمعادلة (٧)

$$x^3 + k = ax_2$$

جذران موجبان في الواقع a_1 و a_2 وذلك استناداً إلى دراسة المعادلة ٢١. فلدينا

$$k = bx_0 - ax_0^2 - x_0^3 - c$$

وأخذاً بعين الاعتبار (٣)، يكون لدينا

$$k = ax_0^2 + 2x_0^3 - c$$

ومن جهة أخرى لدينا

$$\frac{4}{27}(3x_0 + a)^3 = 4x_0^3 + 4ax_0^2 + \frac{4a^2x_0}{3} + \frac{4a^3}{27}$$

فيتحقق الشرط:

$$k < \frac{4}{27}(3x_0 + a)^3$$

نضع الآن

$$\varphi(x) = x^2(3x_0 + a) - x^3$$

الدالة φ تصاعدية ضمن الفترة $\left]0,\ 2x_0 + \frac{2a}{3}\right[$، ولدينا

$$0 < a_1 < 2x_0 + \frac{2a}{3} < a_2$$

ولكن نبرهن أن $a_1 < x_0$ يكفي أن نبرهن أن

$$k < \varphi(x_0)$$

وهذا الشرط محقق لأن

$$\varphi(x_0) = x_0^2(3x_0 + a) - x_0^3 = 2x_0^3 + ax_0^2$$

وبإضافة

$$(b - x_0^2)x_1 - (x_0^2 - x_1^2)a - ax_1^2 ,$$

إلى كلا الطرفين، نحصل على:

$$.f(x_0) = f(x_1) + X^2(a + 3x_0 - X) \qquad (٨)$$

واستناداً إلى (٧) نحصل على:

$$c = f(x_1)$$

ويكون X – $x_1 = x_0$ جذراً للمعادلة (٢٣).

ونستطيع أن نقدم بخصوص العلاقة (٨) ملاحظة شبيهة بالتي قدمناها بخصوص العلاقة (٦).

٤ ـ العلاقة بين المعادلة ٢٣ والمعادلة ١٥

إذا كان x_2 الجذر الأكبر للمعادلة ٢٣، يكون $X = x_2 - x_0$ جذراً للمعادلة من النوع ١٥ التالية:

$$x^3 + (3x_0 + a)x^2 = c_0 - c \qquad (٤)$$

فنبرهن كما في السابق أن:

$$f(x_0) - f(x_2) = (x_2^2 - x_0^2)(x_0 + a) - (b - x_2^2)\ (x_2 - x_0);$$

ونضع $X = x_2 - x_0$، فنحصل على:

$$f(x_0) - f(x_2) = X(X + 2x_0)(x_0 + a) - [b - (x_0 + X)^2]X.$$

لكن، استناداً إلى (٣)، لدينا

$$b = 3x_0^2 + 2ax_0,$$

فيكون، بعد التبسيط

$$c_0 - c = X(aX + 3x_0X + X^2) ,$$

ومنها

$$c_0 - c = X^3 + (3x_0 + a)X^2,$$

فيكون $X = x_2 - x_0$ جذراً للمعادلة (٤).

٥ ـ العلاقة بين المعادلة ٢٣ والمعادلة ٢١

إذا كان x_1 الجذر الأصغر للمعادلة ٢٣، يكون $X = x_0 - x_1$ جذراً للمعادلة من النوع ٢١ التالية:

$$x^3 + c_0 - c = (3x_0 + a)X^2 \qquad (٧)$$

فلدينا

$$f(x_0) - f(x_1) = (b - x_0^2)(x_0 - x_1) - (x_0^2 - x_1^2)(a + x_1) \ ,$$

وإذا وضعنا $X = x_0 - x_1$، نحصل على:

$$f(x_0) - f(x_1) = (b - x_0^2)X - X(2x_0 - X)(a + x_0 - X);$$

لكن، استناداً إلى (٣)، لدينا

$$b - x_0^2 = 2x_0^2 + 2ax_0,$$

فيكون

$$f(x_0) - f(x_1) = X(aX + 3x_0X - X^2),$$

ومنها

$$X^3 + (c_0 - c) = (3x_0 + a)X^2,$$

فيكون $X = x_0 - x_1$ جذراً للمعادلة (٧).

المعادلة ٢٤: $x^3 + bx + c = ax^2$

ليكن $AB = a$ و $BC = b^{\frac{1}{2}}$.

تمهيد ١: إذا كان $BC \geq \frac{AB}{2}$ فالمسألة مستحيلة.

فمن المعادلة نحصل على $a > x$. وليكن $BD = x$. بما أن:

$$AB = BD + AD$$

يكون

$$BD^3 + AD \cdot BD^2 = AB \cdot BD^2 \ ;$$

لكن

$$AB \cdot BD^2 = BD^3 + BD \cdot BC^2 + c,$$

ومنها

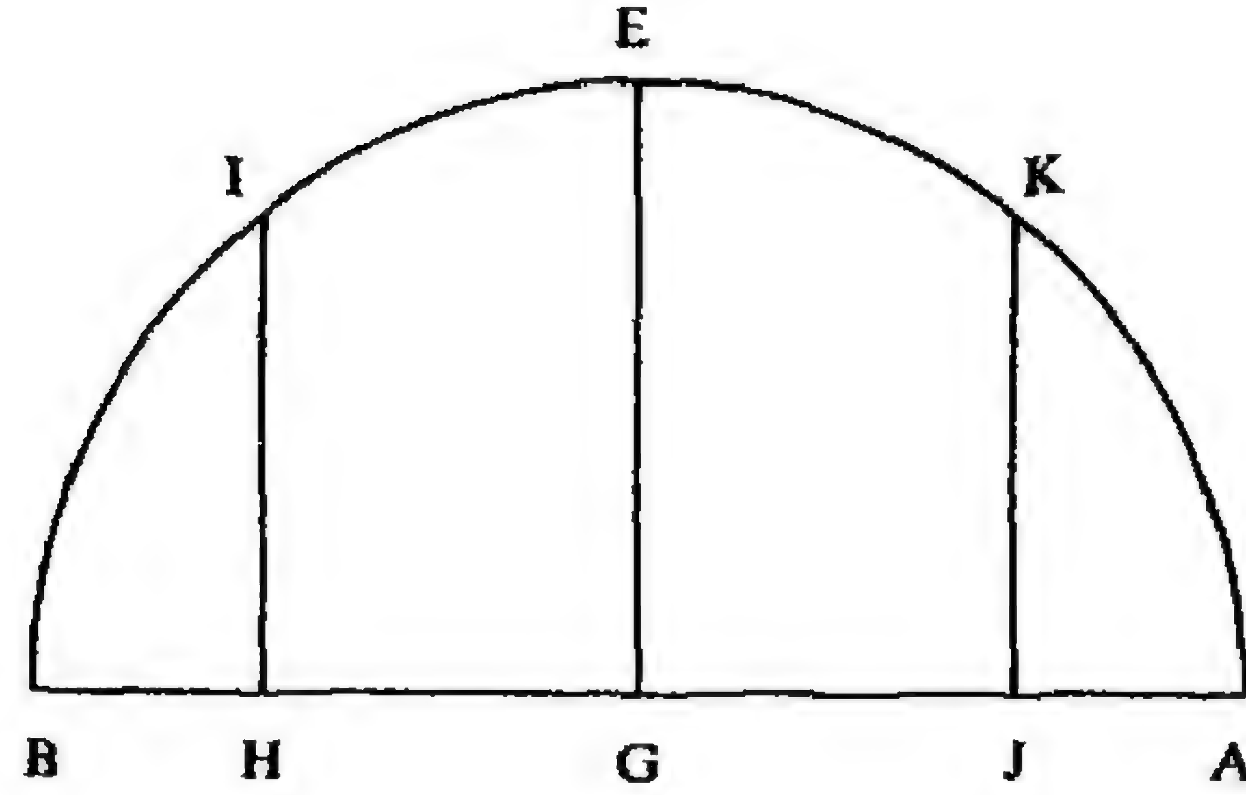
$$AD \cdot BD^2 = BD \cdot BC^2 + c.$$

فلنبرهن أنه إذا كان $BC \geq \frac{AB}{2}$ يكون لدينا العلاقة:

$$AD \cdot BD^2 \leq BC^2 \cdot BD , \qquad (1)$$

التي تدل على استحالة المسألة.

ليكن $\mathscr{C}$ نصف الدائرة ذات القطر AB والمركز G؛ وليكن EG عموداً على AB، فيكون $EG = \frac{AB}{2}$. فإذا كان x جذراً للمعادلة، يكون لدينا حالات ثلاث (الشكل رقم (٣ ـ ٢٧)).



الشكل رقم (٣ ـ ٢٧)

الحالة الأولى: $x = BG = \frac{AB}{2}$.

لدينا

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^3 = AG \cdot BG^2 = BG \cdot BC^2 + c;$$

لكن

$$BC^2 \cdot BG \geq BG^2 \cdot EG,$$

فيكون

$$BC^2 \cdot BG \geq AG \cdot BG^2$$

وتكون العلاقة (١) محققة.

الحالة الثانية: $x \leq \frac{AB}{2}$.

نأخذ $x = BH$ ونأخذ $HI \perp AB$، فيكون

$$BH \,.\, AH = HI^2 \quad \text{(قدرة النقطة } H\text{)}$$

فيكون

$$\frac{BH}{HI} = \frac{HI}{AH} \quad \text{و} \quad \frac{BH^2}{HI^2} = \frac{BH}{AH}$$

ومنها

$$BH^2 \,.\, AH = HI^2 \,.\, BH;$$

لكن

$$HI^2 < BG^2 \quad \text{و} \quad BC^2 \geq BG^2،$$

فيكون

$$BC^2 \,.\, BH \geq HI^2 \,.\, BH = AH \,.\, BH^2.$$

وتكون العلاقة (١) محققة.

الحالة الثالثة: $x > \frac{AB}{2}$.

نضع $x = BJ$ ونأخذ $JK \perp AB$، فيكون

$$\frac{BJ^2}{JK^2} = \frac{BJ}{AJ},$$

ومنها

$$BJ^2 \,.\, AJ = JK^2 \,.\, BJ;$$

لكن

$$JK^2 < BG^2 \quad \text{و} \quad BC^2 \geq BG^2,$$

فيكون

$$BC^2 \,.\, BJ \geq JK^2 \,.\, BJ = AJ \,.\, BJ^2,$$

وتكون بالتالي العلاقة (١) محققة.

نتيجة لما ورد في الحالات الثلاث السابق ذكرها تتبين صحة التمهيد المذكور فيكون:

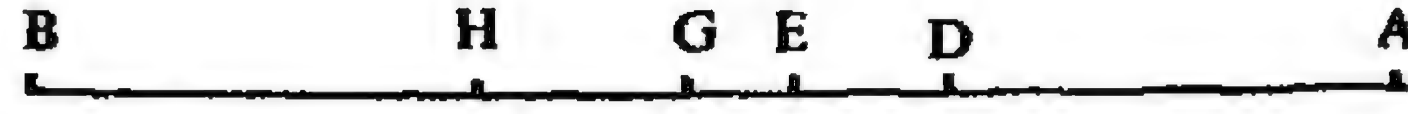
$$BC < \frac{AB}{2}$$

شرطاً ضرورياً لإمكانية حل المعادلة.

إلا أن هذا الشرط الضروري ليس كافياً.

فليكن $BD = \frac{2}{3}AB$ ولتكن E نقطة من BD بحيث يكون

$$BE \,.\, ED = \frac{1}{3}BC^2$$ (الشكل رقم (٣ ـ ٢٨))



الشكل رقم (٣ ـ ٢٨)

فيكون BE جذراً للمعادلة

$$x^2 + \frac{1}{3}b = \frac{2}{3}ax \qquad (٢)$$

وليكن G منتصف AB، فيكون

$$DG = \frac{1}{3}BG = \frac{1}{6}AB,$$

ويكون

$$DG \,.\, BG = \frac{1}{3}BG^2 > \frac{1}{3}BC^2,$$

ولذلك

$$BE \,.\, ED < DG \,.\, BG \qquad (٣)$$

وليكن H منتصف BD. لدينا، استناداً إلى قضية معروفة

$$BG \,.\, GD + GH^2 = BE \,.\, ED + EH^2 = \frac{BD^2}{4}\ ;$$

واستناداً إلى (٣)

$$GH < EH$$

فيكون

$$BE > BG \quad \text{وَ} \quad DE < DG،$$

ومنها $BE > \frac{AB}{2}$.

ليكن:

$$c_0 = BE^2 \,.\, AE - BC^2 \,.\, BE$$

فإذا كان $c > c_0$ تكون المسألة مستحيلة. ولتبيان ذلك، سنبرهن أن كل x مخالف لِـ BE يحقق العلاقة التالية:

$$(a - x) \,.\, x^2 - bx < c_0.$$

الحالة الأولى: $x = BI > BE$ (الشكل رقم (٣ ـ ٢٩)):

الشكل رقم (٣ ـ ٢٩)

لدينا

$$BI^2 \,.\, AI - BC^2 \,.\, BI < c_0$$

ليكن $EK \perp AB$ وَ $EK = BC$ ولنصل BK. فيكون لدينا:

$$BE^2 \,.\, AE = BE^2 \,.\, AI + BE^2 \,.\, IE,$$

$$BI^2 \,.\, AI = BE^2 \,.\, AI + (MN)AI.$$

ولنأخذ

$$BE^2 \,.\, AE - KE^2 \,.\, BE$$

وَ

$$BI^2 \,.\, AI - KE^2 \,.\, IB = BI^2 \,.\, AI - KE^2 \,.\, EB - KE^2 \,.\, EI,$$

فيكون

$$[BE^2 \,.\, AE - KE^2 \,.\, EB] - [BI^2 \,.\, AI - KE^2 \,.\, IB]$$
$$= BE^2 \,.\, IE + KE^2 \,.\, EI - (MN)AI$$
$$= BK^2 \,.\, IE - (MN)AI.$$

ولكن، استناداً إلى (٢)، لدينا:

$$3DB \,.\, BE = 3BE^2 + BC^2,$$

فيكون

$$2AB \,.\, BE = 3BE^2 + BC^2,$$

ومنها

$$2AE \,.\, BE = BE^2 + BC^2,$$

$$2AE \,.\, BE = BK^2 \qquad (٤)$$

لكن

$$2BE \,.\, AE = 2BE \,.\, AI + 2BE \,.\, EI,$$

وَ

$$(IB + BE) \,.\, AI = 2BE \,.\, AI + IE \,.\, AI,$$

لكن، بما أن $BE > \frac{AB}{2}$، يكون $BE > AE$ وبالتالي $2BE < > AI$ وبالتالي يكون:

$$2BE \,.\, IE > AI \,.\, EI$$

وَ

$$BK^2 = 2BE \,.\, AE = 2BE \,.\, (EI + AI) > AI \,.\, (EI + 2BE),$$

أي أن

$$BK^2 > AI \,.\, (IB + BE).$$

فينتج

$$\frac{IB + BE}{BK} < \frac{BK}{AI}$$

ومنها

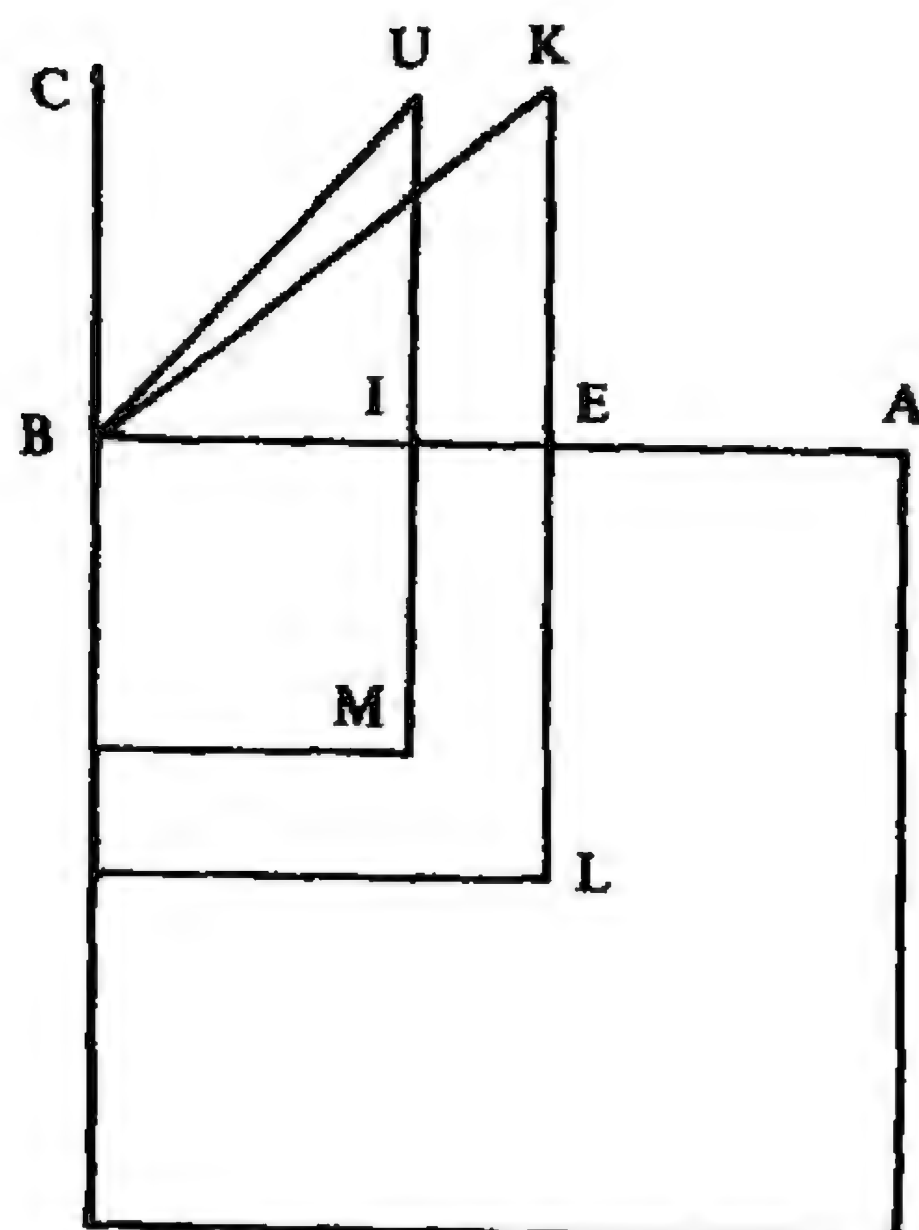
$$\frac{(IB + BE) \,.\, IE}{BK^2} < \frac{IE}{AI}\,,$$

فيكون

$$(MN) \,.\, AI < BK^2 \,.\, IE;$$

ويتتج أن $c_0 > c$.

الحالة الثانية: $x = BI < BE$ (الشكل رقم (٣ ـ ٣٠)):



الشكل رقم (٣ ـ ٣٠)

لدينا

$$BI^2 \,.\, AI - BC^2 \,.\, BI < c_0$$

وإذا أخذنا:

$$EK \perp AB \text{ ،} \; IU \perp AB \text{ و } EK = IU = BC$$

يكون لدينا:

$$BI^2 \,.\, AI = BI^2 \,.\, IE + BI^2 \,.\, AE,$$

وَ

$$BE^2 \,.\, AE = BI^2 \,.\, AE + (LM) \,.\, AE.$$

ولنأخذ

$$BI^2 \,.\, IE - KE^2 \,.\, IB$$

وَ

$$(LM)AE - KE^2 \,.\, BE = (LM)AE - [KE^2 \,.\, IB + KE^2 \,.\, IE];$$

فيكون

$$[(LM) \,.\, AE - KE^2 \,.\, BE] - [BI^2 \,.\, IE - KE^2 \,.\, BI]$$
$$= (LM) \,.\, AE - [KE^2 \,.\, IE + BI^2 \,.\, IE].$$

فإذا كان

$$(LM) . AE > KE^2 . IE + BI^2 . IE$$

تكون المتباينة $c > c_0$ محققة. ولكن

$$(KE^2 + BI^2) . IE = BU^2 . IE$$

واستناداً إلى (٤)، لدينا:

$$KB^2 = 2BE . AE = KE^2 + BE^2 ,$$
$$UB^2 = UI^2 + IB^2;$$
$$UI^2 = KE^2;$$

فيكون

$$KB^2 - UB^2 = BE^2 - BI^2 = (EB + BI)EI.$$

ولدينا

$$2EB . AE - (EB + BI)AE = IE . AE,$$

لكن

$$AE < EB + BI,$$

فيكون

$$AE . EI < (EB + BI) . EI,$$

ويكون بالتالي

$$BK^2 - (BE + BI) . AE < BK^2 - UB^2,$$

وبالتالي

$$(BE + BI)AE > UB^2,$$

ومنها

$$\frac{BE + BI}{UB} > \frac{UB}{AE} ,$$

وَ

$$\frac{EI(BE + BI)}{UB^2} > \frac{EI}{AE} ,$$

أي أن لدينا

$$(LM) . AE > UB^2 . EI;$$

وتتحقق المتباينة $c > c_0$.

نتيجة لما ورد في الحالتين السابق ذكرهما يكون c_0 النهاية العظمى.

تحديد $x_0 = BE$

يبرهن الطوسي أنه، عندما يحقق E العلاقة (٤)، يكون BE جذراً للمعادلة (٢). فالعلاقة (٤) تكتب كما يلي:

$$2BE \,.\, AE = BK^2 = BE^2 + EK^2,$$

أي

$$2ax_0 - 2x_0^2 = b + x_0^2$$

ومنها

$$\frac{2}{3}ax_0 = \frac{b}{3} + x_0^2\ ;$$

فيكون x_0 جذراً للمعادلة (٢).

ومعرفة x_0 تسمح باحتساب c_0؛ وهنا لدينا حالات ثلاث:

- إذا كان $c > c_0$، تكون المسألة مستحيلة.
- إذا كان $c = c_0$، يكون $x_0 = BE$ حلاً للمسألة.
- إذا كان $c < c_0$، يكون للمسألة حلاّن x_1 و x_2 بحيث

$$x_1 < x_0 < x_2$$

تحديد الجذر الأكبر x_2؛ $x_2 > BE$ (الشكل رقم (٣ ـ ٣١)):

نأخذ E على AB بحيث يكون:

$BE = x_0$ ، $BM = BE$ وَ $MO = AE$.

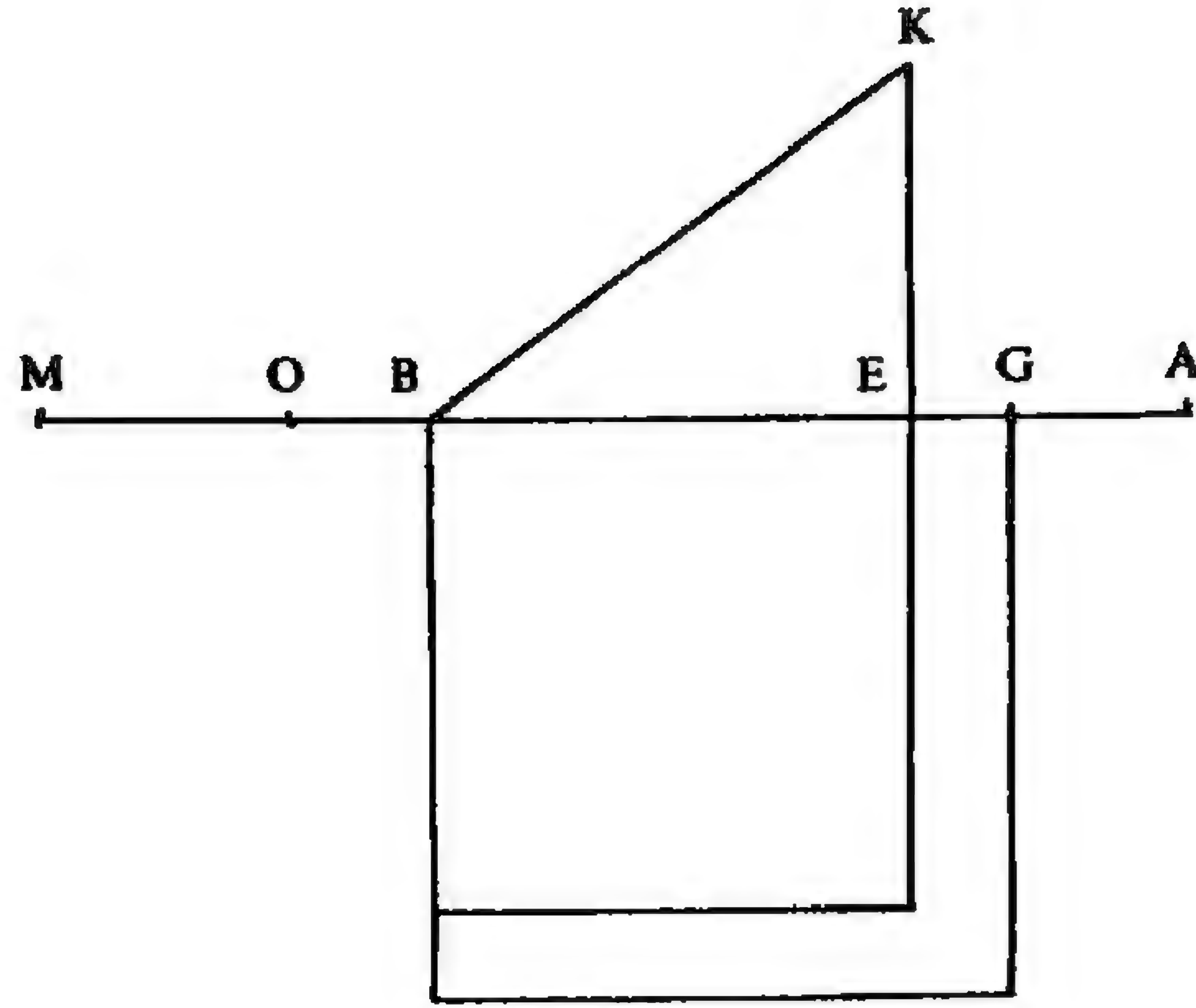
فيما أن $BE > \frac{AB}{2}$ فإن $BE > AE$ وبالتالي $BM > AE$.

ولنأخذ المعادلة من النوع ١٥.

$$x^3 + EO \,.\, x^2 = c_0 - c \qquad (٥)$$

وليكن $X = GE$ جذرها. فيكون لدينا:

$$GE^2 \,.\, GO = c_0 - c.$$



الشكل رقم (٣ ـ ٣١)

ويكون الحل المطلوب هو:

$$BE + EG = BG = x_2.$$

فلدينا، استناداً إلى (٤):

$$BK^2 = 2BE \,.\, AE$$

ولدينا

$$2BE \,.\, AE \,.\, GE = 2BE \,.\, GE^2 + 2BE \,.\, AG \,.\, GE,$$

فيكون

$$BK^2 \,.\, GE = EM \,.\, GE^2 + ME \,.\, GE \,.\, AG.$$

ومن جهة أخرى، لدينا

$$BG^2 - BE^2 = 2BE \,.\, GE + GE^2$$

وبالتالي

$$(BG^2 - BE^2)AG = ME \,.\, GE \,.\, AG + GE^2 \,.\, AG;$$

فيكون

$$BK^2 \,.\, GE - (BG^2 - BE^2)AG = EM \,.\, GE^2 - GE^2 \,.\, AG$$

$$= EM \,.\, GE^2 + EG^2 \,.\, GE - (EG^2 \,.\, AG + EG^2 \,.\, EG)$$

$$= MG \cdot GE^2 - AE \cdot GE^2.$$

لكن

$$MG \cdot GE^2 = EG^2 \cdot GO + GE^2 \cdot OM$$
$$= EG^2 \cdot GO + GE^2 \cdot AE,$$

لذلك

$$BK^2 \cdot GE - (BG^2 - BE^2)AG = GE^2 \cdot GO,$$

وبالتالي

$$BE^2 \cdot GE = BK^2 \cdot GE - KE^2 \cdot GE$$
$$= (BG^2 - BE^2) \cdot AG + GE^2 \cdot GO - KE^2 \cdot GE,$$

فيكون

$$BE^2 \cdot AE = BE^2[GE + AG] = BG^2 \cdot AG + GE^2 \cdot GO - KE^2 \cdot GE,$$

ومنها

$$BE^2 \cdot AE - KE^2 \cdot BE = BG^2 \cdot AG + GE^2 \cdot GO - KE^2 \cdot BG$$
$$c_0 = [BG^2 \cdot AG - KE^2 \cdot BG] + GE^2 \cdot GO;$$

وبالتالي

$$c_0 = BG^2 \cdot AG - BC^2 \cdot BG + c_0 - c,$$

فيكون

$$BG^2 \cdot AG = BC^2 \cdot BG + c,$$

ويكون بالتالي BG جذراً للمعادلة ٢٤.

تحديد الجذر الأصغر x_1؛ $x_1 < BE$ (الشكل رقم (٣ ـ ٣٢)):

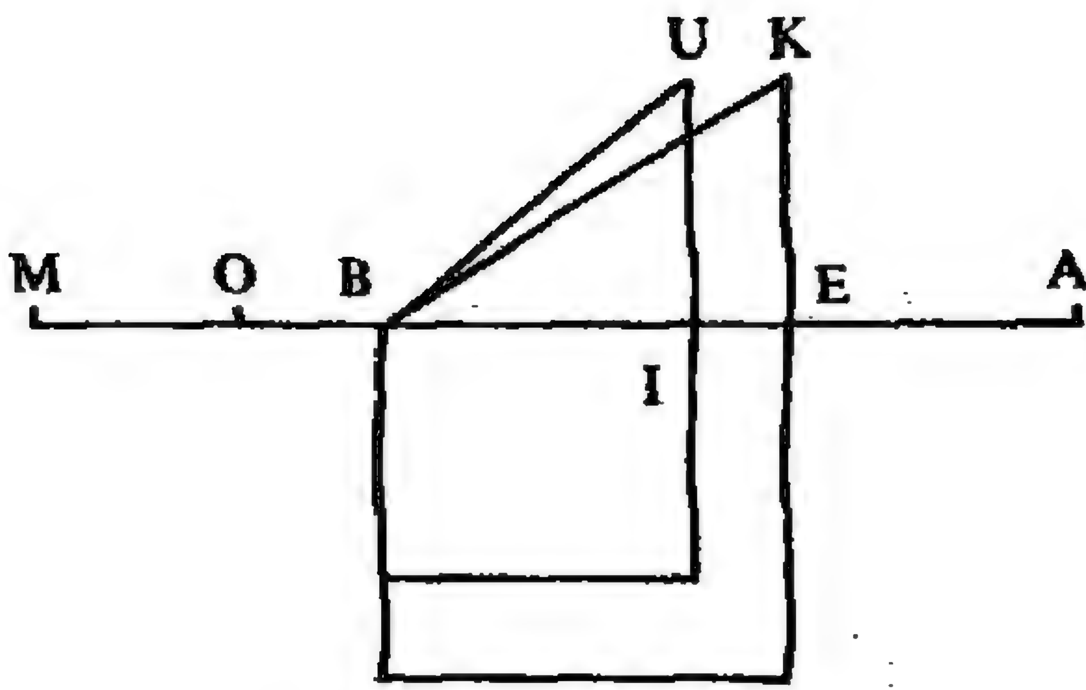
لتكن المعادلة من النوع ٢١:

$$x^3 + c_0 - c = EO \cdot x^2 \quad (٦)$$

وليكن $X = EI$ حل هذه المعادلة (راجع التعليق).

تكتب هذه المعادلة على الشكل التالي:

$$c_0 - c = EO \cdot EI^2 - EI^3 = IO \cdot EI^2.$$



الشكل رقم (٣ ـ ٣٢)

فلنبرهن أن $BI = BE - EI$ هو الجذر المطلوب.

ليكن

$$IU = EK = BC.$$

لدينا، استناداً إلى (٤):

$$BK^2 = 2BE \,.\, AE = ME \,.\, AE$$

فيكون

$$BK^2 \,.\, EI = ME \,.\, AE \,.\, EI.$$

ومن جهة أخرى، لدينا

$$EB^2 - IB^2 = MI \,.\, IE,$$

فيكون

$$(EB^2 - IB^2) \,.\, AE + IE^2 \,.\, AE = ME \,.\, AE \,.\, EI$$

ومنها

$$(EB^2 - IB^2) \,.\, AE = BK^2 \,.\, EI - IE^2 \,.\, AE.$$

ومن جهة أخرى

$$BU^2 + EI \,.\, IM = BK^2,$$

فيكون

$$BU^2 \,.\, EI + EI^2 \,.\, IM = BK^2 \,.\, EI.$$

لكن

$$(BE^2 - IB^2) \,.\, AE + IE^2 \,.\, AE = ME \,.\, AE \,.\, EI = BK^2 \,.\, EI,$$

فيكون بالتالي

$$\begin{aligned} BU^2 \,.\, EI + EI^2 \,.\, IO &= BU^2 \,.\, EI + EI^2 \,.\, IM - EI^2 \,.\, MO \\ &= BK^2 \,.\, EI - IE^2 \,.\, AE \\ &= (BE^2 - IB^2) \,.\, AE, \end{aligned}$$

ومنها

$$\begin{aligned} BU^2 \,.\, EI + EI^2 \,.\, IO - UI^2 \,.\, EI &= (BE^2 - IB^2)AE - UI^2 \,.\, EI \\ &= BI^2 \,.\, EI + EI^2 \,.\, IO. \end{aligned}$$

وإذا أضفنا $BI^2 . AE$ إلى كلا الطرفين نحصل على:

$$BI^2 . AI + EI^2 . IO = BI^2(EI + AE) + EI^2 . IO$$
$$= BE^2 . AE - IU^2 . EI$$

فيكون

$$BI^2 . AI + EI^2 . IO - UI^2 . BI = BE^2 . AE - UI^2 . BE = c_0$$

ويكون بالتالي

$$(BI^2 . AI - IU^2 . BI) + c_0 - c = c_0$$

ومنها

$$BI^2 . (AB - BI) - BC^2 . BI = c$$

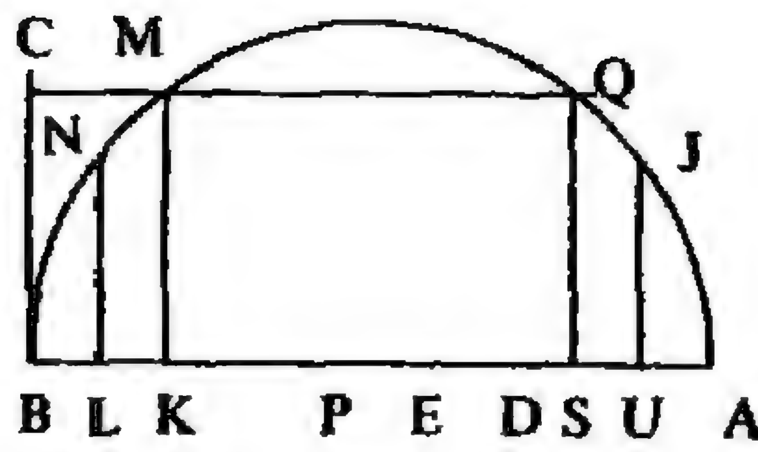
وَ

$$aBI^2 = c + b . BI + BI^3,$$

فيكون BI جذراً للمعادلة ٢٤.

حصر الجذور

ليكن $AB = a$ ولتكن $\mathscr{C}$ نصف الدائرة ذات القطر AB والمركز P (الشكل رقم (٣ ـ ٣٣)) وليكن $BD = \frac{2}{3}AB$ وَ $BE = x_0$.



الشكل رقم (٣ ـ ٣٣)

برهنّا أن

$$\frac{AB}{2} < BE < \frac{2}{3}AB,$$

لذلك يكون

$$BP < BE < BD$$

وتكون النقطة E بين P و D.

وبرهنّا أيضاً أن $BC < \frac{AB}{2}$. فليكن $SQ \perp AB$ وَ $KM \perp AB$، بحيث يكون:

$$SQ = KM = BC ;$$

فيكون لدينا (قدرة K):

$$KM^2 = KB . KA$$

ومنها

$$KM^2 . BK = BK^2 . KA = BK^2(AB - BK)$$
$$= AB . BK^2 - BK^3.$$

وإذا كان BK جذراً للمعادلة ٢٤ يكون لدينا

$$b \,.\, BK + c = BK^2 \,.\, AK = KM^2 \,.\, BK = BC^2 \,.\, BK = b \,.\, BK,$$

وهذا خُلف؛ فـ BK ليس جذراً.

ليكن $BL < BK$ و $LN \perp AB$. إن BL ليس جذراً للمعادلة ٢٤. فإذا فرضنا أن BL جذر لهذه المعادلة يكون لدينا

$$c + b \,.\, BL = a \,.\, BL^2 - BL^3 = BL^2 \,.\, AL = LN^2 \,.\, BL;$$

لكن $LN < KM$، لذلك يكون

$$LN^2 \,.\, BL < BC^2 \,.\, BL = b \,.\, BL,$$

ويكون بالتالي

$$c + b \,.\, BL < b \,.\, BL,$$

وهذا خُلف.

وهكذا لا يكون للمعادلة ٢٤ جذرٌ أصغر من BK. لنبرهن الآن أن ليس لها جذرٌ أكبر من AK أو مساوٍ لـ AK.

لدينا $QS = MK$، لذلك $AS = KB$ وَ $BS = AK$. لكن

$$\frac{BS^2}{QS^2} = \frac{BS}{AS}$$

أو

$$BS^2 \,.\, AS = QS^2 \,.\, BS = BC^2 \,.\, BS.$$

فإذا كان $AK = BS$ جذراً يكون:

$$BC^2 \,.\, BS = BS^2 \,.\, AS + c$$

ومنها

$$BS^2 \,.\, AS = BS^2 \,.\, AS + c \,,$$

وهو خُلف. فلا يمكن أن يكون $AK = BS$ جذراً للمعادلة ٢٤.

ولنبرهن أن $x = BJ > AK$ ليس جذراً للمعادلة ٢٤. فإذا أخذنا $JU \perp AB$ يكون:

$$BJ^2 \,.\, AJ = JU^2 \,.\, BJ,$$

ومنها

$$c + b \,.\, BJ = BJ^2 \,.\, AJ = JU^2 \,.\, BJ,$$

لكن

$$SQ^2 > JU^2,$$

فيكون

$$JU^2 . BJ < SQ^2 . BJ = b . BJ,$$

وهذا خُلف.

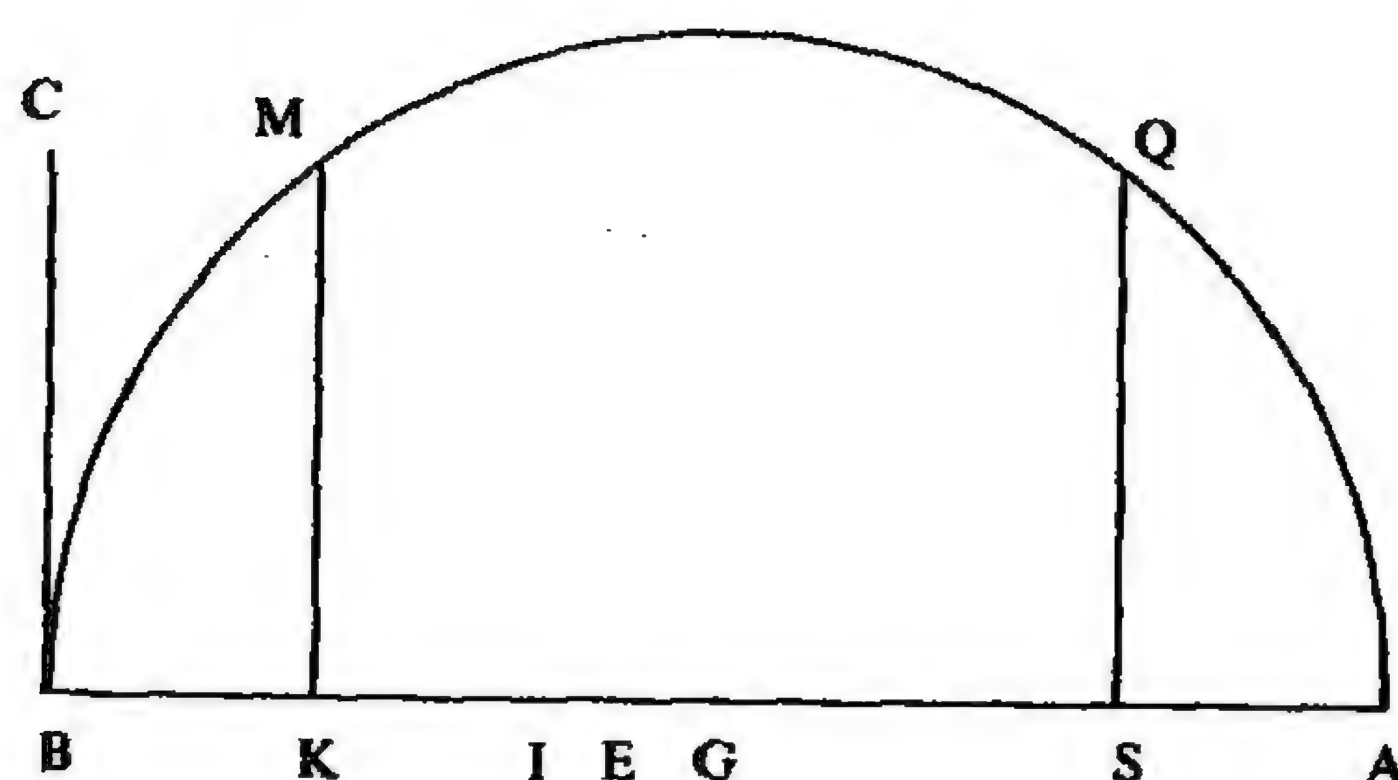
هكذا ينتج أن أي جذر x للمعادلة ٢٤ يحقق

$$BK < x < AK = BS \qquad (٧)$$

فكل قطعة مستقيم تمثل جذراً تنطلق من B يجب أن توجد نهايتها على القطعة KS. وبالنسبة إلى الجذرين $x_1 = BI$ وَ $x_2 = BG$، لدينا:

$$BK < BI < BE < BG < BS = AK.$$

وبطريقة عكسية، إذا ما أُعطينا x_1 أو x_2، يمكننا تحديد العدد c؛ وهذا يعني أنه يمكننا تحديد معادلة من النوع ٢٤ (الشكل رقم (٣ ـ ٣٤)).



الشكل رقم (٣ ـ ٣٤)

أ ـ إذا ما أعطينا x_2؛ $x_2 = BG$؛ بحيث $BE < BG < BS$؛

رأينا أن $c_0 - c = GE^2 . GO$، فمن الضروري أن يكون

$$.c_0 > GE^2 . GO$$

ومن جهة أخرى

$$BG^2 . AG + GE^2 . GO - BC^2 . BG = c_0 ,$$

فيكون

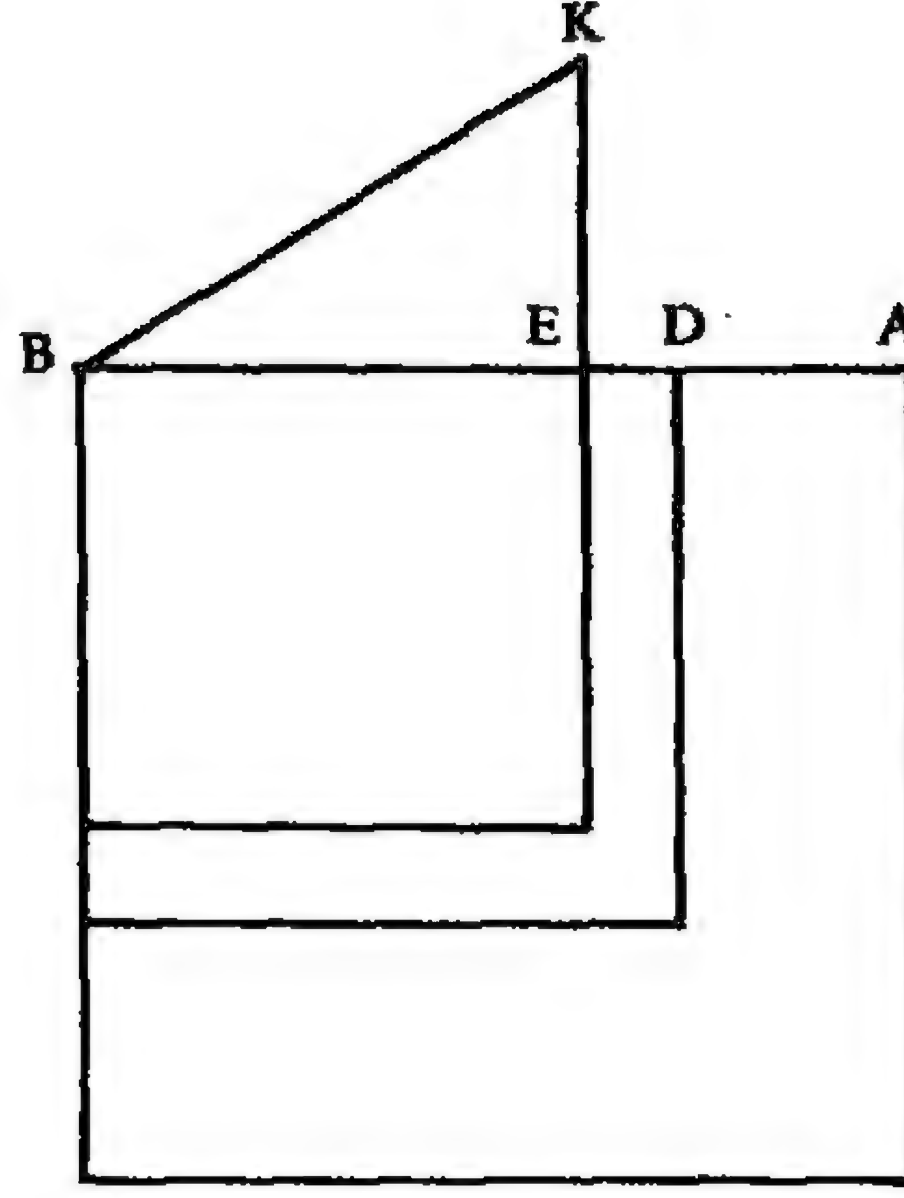
$$BG^2 . AG > BC^2 . BG = SQ^2 . BG;$$

ويكون بالتالي
$$SQ^2 . BG < BG^2 . AG.$$
فإذا كان $BG \geq BS$ يكون لدينا، بناءً على خصائص الدائرة:
$$BG . AG \leq SQ^2,$$
وبالتالي
$$BG^2 . AG \leq SQ^2 . BG,$$
وهذا خُلف. لذلك فإن $BG < BS$ ونستطيع بالتالي احتساب c.

ب ـ إذا ما أُعطينا x_1؛ $x_1 = BI$، بحيث $BK < BI < BE$؛ لدينا:
$$c_0 - c = IE^2 . IO$$
فمن الضروري أن يكون
$$c_0 > IE^2 . IO.$$
لكن
$$BI^2 . AI + EI^2 . IO - MK^2 . BI = c_0$$
لذلك
$$BI^2 . AI > MK^2 . BI.$$
فإذا كان $BI \leq BK$ يكون لدينا (كما في السابق)
$$BI^2 . AI \leq MK^2 . BI,$$
وهذا خُلف، فيكون $BK < BI$ ونستطيع بالتالي احتساب c. ولمعرفة الجذرين x_1 و x_2 نحتسب التفاوتين $(x_2 - x_0)$ وَ $(x_0 - x_1)$.

العلاقة بين المعادلة ٢٤ والمعادلة ١٥ (الشكل رقم (٣ ـ ٣٥)):

نأخذ $EK \perp AB$ و $EK = BC$، فيكون
$$c_0 = BE^2 . AE - EK^2 . EB$$
ومن جهة أخرى، إذا كان $BG = x_2$ يكون لدينا
$$c = BG^2 . AG - EK^2 . BG.$$
ومنها
$$c_0 = BE^2 . AG + BE^2 . GE - EK^2 . BE$$



الشكل رقم (٣ ـ ٣٥)

و

$$c = BE^2 . AG + (BG^2 - BE^2) . AG - EK^2 . BG,$$

حيث $EK^2 . BG > EK^2 . BE$؛

فيكون لدينا

$$c_0 - c = BE^2 . GE + EK^2 . GE - (BG^2 - BE^2)AG$$

وَ

$$c_0 - c + (BE + BG)EG . AG = BK^2 . EG,$$

و BE معلوم فيكون BK^2 معلوماً. وإذا وضعنا $EG = X$، $BG = BE + X$،

$$c_0 - c + (2BE + X) . X . (AE - X) = BK^2 . X$$

ومنها

$$c_0 - c + 2BE . AE . X - 2BE . X^2 + AE . X^2 - X^3 = BK^2 . X;$$

لكن $2BE . AE = BK^2$، لذلك يكون

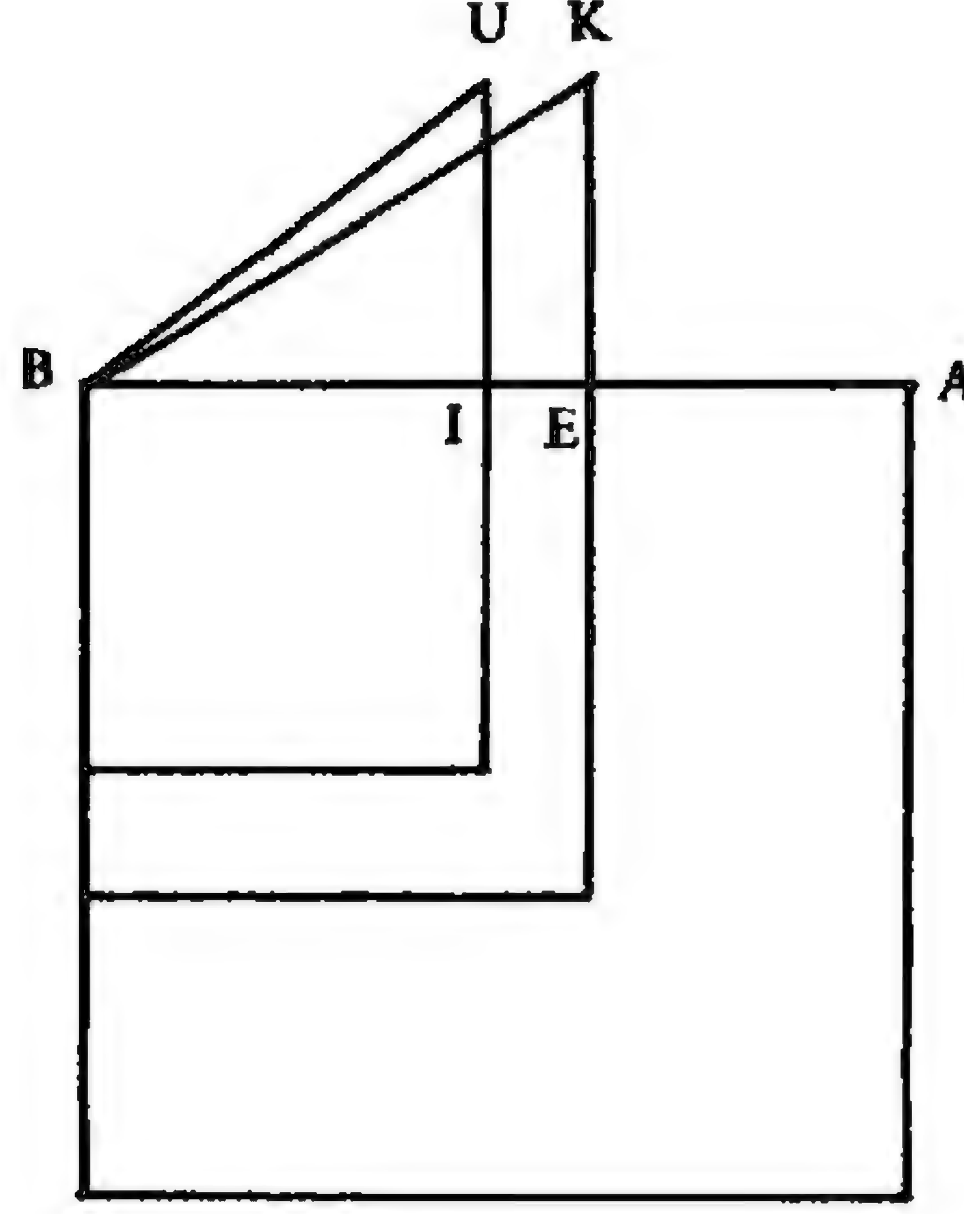
$$c_0 - c = X^3 + (2BE - AE)X^2$$

$c_0 - c = X^3 + (3x_0 - a)X^2$ (وهي معادلة من النوع ١٥)

فإذا كان $X = EG$ جذر هذه المعادلة نحصل على x_2

$$x_2 = BG = x_0 + X.$$

العلاقة بين المعادلة ٢٤ والمعادلة ٢١ (الشكل رقم (٣ ـ ٣٦)):



الشكل رقم (٣ ـ ٣٦)

ليكن $x_1 = BI$ الجذر الأصغر. لدينا

$$c = BI^2 \,.\, AI - KE^2 \,.\, BI \,.$$

وكما في السابق، لدينا

$$c_0 - c = (EB + BI)EI \,.\, AE - BU^2 \,.\, EI$$

فيكون

$$BU^2 \,.\, EI + c_0 - c = (EB + BI)EI \,.\, AE.$$

وإذا وضعنا $EI = X$، نحصل على:

$$(EB + BI)EI \,.\, AE = 2AE \,.\, BE \,.\, X - AE \,.\, X^2,$$

ويكون

$$BU^2 = BI^2 + IU^2 = (BE - EI)^2 + IU^2,$$
$$= BE^2 + EI^2 - 2BE \,.\, EI + BK^2 - BE^2 = BK^2 + X^2 - 2BE \,.\, X,$$

وبالتالي

$$BU^2 \,.\, EI = BK^2 \,.\, X + X^3 - 2BE \,.\, X^2,$$

فيكون

$$c_0 - c + BK^2 \,.\, X + X^3 - 2BE \,.\, X^2 = 2AE \,.\, BE \,.\, X - AE \,.\, X^2;$$

لكن $2AE \,.\, BE = BK^2$، فيكون لدينا

$$X^3 + c_0 - c = (2BE - AE)X^2,$$

أي، المعادلة من النوع ٢١ :

$$X^3 + c_0 - c = (3x_0 - a)X^2$$

نحصل إذن على $X = EI$ ونستنتج $x_1 = BI = x_0 - X$.

خلاصة

أ ـ إذا كان $\sqrt{b} \geq \frac{a}{2}$ تكون المسألة مستحيلة (راجع التعليق)؛ مثال على ذلك، المسألة $x^3 + 16x + 20 = 8x^2$.

ب ـ إذا كان $\sqrt{b} < \frac{a}{2}$، نحُلّ المعادلة

$$x^2 + \frac{b}{3} = \frac{2a}{3}\; x,$$

فنحصل على x_0 ونحتسب c_0. ونكون أمام حالات ثلاث:

ـ إذا كان $c > c_0$ تكون المسألة مستحيلة؛

ـ إذا كان $c = c_0$ يكون للمسألة حلٌّ هو x_0؛

ـ إذا كان $c < c_0$ يكون للمسألة حلّان x_1 و x_2 بحيث:

$$x_1 < x_0 < x_2.$$

نضع $c_0 - c = k$. إذا كان X جذراً للمعادلة

$$X^3 + (3x_0 - a)X^2 = k\,,$$

يكون $x_2 = x_0 + X$ الجذر الأكبر للمعادلة ٢٤. وإذا كان X جذراً للمعادلة

$$X^3 + k = (3x_0 - a)X^2$$

يكون $x_1 = x_0 - X$، الجذر الأصغر للمعادلة ٢٤.

تعليق

$$x^3 + bx + c = ax^2.$$

من هذه المعادلة ينتج $x < a$ وَ $x \,.\, (a - x) > b$.

ـ إذا كان $\sqrt{b} \geq \frac{a}{2}$ تكون المسألة مستحيلة.

ـ فإذا كان $x = \frac{a}{2}$ يكون $x \,.\, (a - x) = \frac{a^2}{4} \leq b$ وهذا خُلف؛

- وإذا كان $x \neq \frac{a}{2}$، يكون $x < \frac{a^2}{4}$. $(a-x)$ وذلك لأن x . $(a-x)$ له نهاية عظمى $\frac{a^2}{4}$، يصلها عندما يكون $x = \frac{a}{2}$؛ فيكون إذن $x < b$. $(a-x)$، وهذا خُلف.

لذلك فإن $\frac{a}{2} < \sqrt{b}$ هو شرط ضروري لإمكانية حل المسألة. إلا أن هذا الشرط ليس كافياً(٧).

---

(٧) نسجل أن الشرط $\frac{a}{2} < b$ الذي بيّنه الطوسي بالخُلف يأتي من دراسة إشارة الدالة

$$f(x) = ax^2 - x^3 - bx = x[x.(a-x) - b]$$

في الفسحة $0 < x < a$، حيث تكون إشارة $f(x)$ هي نفسها إشارة

$$x(a-x) + b$$

إن النهاية العظمى للدالة $x.(a-x)$ هي $\frac{a^2}{4}$، تصلها عندما يكون $x = \frac{a}{2}$، ومن هنا الشرط $b < \frac{a^2}{4}$ الضروري لكون $0 < f(x)$.

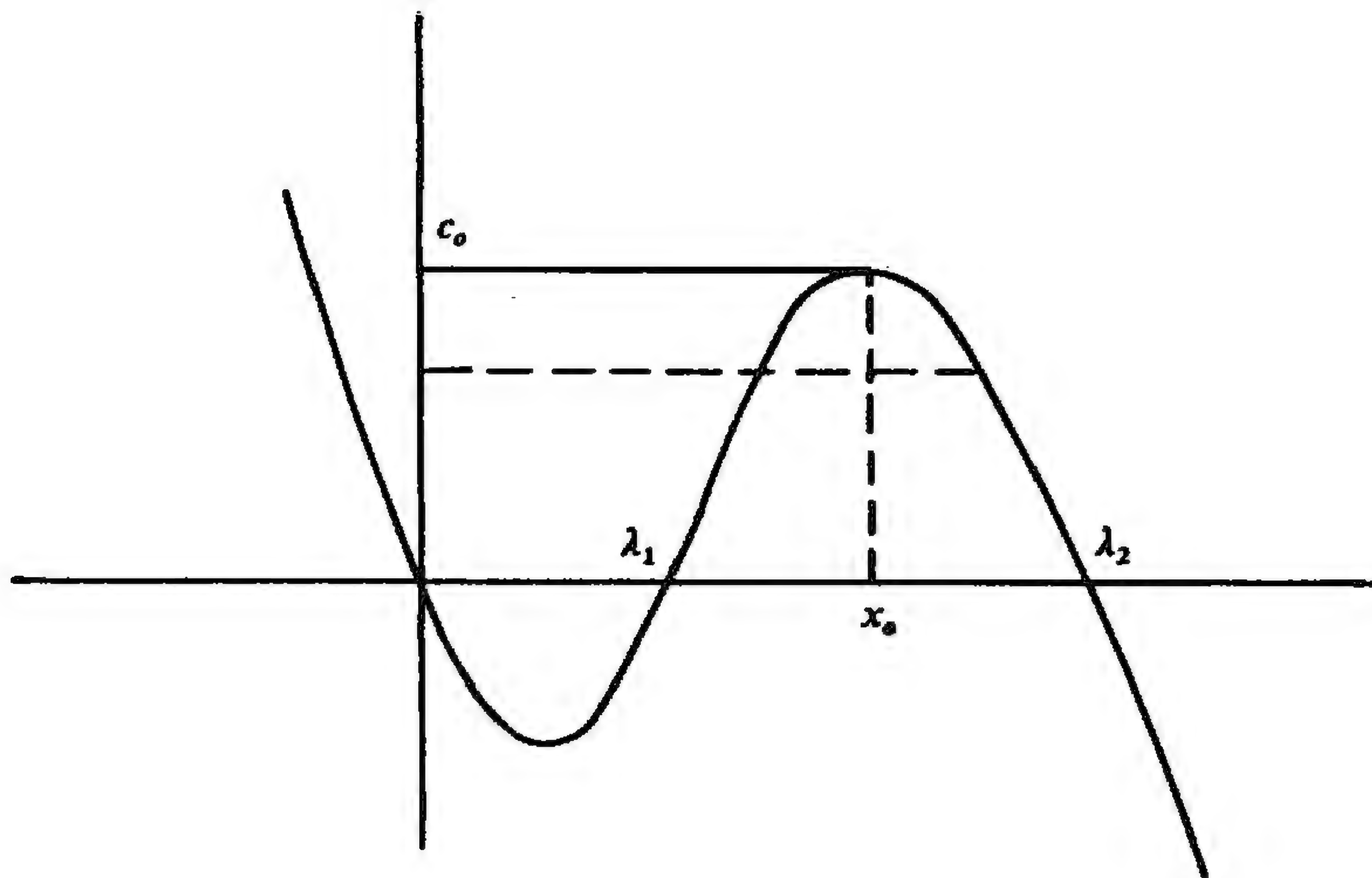
وإذا وضعنا

$$\varphi(x) = x(a-x) - b$$

وإذا كان $b < \frac{a^2}{4}$، يكون للمعادلة $\varphi(x) = 0$ جذران λ_1 و λ_2، يدرسهما الطوسي في ما بعد عند تعرضه لحصر الجذر، ويكون لدينا $\varphi(x) > 0$ وذلك في ما يتعلق بكل x، $x \in]\lambda_1, \lambda_2[$؛ فيكون بالتالي $f(x) > 0$ على الفسحة نفسها.

نلاحظ أيضاً أن الشرط $b < \frac{a^2}{4}$ يمكن إيجاده إذا ما درسنا مسألة وجود إشارة النهاية العظمى للدالة $f(x)$. فهذه الدراسة تظهر أنه، إذا كان $b < \frac{a^2}{3}$ يكون لِـ $f(x)$ نهاية عظمى عند $x = x_0$ وحيث $x_0 > 0$؛ كما تدل أن لدينا

$$c_0 = f(x_0) > 0 \Longrightarrow b < \frac{a^2}{4}$$



١ ـ دراسة النهاية العظمى

ليكن x_0 الحل الموجب للمعادلة

$$3x^2 - 2ax + b = 0 \qquad (١)$$

بما أن $b < \frac{a^2}{4}$، فلهذه المعادلة جذران a_1 و a_2 يحققان

$$a_1 < \frac{a}{3} < a_2 < \frac{2a}{3}\ .$$

وإذا وضعنا $a_2 = x_0$، يكون لدينا، استناداً إلى الشكل القانوني للمعادلة (١):

$$\left(x_0 - \frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^2 - 3b}{9}$$

ومنها

$$\left(x_0 - \frac{a}{3}\right)^2 > \frac{a^2}{36}$$

وبالتالي

$$x_0 > \frac{a}{2}\ .$$

ومن الواضح أن الطوسي أخذ $x_0 = a_2$ دون أن يُصرِّح بذلك.

ليكن

$$f(x_0) = x_0^2(a - x_0) - bx_0$$

مهما يكن x حيث $x \neq x_0$، $x > 0$، يكون لدينا $f(x) < f(x_0)$.

الحالة الأولى: $x > x_0$؛

$$x > x_0 \Longrightarrow f(x) < f(x_0).$$

لدينا $x > x_0$، فيكون

$$x_0^2(a - x_0) = x_0^2(a - x) + x_0^2(x - x_0),$$

$$x^2(a - x) = x_0^2(a - x) + (x^2 - x_0^2)\ (a - x),$$

ولدينا

$$bx = bx_0 + b(x - x_0)$$

فيكون

$$f(x) < f(x_0) \Longleftrightarrow (x^2 - x_0^2)\ (a - x) < (x_0^2 + b)\ (x - x_0),$$

وهذا يعني

$$(x+x_0)\ (a-x) < x_0^2+b,$$

أي، استناداً إلى (١):

$$(x+x_0)\ (a-x) < 2x_0(a-x_0)$$

لكن

$$2x_0(a-x_0) = 2x_0(a-x) + 2x_0(x-x_0),$$

و

$$(x+x_0)\ (a-x) = 2x_0(a-x) + (x-x_0)\ (a-x);$$

لكن، بما أن $\frac{a}{2} < x_0$، لدينا:

$$x_0 > a-x_0 \quad \text{و} \quad a-x < 2x_0$$

فينتج

$$2x_0(x-x_0) > (a-x)\ (x-x_0),$$

ومنها النتيجة المطلوبة.

الحالة الثانية: $x < x_0$؛

$$x < x_0 \Longrightarrow f(x) < f(x_0).$$

فإذا ما تصرفنا كما فعلنا في الحالة السابقة، يبقى أن نبرهن:

$$x^2+b < (x_0+x)\ (a-x_0) \qquad (٢)$$

لكن

$$x_0^2+b-(x^2+b) = (x_0+x)\ (x_0-x),$$
$$x_0^2+b-(x_0+x)\ (a-x_0) = 2x_0(a-x_0)-(x_0+x)\ (a-x_0)$$
$$= (x_0-x)\ (a-x_0),$$

وبما أن

$$a-x_0 < x_0+x$$

فتنتج العلاقة (٢) ومنها النتيجة المطلوبة.

لذلك، نتيجة لما وَرد في الحالتين السابقتين، تكون $f(x_0)$ النهاية العظمى للدالة $f(x)$ وينتج ما يلي:

- إذا كان $c > f(x_0)$ تكون المسألة مستحيلة.
- إذا كان $c = f(x_0)$ يكون x_0 حلاً للمسألة.

ـ إذا كان $c < f(x_0)$ يكون للمسألة حلان x_1 و x_2 بحيث:

$$x_1 < x_0 < x_2 .$$

٢ ـ تحديد الجذر x_2

ليكن X حل المعادلة من النوع ١٥:

$$x^3 + (3x_0 - a)x^2 = f(x_0) - c = c_0 - c \qquad (٣)$$

عند ذلك يكون $x_2 = x_0 + X$ حلاً للمعادلة ٢٤ . فلدينا، استناداً إلى (١):

$$x_0^2 + b = 2x_0(a - x_0),$$

ومنها

$$(x_0^2 + b)X = 2x_0X^2 + 2x_0X(a - x_2) = I,$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$x_2^2 - x_0^2 = 2x_0X + X^2,$$

ومنها

$$(x_2^2 - x_0^2)\ (a - x_2) = 2x_0X(a - x_2) + X^2(a - x_2) = II,$$

وبالتالي يكون

$$I = II + 2x_0X^2 - X^2(a - x_2) = II + X^2[2x_0 + X - (a - x_2) + X],$$

أي

$$I = II + X^2[X + 3x_0 - a].$$

فإذا طرحنا bX من كلا الطرفين نحصل على:

$$x_0^2X = (x_2^2 - x_0^2)\ (a - x_2) + X^2(X + 3x_0 - a) - bX;$$

ومن ثم نضيف $x_0^2(a - x_2) - bx_0$ إلى كلا الطرفين فنحصل على:

$$x_0^2(a - x_0) - bx_0 = x_2^2(a - x_2) + X^2(X + 3x_0 - a) - b(x_0 + X).$$

لكن، استناداً إلى (٣) لدينا:

$$X^2(X + 3x_0 - a) = c_0 - c ,$$

فيكون

$$c_0 = ax_2^2 - x_2^3 - bx_2 + c_0 - c$$

ويكون

$$c + x_2^3 + bx_2 = ax_2^2 \ ,$$

فيكون $x_2 = x_0 + X$ جذراً للمعادلة ٢٤.

٣ ـ تحديد الجذر x_1

ليكن X حلاً موجباً للمعادلة من النوع ٢١:

$$x^3 + f(x_0) - c = (3x_0 - a)x^2 \qquad (٤)$$

فيكون لدينا

$$f(x_0) - c = (3x_0 - a - X)X^2,$$

إن $x_1 = x_0 - X$ هو جذر للمعادلة ٢٤. فلدينا استناداً إلى (١):

$$x_0^2 + b = 2x_0(a - x_0)$$

ولدينا أيضاً

$$x_0^2 - x_1^2 = X(2x_0 - X)$$

ومنها

$$\begin{aligned}(x_0^2 - x_1^2)\ (a - x_0) &= 2x_0(a - x_0)X - (a - x_0)X^2 \\ &= (x_0^2 + b)X - (a - x_0)X^2.\end{aligned}$$

كما أن لدينا

$$(x_0^2 + b)X - (x_1^2 + b)X = X^2(2x_0 - X),$$

فيكون

$$(a - x_0)\ (x_0^2 - x_1^2) = bX + Xx_1^2 + X^2(3x_0 - a - X).$$

ويحصل

$$(a - x_0)\ (x_0^2 - x_1^2) - bX + x_1^2(a - x_0) = Xx_1^2 + X^2(3x_0 - a - X) + x_1^2(a - x_0)$$

ومنها

$$x_0^2(a - x_0) - bx_0 = x_1^2(a - x_1) + X^2(3x_0 - a - X) - bx_1$$

فيكون

$$f(x_0) = x_1^2(a - x_1) - bx_1 + f(x_0) - c$$

وبالتالي

$$c = f(x_1).$$

نلاحظ أن الطوسي يفترض، من دون برهان، أن X موجود وأنه موجب. وهذا صحيح. فمن دراسة المعادلة ٢١، يتبين أن المعادلة (٤):

$$x^3 + c_0 - c = (3x_0 - a)x^2$$

لها جذران a_1 و a_2، عندما يكون

$$c_0 - c < \frac{4}{27}(3x_0 - a)^3.$$

ونعلم أن

$$c_0 = x_0^2(a - x_0) - bx_0;$$

وإذا أخذنا في الاعتبار أن

$$x_0^2 = \frac{1}{3}\ (2ax_0 - b),$$

نحصل على

$$c_0 = \frac{2a^2x_0}{3} - \frac{ab}{3} - \frac{2ax_0^2}{3} - \frac{2bx_0}{3}\ ,$$

وأخيراً، يكون لدينا

$$c_0 = \frac{2ax^2x_0}{9} - \frac{2bx_0}{3} - \frac{ab}{9}\ .$$

ومن جهة أخرى، لدينا

$$\frac{4}{27}(3x_0 - a)^3 = 4\left(x_0^3 - ax_0^2 + \frac{a^2x_0}{3} - \frac{a^3}{27}\right);$$

وبما أن

$$x_0^2 = \frac{1}{3}(2ax_0 - b)$$

يكون

$$\frac{4}{27}(3x_0 - a)^3 = 4\left(\frac{2a}{3}x_0^2 - \frac{a^2x_0}{3} - \frac{bx_0}{3} + \frac{ab}{3} - \frac{a^3}{27}\right);$$

ونحصل أخيراً على:

$$\frac{4}{27}(3x_0 - a)^3 = \frac{4a^2x_0}{9} - \frac{4bx_0}{3} + \frac{4ab}{9} - \frac{4a^3}{27}\ .$$

ولكي يكون للمعادلة (٤) جذران موجبان يكفي أن يكون

$$\frac{2a^2x_0}{9}-\frac{2bx_0}{3}-\frac{ab}{9}<\frac{4a^2x_0}{9}-\frac{4bx_0}{3}+\frac{4ab}{9}-\frac{4a^3}{27},$$

وهذا ما يمكن كتابته على الشكل

$$0<\frac{2a^2}{9}\left(x_0-\frac{a}{3}\right)+\frac{b}{9}(5a-6x_0).$$

لكننا رأينا أن

$$\frac{a}{2}<x_0<\frac{2a}{3},$$

فيكون بالتالي

$$x_0-\frac{a}{3}>0 \quad \text{و} \quad 5a-6x_0>0\text{؛}$$

ويكون الشرط المطلوب محققاً، ومن هنا وجود a_1 و a_2.

تظهر دراسة المعادلة ٢١ أن لدينا، في هذه الحالة،

$$0<a_1<2\left(x_0-\frac{a}{3}\right)<a_2$$

فيكون

$$0<a_1<x_0$$

وقد اختار الطوسي $a_1=X$ دون أن يصرّح بذلك.

٤ ـ حصر الجذور

ليكن x_0 الجذر الأكبر للمعادلة $f'(x)=0$. لدينا:

$$\frac{a}{2}<x_0<\frac{2a}{3},$$

وذلك لأن

$$f'\left(\frac{a}{2}\right)>0\ ;\ f'(x_0)=0\ ,\ f'\left(\frac{2a}{3}\right)<0$$

كما أن لدينا $\sqrt{b}<\frac{a}{2}$.

لنأخذ المعادلة

$$ax=x^2+b \qquad (٥)$$

المستخلصة من المعادلة ٢٤ بوضع $c = 0$. لكي يحل الطوسي هذه المعادلة، يقطع الدائرة $y^2 = ax - x^2$ بالمستقيم $y = b^{\frac{1}{2}}$[٨].

عندما يكون a وَ b ثابتين ويكون c كما اتفق، $0 < c < c_0$، يبرهن الطوسي أن الجذور الموجبة

$$x_2 = f_2(c) \qquad \text{وَ} \qquad x_1 = f_1(c)$$

لعائلات المعادلات من النوع ٢٤، تحقق العلاقة

$$\lambda_1 = f_1(0) < f_1(c) < x_0 < f_2(c) < f_2(0) = \lambda_2$$

حيث λ_1 و λ_2 هما جذريّ المعادلة (٥).

أ ـ كل c ضمن الفسحة $]0, c_0[$ يحقق:

$$\lambda_1 = f_1(0) < f_1(c)$$

فإذا كان $\lambda_1 = f_1(c)$، يكون لدينا، استناداً إلى المعادلتين ٢٤ و(٥)

$$\lambda_1^2 \,.\, (a - \lambda_1) = b\lambda_1 + c = b\lambda_1,$$

وهذا محال.

وإذا كان

$$\lambda_1 > f_1(c) = x_1 \ ,$$

يكون

$$x_1(a - x_1) < \lambda_1(a - \lambda_1) = b \ ,$$

فيكون

$$x_1^2(a - x_1) < bx_1 \ ,$$

ومنها

$$bx_1 + c < bx_1 \ ,$$

وهذا أيضاً محال.

ب ـ كل c حيث $0 < c < c_0$، يحقق:

$$f_2(c) < f_2(0) = \lambda_2 \ .$$

---

(٨) الالتقاء موجود إذا كان $b^{\frac{1}{2}} < \frac{a}{2}$ وهذا شرط عرضه الطوسي منذ البداية.

فإذا كان $f_1(c) = \lambda_2$، يكون لدينا، استناداً إلى المعادلتين ٢٤ و(٥) ما يلي:

$$\lambda_2^2 \,.\, (a - \lambda_2) = b\lambda_2 + c = b\lambda_1$$

وهذا محال.

وإذا كان $\lambda_2 < f_2(c)$ يكون، استناداً إلى المعادلة (٢٤):

$$x_2^2(a - x_2) = bx_2 + c$$

ومن جهة أخرى، إذا كان لدينا

$$\frac{a}{2} < \lambda_2 < x_2 \;,$$

يكون

$$x_2(a - x_2) < \lambda_2(a - \lambda_2) = b,$$

فيكون

$$x_2^2(a - x_2) < bx_2 \;,$$

وبالتالي

$$bx_2 > bx_2 + c,$$

وهذا خُلف.

التنيجة المطلوبة نستخلصها، إذن، من دراسة الحالتين أ وَ ب.

ويبرهن الطوسي العكس؛ أي أننا لأي عدد γ، $\gamma \in]x_0, \lambda_2[$ نستطيع إيجاد عدد c، $c \in]0, c_0[$ بحيث يكون γ الجذر الأكبر للمعادلة ٢٤ الخاصة بـ c، أي $x^3 + bx + c = ax^2$. ويبرهن كذلك أن أي عدد β، $\beta \in]\lambda_1, x_0[$، يقابله عدد c'، بحيث يكون β الجذر الأصغر للمعادلة ٢٤ الخاصة بـ c'.

فإذا كان γ جذراً للمعادلة ٢٤، $\gamma \in]x_0, \lambda_2[$، يكون:

$$\gamma^2 \,.\, (a - \gamma) - b\gamma = c \;;$$

فمن الضروري أن يكون:

$$\gamma(a - \gamma) > b \qquad (٦)$$

فلا يمكن أن يكون $\gamma = \lambda_2$ لأن $\lambda_2(a - \lambda_2) = b$. كما لا يمكن أن يكون $\gamma > \lambda_2$ لأنه، عند ذلك، يكون $\gamma \,.\, (a - \gamma) < b$ وهذا مخالف لِ (٦). لكن هذا الشرط يتحقق عند كون $\gamma \in]x_0, \lambda_2[$.

وكذلك، إذا كان β، $\beta \in]\lambda_1, x_0[$ جذراً للمعادلة ٢٤، فسيوجد c بحيث يكون

$$\beta^2(a-\beta) - b\beta = c\ ;$$

فمن الضروري أن يكون

$$\beta(a-\beta) > \beta.$$

وكما تقدم، يبرهن الطوسي أنه عندما يكون $\beta \leq \lambda_1$ يكون هذا الشرط مستحيلاً. إلا أن هذا الشرط يتحقق عند كون $\beta \in]\lambda_1,\ x_0[$.

بهذا يكون الطوسي قد بيّن أن لكل $c \in]0,\ c_0[$ يوجد $x_1(c)$ وَ $x_2(c)$.

$$x_2(c) \in]x_0,\ \lambda_2[\qquad ، \qquad x_1(c) \in]\lambda_1,\ x_0[$$

بحيث يكون $x_1(c)$ وَ $x_2(c)$ جذري المعادلة ٢٤ الخاصة بـ c. وبالعكس، فكل $\beta \in]\lambda_1,\ x_0[$ يقابله $c(\beta) \in]0,\ c_0[$ بحيث يكون β الجذر الأصغر للمعادلة ٢٤ الخاصة بـ $c(\beta)$؛ كما أن كل $\gamma \in]x_0,\ \lambda_2[$ يقابله $c(\gamma)$، $c(\gamma) \in]x_0,\ \lambda_2[$، بحيث يكون γ الجذر الأكبر للمعادلة ٢٤ الخاصة بـ $c(\gamma)$. وإذا لاحظنا أن $c = 0$ يقابله $x_1(0) = \lambda_1$ وَ $x_2(0) = \lambda_2$ وأن $c = c_0$ يقابله $x_0 = x_1(c_0) = x_2(c_0)$ يكون من البديهي أن الطوسي حدد الدالتين التقابليتين التاليتين:

$$x_1\ :\ [0,\ c_0] \longrightarrow [\lambda_1,\ x_0],$$

$$x_2\ :\ [0,\ c_0] \longrightarrow [x_0,\ \lambda_2].$$

٥ ـ العلاقة بين المعادلة ٢٤ والمعادلة ١٥

إذا كان x_2 الجذر الأكبر للمعادلة ٢٤ يكون $X = x_2 - x_0$ جذراً للمعادلة (٣) السابق ذكرها

$$x^3 + (3x_0 - a)x^2 = c_0 - c.$$

فنبرهن، كما سبق أن فعلنا، أن

$$c_0 - c = f(x_2) - f(x_0) = (x_2 - x_0)(x_0^2 + b) - (x_2^2 - x_0^2)(a - x_2),$$

ومنها

$$c_0 - c + (x_2 - x_0)(x_2 + x_0)(a - x_2) = (x_2 - x_0)(x_0^2 + b).$$

وإذا وضعنا $X = x_2 - x_0$ نحصل على:

$$c_0 - c + X(X + 2x_0)(a - x_0 - X) = X(x_0^2 + b)$$

ومنها

$$c_0 - c + 2x_0(a - x_0)X - X^2(3x_0 - a) - X^3 = X(x_0^2 + b);$$

لكن، استناداً إلى (١) لدينا:

$$2x_0(a - x_0) = x_0^2 + b,$$

فيكون

$$c_0 - c = X^3 + X^2(3x_0 - a);$$

أي أن X هو جذر للمعادلة (٣)، وهي من النوع ١٥.

٦ ـ العلاقة بين المعادلة ٢٤ والمعادلة ٢١

إذا كان x_1 الجذر الأصغر للمعادلة ٢٤، يكون $X = x_0 - x_1$ جذراً للمعادلة (٤) التالية:

$$x^3 + (c_0 - c) = (3x_0 - a)x^2.$$

فنبرهن كما فعلنا سابقاً أن:

$$c_0 - c = f(x_1) - f(x_0) = (x_0 + x_1)(x_0 - x_1)(a - x_0) - (x_0 - x_1)(b + x_1^2).$$

فإذا وضعنا $X = x_0 - x_1$، نحصل على:

$$c_0 - c = (2x_0 - X) \,.\, X \,.\, (a - x_0) - X(b + x_0^2 + X^2 - 2x_0X),$$

ومنها

$$c_0 - c = 2x_0(a - x_0)X - (a - x_0)X^2 - X(b + x_0^2) + 2x_0X^2 - X^3;$$

ومن المعروف استناداً إلى (١) أن

$$(b + x_0^2) = 2x_0(a - x_0)$$

فيكون

$$X^3 + c_0 - c = X^2(3x_0 - a),$$

ويكون $X = x_0 - x_1$ جذراً للمعادلة (٤)، وهي من النوع ٢١.

وفي الموجز الذي يعطيه الطوسي في نهاية دراسته للمعادلة ٢٤، يؤكِّد أنه عندما يكون $\frac{a}{2} \geq b^{\frac{1}{2}}$ تكون المسألة مستحيلة. لكن، في حالة كون $\frac{a}{2} = b^{\frac{1}{2}}$ يكون $x_0 = \frac{3a}{2}$

و$c_0 = 0$. فإذا كان $c = 0$ يكون للمعادلة جذر مزدوج هو $x_0 = \frac{3a}{2}$؛ فلا يوجد استحالة إلا عند استبعاد الحالة $c = 0$.

وفي المثال الذي يعطيه الطوسي:

$$x^3 + 16x + 20 = 8x^2$$

يكون $x_0 = 4$ وَ $c_0 = 0$. وبما أن $c_0 < c = 20$ فليس للمعادلة جذر موجب، وهذا ما أكّده الطوسي.

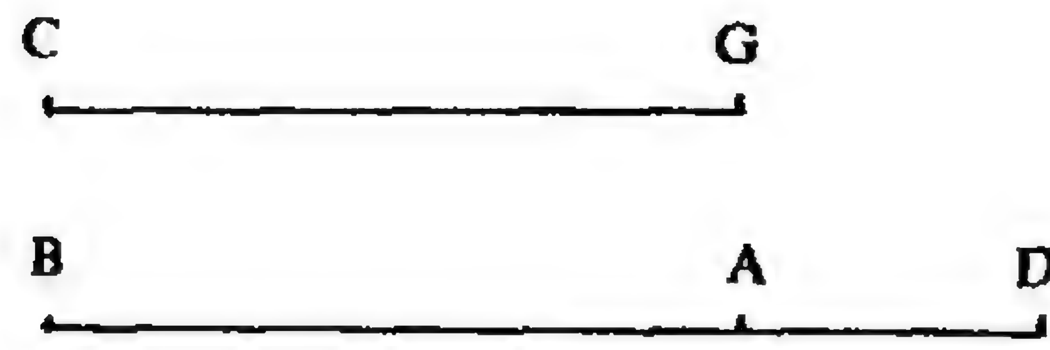
ومما تقدم يتبين أن الطوسي لم يتعرض للحالة $c = 0$ إلا عندما أراد تحديد λ_1 وλ_2 بهدف الحصول على حصر للجذور (حيث $c_0 > 0$).

المعادلة ٢٥: $x^3 + c = ax^2 + bx$

سوف تُعالج هذه المسألة في كلّ من الحالات الثلاث التالية:

$a < b^{\frac{1}{2}}$ ، $a > b^{\frac{1}{2}}$ ، $a = b^{\frac{1}{2}}$

الحالة الأولى: $a = b^{\frac{1}{2}}$ (الشكل رقم (٣ ـ ٣٧)).



الشكل رقم (٣ ـ ٣٧)

تمهيد: إذا كان $c > a^3$ تكون المسألة مستحيلة.

فليكن $AB = b^{\frac{1}{2}}$، $BA = CG = a$. إذا كان x حلاً للمعادلة ٢٥ يكون:

$$AB^2 \,.\, x + GC \,.\, x^2 = x^3 + c \qquad (١)$$

نفرض أولاً أن $x = BD > AB = a$، فيكون لدينا

$$x^3 - ax^2 = x^2(x - a) = BD^2 \,.\, AD,$$

وَ

$$bx = AB^2 \,.\, BD,$$

لكن

$$AB^2 \,.\, BD - AB^2 \,.\, AD = AB^3$$

وَ

$$AB^2 . BD - BD^2 . AD = c = AB^3 - (AB + BD)AD^2;$$

فيكون $c < a^3$.

نفرض الآن أن $x = BE < AB = a$ ؛ فيكون لدينا:

$$ax^2 - x^3 = AB . BE^2 - BE^3 = AE . BE^2$$

فيكون

$$c - bx = AE . BE^2$$

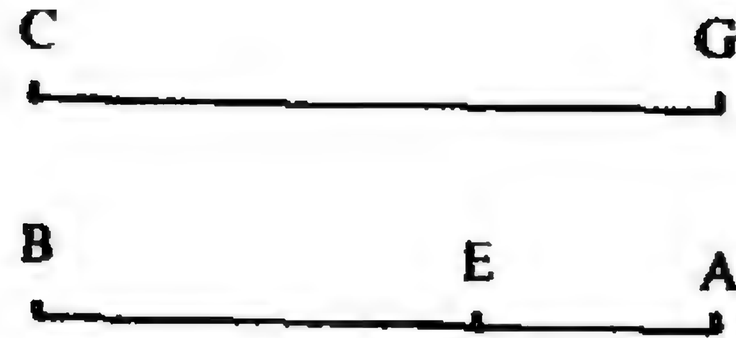
ومنها

$$c = AE . BE^2 + AB^2 . BE = AE . BE^2 + (AB^3 - AB^2 . AE)$$

وبالتالي

$$c = AB^3 - (AB + BE) . AE^2,$$

فيكون $c < a^3$ (الشكل رقم (٣ ـ ٣٨)).



الشكل رقم (٣ ـ ٣٨)

هكذا يكون قد تبيّن أنه:

ـ إذا كان $c > a^3$ فلا حل للمسألة؛

ـ إذا كان $c = a^3$ يكون $x = a$ حلاً؛

ـ إذا كان $c < a^3$ يكون للمسألة حلاّن x_1 وَ x_2 يحققان

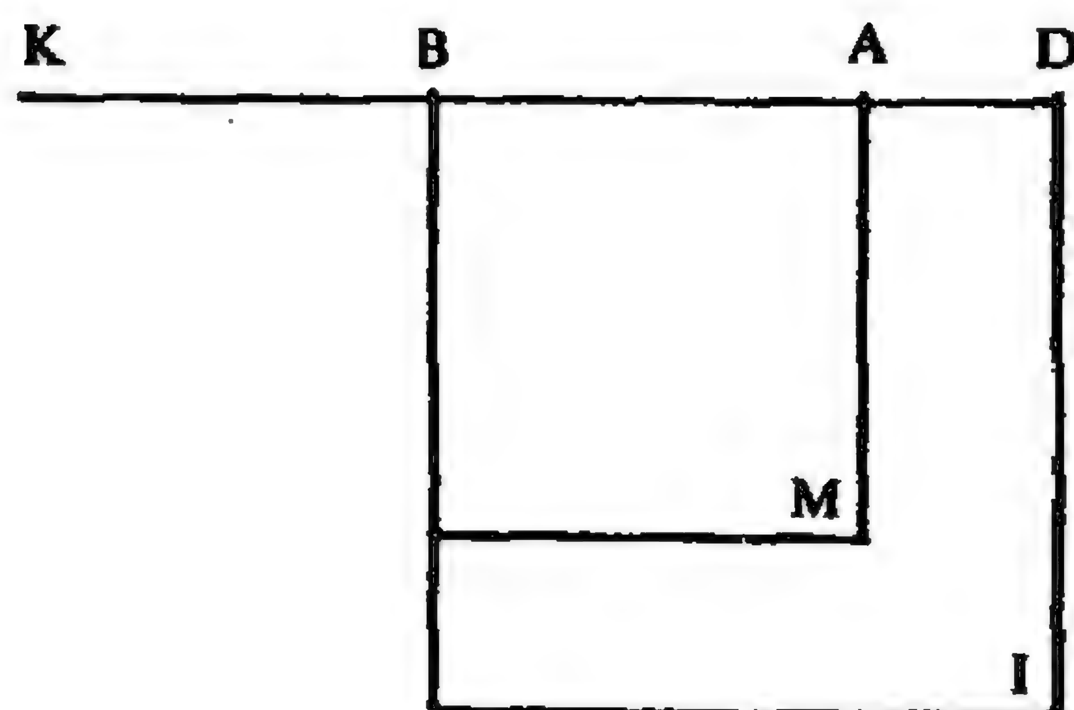
$$x_1 < a < x_2.$$

تحديد الجذر الأكبر x_2

ليكن $BK = AB$ (الشكل رقم (٣ ـ ٣٩)) ولنأخذ المعادلة من النوع ١٥ التالية:

$$x^3 + AK\, x^2 = a^3 - c \qquad (٢)$$

ليكن (AD) حل المعادلة (٢). ولنبرهن أن $x_2 = BD$ هو حل للمعادلة (١).



الشكل رقم (٣ ـ ٣٩)

لدينا

$$AD^2(AD + AK) = AB^3 - c$$

فبما أن

$$AD^2 . DK = AD^2 . (DB + BA) = DA . (IM)$$

يكون

$$(IM) . AD + c = AB^3$$

ومنها

$$AB^2 . AD + (IM) . AD + c = AB^3 + AB^2 . AD,$$

فيكون

$$BD^2 . AD + c = AB^2 . BD,$$

وبإضافة $DB^2 . AB$ إلى كلا الطرفين، نحصل على:

$$BD^2 . BD + c = AB^2 . BD + BD^2 . AB,$$

وهذا يعني

$$BD^3 + c = b . BD + a . BD^2;$$

فيكون BD جذراً لِـ (١).

حصر الجذر الأكبر: $a < x_2 < 2a$

بيّنا أن لدينا، استناداً إلى (٢):

$$AD^2 . DK = AB^3 - c$$

فيكون لدينا

$$AD^2 \, . \, DK < AB^3 \qquad (٣)$$

فلنبرهن أن $AD < AB$. فإذا فرضنا أن $AD \geq AB$ يكون

$$AD^2 \, . \, DK \geq 3AB \, . \, DA^2 > AB^3,$$

وهذا خُلف، استناداً إلى (٣).

لذلك يكون لدينا

$$DB = DA + AB < 2AB \quad \text{وَ} \quad DA < AB$$

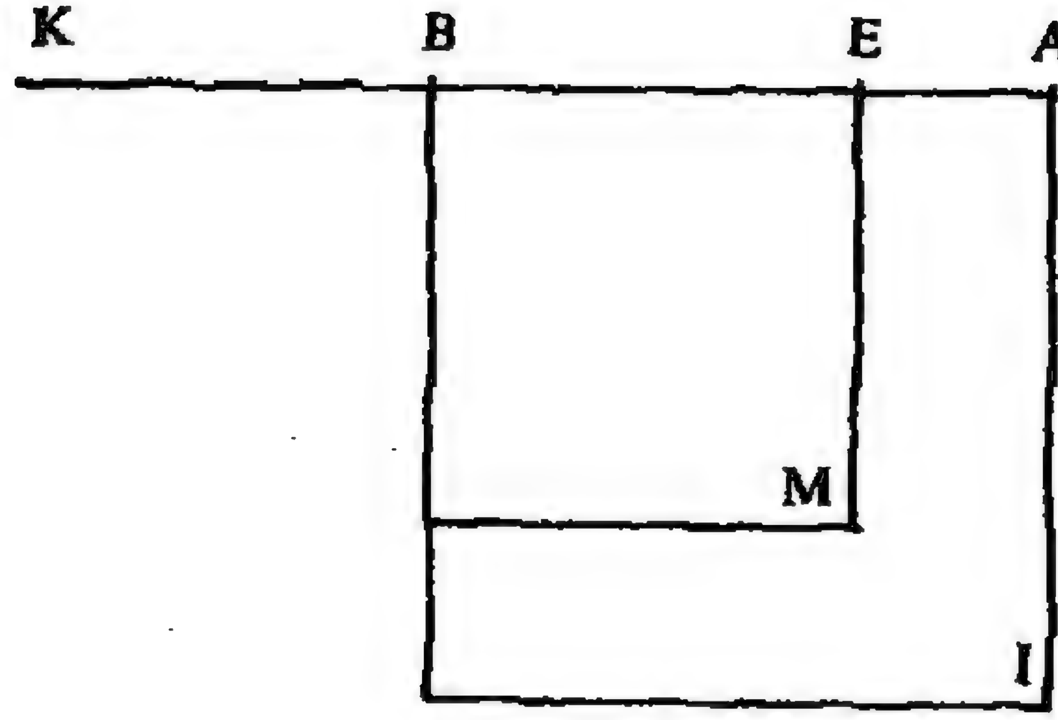
تحديد الجذر الأصغر x_1

ليكن AE حلاً للمعادلة من النوع ٢١ التالية:

$$x^3 + AB^3 - c = AK \, . \, x^2 \qquad (٤)$$

فيكون لدينا:

$$AE^2 \, . \, EK = AB^3 - c;$$



الشكل رقم (٣ ـ ٤٠)

فلنبرهن أن $EB = x_1$ جذر للمعادلة (١)؛ (الشكل رقم (٣ ـ ٤٠)). لدينا أن:

$$AB^3 = AB^2 \, . \, BE + AB^2 \, . \, AE = AB^2 \, . \, BE + BE^2 \, . \, AE + (IM) \, . \, AE,$$

لكن

$$(IM)AE = AE^2 \, . \, EK,$$

فيكون

$$AB^3 = AB^2 \cdot BE + BE^2 \cdot AE + AE^2 \cdot EK,$$

لكن

$$AB^3 = c + AE^2 \cdot EK,$$

فيكون

$$AB^2 \cdot BE + BE^2 \cdot AE = c;$$

وبإضافة BE^3 إلى كلا الطرفين:

$$BE^3 + c = AB^2 \cdot BE + BE^2 \cdot AB,$$

ويكون BE جذراً لِـ (١).

حصر الجذر الأصغر x_1: $0 < x_1 < a$؛

فمهما كان BE، ($BE < AB = a$)، يكون

$$AB \cdot BE^2 - BE^3 = BE^2 \cdot AE;$$

وإذا وضعنا

$$c' = AB^2 \cdot BE + BE^2 \cdot AE,$$

نحصل على $c' < AB^3$. فإذا وضعنا $c = c'$، يكون BE جذراً للمعادلة (١).

فأي عدد أصغر من AB مهما بلغ حدّه من الصِغَر هو جذر لمعادلة من النوع ٢٥.

العلاقة بين المعادلة ٢٥ والمعادلة ١٥

تبين أنه إذا كان $BD = x_2$ يكون

$$AB^3 - c = (BD + AB) \cdot AD^2,$$ (الشكل رقم (٣ ـ ٤١))



الشكل رقم (٣ ـ ٤١)

وبوضع $AD = X$، نحصل على

$$(2BA + X)X^2 = 2AB \cdot X^2 + X^3 = AB^3 - c,$$

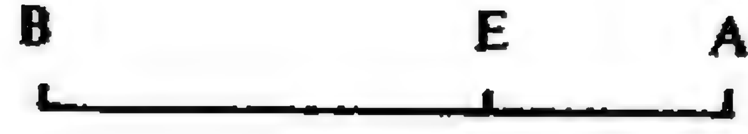
فيكون $AD = X$ حلاً للمعادلة (٢) ويكون

$$AD + AB = BD,$$

أي

$$x_2 = BD = X + a.$$

العلاقة بين المعادلة ٢٥ والمعادلة ٢١ (الشكل رقم (٣ ـ ٤٢))



الشكل رقم (٣ ـ ٤٢)

تبين أنه عندما يكون $BE = x_1$، يكون

$$AB^3 - c = (AB + BE) \,.\, AE^2,$$

وبوضع $X = AE$، نحصل على:

$$AB^3 - c = (2AB - AE) \,.\, AE^2 = 2AB \,.\, X^2 - X^3,$$

فيكون

$$X^3 + AB^3 - c = 2AB \,.\, X^2,$$

ويكون $X = AE$ حلاً للمعادلة (٤) ويكون

$$x_1 = BE = AB - AE = a - X.$$

وخلاصة لهذه النقطة يمكن القول:

ليكن $c_0 = AB^3 = a^3$؛

ـ إذا كان $c > c_0$ تكون المسألة مستحيلة؛

ـ إذا كان $c = c_0$ يكون a الحل الوحيد؛

ـ إذا كان $c < c_0$ يكون للمسألة حلّان x_1 وَ x_2 يحققان:

$$0 < x_1 < a < x_2 < 2a.$$

نضع $k = c_0 - c$ ونأخذ المعادلة

$$x^3 + 2ax^2 = k;$$

فإذا كان X حل هذه المعادلة، يكون لدينا

$$X + a = x_2.$$

ونأخذ المعادلة

$$x^3 = k + 2ax^2,$$

فإذا كان X حلاً لهذه المعادلة، يكون لدينا:

$$a - X = x_1.$$

الحالة الثانية: $a > b^{\frac{1}{2}}$ (الشكل رقم (٣ ـ ٤٣)):



الشكل رقم (٣ ـ ٤٣)

نضع $BC = a$ وَ $AB^2 = b$، $BC > AB$. تُكتب المعادلة ٢٥ على الشكل التالي:

$$BC \cdot x^2 - x^3 + AB^2 \cdot x = c \qquad (٥)$$

دراسة النهاية العظمى

لنأخذ المعادلة

$$\frac{1}{3}AB^2 + \frac{2}{3}BC \cdot x = x^2 \qquad (٦)$$

وليكن $x_0 = BD$ جذرها. لدينا

$$AB < BD < BC.$$

فلنبرهن أولاً أن $BD > AB$. لدينا

$$BD = \frac{2}{3}BC + (BD - \frac{2}{3}BC),$$

واستناداً إلى (٦)

$$BD\left(BD - \frac{2}{3}BC\right) = \frac{1}{3}AB^2.$$

فإذا كان $BD = AB$، يكون

$$AB^2 = \frac{1}{3}AB^2 + \frac{2}{3}BC \cdot AB,$$

ومنها

$$\frac{2}{3}AB^2 = \frac{2}{3}BC \ . \ AB,$$

وهذا خُلف.

وإذا كان $BD < AB$، يكون

$$BD\left(BD - \frac{2}{3}BC\right) = \frac{1}{3}AB^2 > \frac{1}{3}AB \ . \ BD$$

وبالتالي

$$\frac{1}{3}AB < BD - \frac{2}{3}BC;$$

لكن، من المعطيات

$$\frac{2}{3}BC > \frac{2}{3}AB,$$

فيكون

$$BD > AB,$$

وهذا خُلف.

لذلك يكون لدينا $AB < BD$.

لنبرهن الآن أن $BD < BC$. لدينا:

$$BD\left(BD - \frac{2}{3}BC\right) = \frac{1}{3}AB^2;$$

لكن $BD > AB$

$$\frac{1}{3}AB > BD - \frac{2}{3}BC,$$

وبما أن $BC > AB$ من المعطيات:

$$\frac{1}{3}BC > BD - \frac{2}{3}BC,$$

يكون

$$BD < BC.$$

ويكون بالتالي

$$b^{\frac{1}{2}} = AB < BD = x_0 < BC = a.$$

ومن جهة أخرى تُكتب العلاقة (٦) على الشكل:

$$AB^2 + 2BD \ . \ DC = BD^2,$$

فيكون لدينا

$$2DC \cdot BD = BD^2 - AB^2 = (DB + BA) \cdot DA \qquad (٧)$$

ولدينا

$$BC \cdot BD^2 - BD^3 = (BC - DB)DB^2 = DC \cdot DB^2.$$

فإذا كان BD جذراً للمعادلة (٥) يكون

$$BC \cdot BD^2 - BD^3 = DC \cdot DB^2 = c_0 - AB^2 \cdot BD$$

فيكون

$$c_0 = AB^2 \cdot BD + DC \cdot BD^2$$

قضية: ليكن

$$c_0 = AB^2 \cdot BD + DC \cdot BD^2$$

إن كل x غير $x_0 = BD$ يحقق العلاقة

$$c = BC \cdot x^2 - x^3 + AB^2 \cdot x < c_0$$

(وسيتم البرهان في كل من الحالتين ١ و٢ التاليتين) (المترجم).

١ ـ إذا كان

$$BD < x = BE < BC$$

يكون $c < c_0$ (الشكل رقم (٣ ـ ٤٤)).



الشكل رقم (٣ ـ ٤٤)

فلدينا

$$BC \cdot BE^2 = BE^3 + CE \cdot BE^2,$$

ومنها

$$c = AB^2 \cdot BE + CE \cdot BE^2;$$

لكن

$$c_0 = AB^2 \cdot BD + DC \cdot BD^2 = AB^2 \cdot BD + CE \cdot BD^2 + ED \cdot BD^2;$$

ومن جهة أخرى لدينا

$$BE^2 \cdot CE = BD^2 \cdot CE + (EB + BD) \cdot ED \cdot CE,$$

وكذلك

$$AB^2 . BE = AB^2 . ED + AB^2 . BD.$$

فتبقى مقارنة

$$(DB+BA) . AD . DE \quad \text{مع} \quad (BE+BD) . ED . CE .$$

لكن

$$2DB . CD = 2DB . DE + 2DB . CE$$

وَ

$$(BE+BD)CE = 2DB . CE + DE . CE$$

ولدينا

$$2DB . DE > DB . CE$$

وهذا يعني

$$2DE > CE$$

وذلك لأن لدينا، استناداً إلى (٦):

$$DB > \frac{2}{3}BC$$

لذلك يكون

$$2DB . CD > (BE+BD)CE;$$

ورأينا، استناداً إلى (٧) أن

$$2DC . DB = (DB+BA)DA$$

فيكون

$$\frac{DB+BA}{EB+BD} > \frac{CE}{AD} ,$$

ومنها

$$\frac{(DB+BA) . DA}{(EB+BD) . DE} > \frac{CE}{DE} ,$$

ويحصل

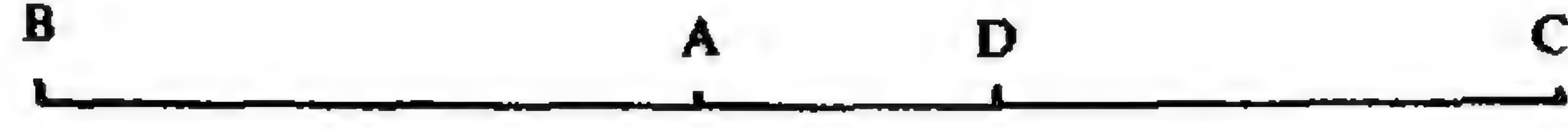
$$(DB+BA) . DA . DE > (EB+BD) . DE . CE,$$

وهذا يعني أن

$$c_0 > c .$$

نفرض الآن أن $BD < BE = x = BC$؛ في هذه الحالة لدينا:

$c = AB^2 . BC.$ (الشكل رقم (٣ ـ ٤٥))



الشكل رقم (٣ ـ ٤٥)

لكن

$$c_0 = AB^2 . BD + DC . BD^2;$$

فتبقى مقارنة $AB^2 . DC$ مع $BD^2 . DC$ ولكن لدينا

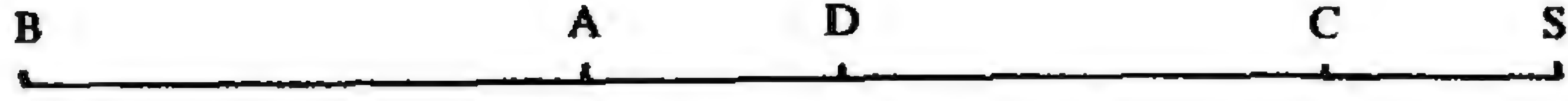
$$DB^2 . DC = AB^2 . DC + (DB + AB)AD . DC$$

فيكون

$$c_0 > c.$$

نفرض أخيراً أن $x = BS > BC > BD$؛ في هذه الحالة لدينا

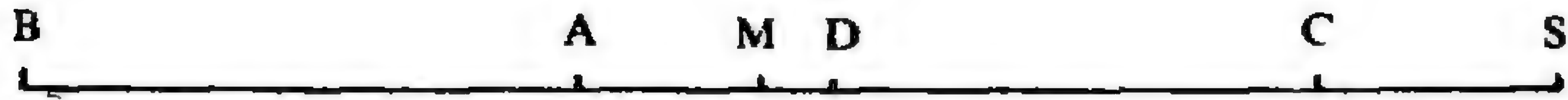
$c = AB^2 . BS - SC . BS^2 < AB^2 . BC < c_0$ (الشكل رقم (٣ ـ ٤٦))



الشكل رقم (٣ ـ ٤٦)

هكذا يكون قد تبين أنه مهما كان x، $x > BD = x_0$، يكون $c < c_0$.

٢ ـ إذا كان $AB < x = BM < BD$، (الشكل رقم (٣ ـ ٤٧))، يكون $c < c_0$.



الشكل رقم (٣ ـ ٤٧)

فلدينا

$$c = MC . BM^2 + AB^2 . BM$$

وَ

$$c_0 = AB^2 . BD + BD^2 . CD.$$

لكن

$$(DB + BM)CD + DM . CD = 2DB . CD,$$

وَ

$$(MB+BA) \, . \, MA+(DB+BM)DM=(DB+BA) \, . \, DA;$$

لكن

$$(DB+BM) \, . \, DM > DM \, . \, CD,$$

وكذلك استناداً إلى (٧):

$$2DB \, . \, CD=(DB+BA)DA$$

فيكون

$$(DB+BM) \, . \, CD > (MB+BA)MA,$$

ويكون

$$\frac{MB+BA}{DB+BM} < \frac{CD}{AM} \, ,$$

وبالتالي

$$\frac{(MB+BA) \, . \, AM}{(DB+BM) \, . \, MD} < \frac{CD}{MD} \, ,$$

فيكون

$$(MB+BA) \, . \, AM \, . \, MD < (DB+BM) \, . \, MD \, . \, CD;$$

وإذا أضفنا $BM^2 \, . \, CD$ وَ $AB^2 \, . \, DM$ إلى كلا الطرفين، نحصل على:

$$BM^2 \, . \, CM < BD^2 \, . \, CD + AB^2 \, . \, DM.$$

وإذا أضفنا $AB^2 \, . \, BM$ إلى كلا الطرفين:

$$BM^2 \, . \, CM + AB^2 \, . \, BM < BD^2 \, . \, CD + AB^2 \, . \, BD,$$

وهذا يعني:

$$c < c_0 \, .$$

نفرض الآن أن $x=AB=BM<BD$؛ فيكون

$$c=AB^2 \, . \, BC$$ (الشكل رقم (٣ ـ ٤٨))

لكن

$$c_0=AB^2 \, . \, BD+BD^2 \, . \, CD=BC \, . \, AB^2+(DB+BA) \, . \, AD \, . \, CD;$$

فيكون

$$c_0 > c.$$



الشكل رقم (٣ ـ ٤٨)



الشكل رقم (٣ ـ ٤٩)

نفرض أخيراً أن $x = BE < AB < BC$، فيكون

$$c = BC \cdot BE^2 + (AB + BE) \cdot AE \cdot EB$$

ويكون

$$c_0 = AB^2 \cdot BD + BD^2 \cdot CD > BC \cdot AB^2.$$

لكن

$$c < BC \cdot BE^2 + (AB^2 - EA^2) \cdot BC$$

فيكون

$$c < BC \cdot AB^2 < c_0 \; .$$

هكذا يكون قد تبين أن لكل x، حيث $x < BD$، لدينا $c < c_0$.

نتيجة لما عُرِض في الحالتين السابقتين ١ و ٢ يكون قد تم برهان القضية. وهكذا يكون لدينا ما يلي:

ـ إذا كان $c > c_0$ تكون المسألة مستحيلة؛

ـ إذا كان $c = c_0$ يكون $x_0 = BD$ الحل الوحيد؛

ـ إذا كان $c < c_0$ يكون للمسألة حلّان، x_1 و x_2 بحيث يكون

$$x_1 < x_0 < x_2.$$

تحديد الجذر الأكبر x_2

١ ـ إذا كان $c > AB^2 \cdot CB$ يكون $BD < x_2 < AB$. (الشكل رقم (٣ ـ ٥٠)).



الشكل رقم (٣ ـ ٥٠)

وهذا يعني أنه إذا كان $ab < c < c_0$ يكون $x_0 < x_2 < a$.

ليكن J على امتداد DB بحيث يكون $BJ = BD$ ولنفصِل $MG = CD$ ونأخذ المعادلة من النوع ١٥:

$$x^3 + DMx^2 = c_0 - c \qquad (8)$$

إذا كان X جذر هذه المعادلة يكون $X < CD$.

فبما أن $c > ab$ يكون

$$c_0 - BA^2 \,.\, BC > c_0 - c,$$

لكن

$$c_0 = DB^2 \,.\, DC + BA^2 \,.\, BD,$$

وَ

$$BA^2 \,.\, BC = BA^2 \,.\, BD + BA^2 \,.\, CD,$$

فيكون

$$c_0 - BA^2 \,.\, BC = (DB + BA) \,.\, AD \,.\, CD,$$

وبناءً على (٧) يكون

$$(DB + BA)DA = 2DB \,.\, CD,$$

فيكون

$$c_0 - BA^2 \,.\, BC = 2DB \,.\, CD^2;$$

لكن

$$DJ \,.\, CD^2 = CD^2 \,.\, CM = CD^3 + CD^2 \,.\, DM > c_0 - c \qquad (9)$$

وَ

$$c_0 - c = X^3 + DM \,.\, X^2,$$

فنستنتج بسهولة أن $X < CD$.

لنفرض الآن أن $X = DO$ ولنبرهن أن:

$$x_2 = BO = BD + DO$$

فلدينا

$$(DB + BA)DA = JD \cdot CD,$$

فيكون

$$\begin{aligned}(DB + BA) \cdot DA \cdot DO &= JD \cdot DO \cdot CO + DO^2 \cdot CO + DO^2 \cdot OM\\ &= JO \cdot DO \cdot CO + DO^2 \cdot OM\\ &= (OB + BD)OD \cdot CO + DO^2 \cdot OM.\end{aligned}$$

وإذا أضفنا $BA^2 \cdot BO$ إلى كلا الطرفين نحصل على:

$$BD^2 \cdot DO + BA^2 \cdot BD = (OB + BD) \cdot OD \cdot CO + DO^2 \cdot OM + BA^2 \cdot BO;$$

وإذا أضفنا $BD^2 \cdot CO$ إلى كلا الطرفين نحصل على:

$$c_0 = BD^2 \cdot CD + BA^2 \cdot BD = BO^2 \cdot CO + DO^2 \cdot MO + BA^2 \cdot BO.$$

لكن، بناءً على (٨)، لدينا $c_0 - c = OD^2 \cdot OM$، فيكون

$$c + BO^3 = BO^2 \cdot BC + BA^2 \cdot BO$$

ويكون $BO = x_2$ الجذر المطلوب.

٢ ـ إذا كان $c = AB^2 \cdot BC = a.b$ يكون $x_2 = a = BC$. (الشكل رقم (٣ ـ ٥١)).



الشكل رقم (٣ ـ ٥١)

فلدينا

$$b \cdot x_2 = AB^2 \cdot CB = a \cdot b = c$$

وَ

$$x_2^3 = CB^3 = ax_2^2$$

فيكون

$$x_2^3 + c = ax_2^2 + bx_2.$$

يلاحظ الطوسي أن $AB = \sqrt{b}$ هو، في هذه الحالة، الجذر الأصغر x_1،

$x_1 < x_0$. فلدينا:

$$AB^3 = b \,.\, AB,$$

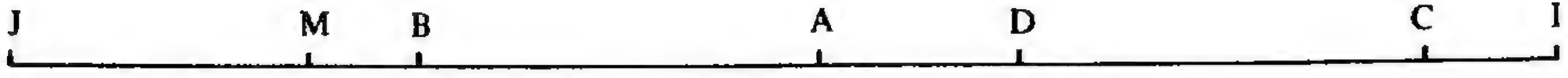
و

$$a \,.\, AB^2 = CB \,.\, AB^2 = c,$$

فيكون

$$b \,.\, AB + a \,.\, AB^2 = c + AB^3.$$

٣ ـ إذا كان $BC = ab$. $c < AB^2$ يكون $x_2 > BC = a$؛ (الشكل رقم (٣ ـ ٥٢)).



الشكل رقم (٣ ـ ٥٢)

فإذا كان X حل المعادلة (٨)، يكون $X > CD$؛ فلدينا، استناداً إلى (٩)

$$c_0 - c > c_0 - AB^2 \,.\, BC = CD^3 + CD^2 \,.\, DM,$$

وبالتالي

$$X^3 + DM.X^2 > CD^3 + CD^2 \,.\, DM,$$

فنستنتج بسهولة أن $X > CD$.

ليكن الآن $X = DI$ ولنبرهن أن

$$x_2 = BI = BD + DI;$$

فلنضع

$$I = BA^2 \,.\, BD + BD^2 \,.\, CB$$

وَ

$$II = BD^3.$$

لدينا

$$I' = I + AB^2 \,.\, DI = BA^2 \,.\, BI + BD^2 \,.\, CB$$

$$II' = II + AB^2 \,.\, DI = BD^3 + BA^2 \,.\, DI$$

وَ

$$I' - II' = I - II = c_0.$$

ومن جهة أخرى

$$II'' = I' + (IB + BD)DI \,.\, CB = BA^2 \,.\, BI + BI^2 \,.\, CB$$

$$II'' = II' + (IB + BD)DI \cdot CB = (IB + BD) \cdot DI \cdot CB + BA^2 \cdot DI + BD^3$$

وكذلك

$$I'' - II'' = c_0.$$

ومهما كان العدد g يكون لدينا

$$I'' - (II'' + g) = c_0 - g;$$

فإذا كان

$$g = (DB + BA)AD \cdot ID + (IB + BD)ID \cdot IC$$

نحصل على:

$$II'' + g = BI^3,$$

فيكون

$$BA^2 \cdot BI + CB \cdot BI^2 - BI^3 = I'' - (II'' + g) = c_0 - g \quad (١٠)$$

لكن

$$(DB + BA) \cdot AD \cdot ID = 2DB \cdot CD \cdot ID,$$

وَ

$$(IB + BD) \cdot ID \cdot CI = 2BD \cdot CI \cdot ID + ID^2 \cdot CI,$$

فيكون

$$g = 2BD \cdot ID^2 + ID^2 \cdot CI = JD \cdot ID^2 + ID^2 \cdot CI$$
$$= (CM + CI)ID^2 = IM \cdot ID^2;$$

واستناداً إلى (٨)، يكون

$$IM \cdot ID^2 = c_0 - c$$

فتُكتب (١٠) على الشكل التالي

$$BA^2 \cdot BI + CB \cdot BI^2 - BI^3 = c,$$

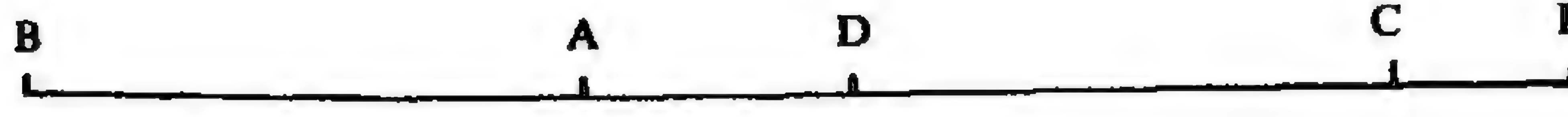
ويكون BI هو الجذر الأكبر x_2.

حصر الجذر الأكبر

لتكن المعادلة

$$x^2 = ax + b \quad (١١)$$

حيث $a = BC$ وَ $b = AB^2$ (الشكل رقم (٣ ـ ٥٣))، وليكن BI جذرها (I ليست النقطة التي أُشير إليها سابقاً بهذا الحرف).



الشكل رقم (٣ ـ ٥٣)

مهما كان الجذر الأكبر x_2 للمعادلة (٥)، يكون $x_2 < BI$.

فلدينا، استناداً إلى (١١)

$$BI^2 = BI \, . \, CB + AB^2$$

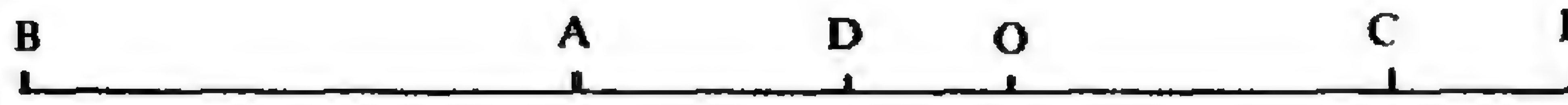
فيكون

$$BI^3 = BI^2 \, . \, CB + AB^2 \, . \, IB,$$

فلا يكون BI جذراً للمعادلة (٥)، وكل جذر x_2 لهذه المعادلة يكون أصغر من BI. (نلاحظ أن الطوسي لا يبرر تأكيده الأخير هذا ـ راجع التعليق ـ).

وبالعكس، فإن أي x حيث $BD < x < BI$ يمكن أن يكون جذراً لمعادلة من الشكل (٥) أي لمعادلة من النوع ٢٥.

فإذا وضعنا $x = BO$ (الشكل رقم (٣ ـ ٥٤))، نحصل على:



الشكل رقم (٣ ـ ٥٤)

$$BI^3 - BO^3 = OB^2 \, . \, IO + (IB + BO)IO \, . \, IB;$$

لكن، استناداً إلى (١١):

$$BI^3 = BI^2 \, . \, CB + AB^2 \, . \, BI$$

وبما أن $BC < BI$ وَ $AB < BO$:

$$(BI^2 \, . \, CB + AB^2 \, . \, BI) - (BO^2 \, . \, CB + AB^2 \, . \, BO) =$$

$$AB^2 \, . \, IO + (IB + BO) \, . \, IO \, . \, BC \; < \; BI^3 - BO^3,$$

فيكون

$$BO^3 < BO^2 \, . \, CB + AB^2 \, . \, BO.$$

وإذا وضعنا

$$c = BO^2 \,.\, CB + AB^2 \,.\, BO - BO^3$$

نحصل على معادلة من النوع ٢٥ يكون BO جذراً لها.

تحديد الجذر الأصغر x_1

لتكن المعادلة من النوع ٢١:

$$x^3 + c_0 - c = DM \,.\, x^2 \qquad (١٢)$$

وليكن DE حلاً لها (الشكل رقم (٣ ـ ٥٥)).



الشكل رقم (٣ ـ ٥٥)

١ ـ إذا كان $DE < AD$ يكون $x_1 = BE = BD - DE$؛ فلدينا، استناداً إلى (٧)

$$2BD \,.\, CD \,.\, DE = (DB + BA)DA \,.\, DE$$
$$= (EB + BA)AE \,.\, DE + (DB + BE) \,.\, DE^2.$$

لكن

$$(DB + BE) \,.\, DE^2 = DE^2 \,.\, JE$$

وَ

$$2BD \,.\, DE \,.\, CD = (DB + BE) \,.\, DE \,.\, CD + DE^2 \,.\, CD,$$

وإذا طرحنا $DE^2 \,.\, CD$، نحصل على:

$$(EB + BA) \,.\, AE \,.\, DE + DE^2 \,.\, EM = (DB + BE) \,.\, DE \,.\, CD.$$

وإذا أضفنا $BE^2 \,.\, CD + BA^2 \,.\, DE$ إلى كلا الطرفين، نحصل على:

$$BE^2 \,.\, CE + DE^2 \,.\, EM = BD^2 \,.\, CD + BA^2 \,.\, DE;$$

وإذا أضفنا إلى كلا الطرفين $BA^2 \,.\, DE$، نحصل على:

$$BE^2 \,.\, CE + BA^2 \,.\, BE + DE^2 \,.\, EM = c_0;$$

لكن، استناداً إلى (١٢)، لدينا

$$DE^2 \,.\, EM = c_0 - c$$

فيكون

$$BE^2 \,.\, CE + BA^2 \,.\, BE = c,$$

ويكون BE حلاً للمعادلة (٥).

٢ ـ إذا كان $DE = AD$، يكون $x_1 = AB$؛ (الشكل رقم (٣ ـ ٥٦)).



الشكل رقم (٣ ـ ٥٦)

فلدينا

$$2BD \,.\, CD \,.\, DA = (DB + BA) \,.\, DA^2 = AJ \,.\, DA^2,$$

لكن

$$2BD \,.\, DA = (DB + BA) \,.\, AD + AD^2,$$

فيكون

$$2BD \,.\, AD \,.\, CD - AD^2 \,.\, CD = DA^2(AJ - CD) = DA^2 \,.\, AM,$$

فيكون

$$DA^2 \,.\, AM = (DB + BA) \,.\, AD \,.\, CD,$$

وبالتالي

$$DA^2 \,.\, AM + AB^2 \,.\, CD = DB^2 \,.\, CD;$$

فنحصل على

$$DA^2 \,.\, AM + AB^2 \,.\, BC = DB^2 \,.\, CD + BA^2 \,.\, BD = c_0.$$

لكن، بناءً على (١٢)، لدينا

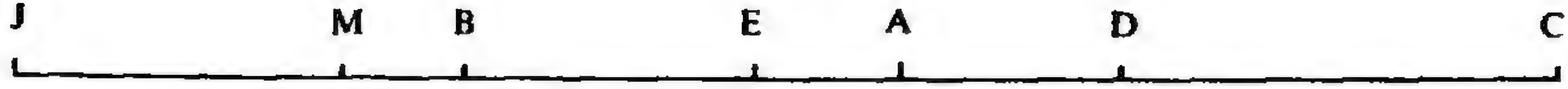
$$DA^2 \,.\, AM + c = c_0$$

فيكون

$$c = AB^2 \,.\, BC = BC \,.\, AB^2 + AB^2 \,.\, AB - AB^3,$$

ويكون x_1 الجذر الأصغر للمعادلة (٥).

٣ ـ إذا كان $DE > AD$ يكون $x_1 = BE$. (الشكل رقم (٣ ـ ٥٧)).



الشكل رقم (٣ ـ ٥٧)

فبما أن $DB = BJ$ وَ $DB + BE = JE$، يكون

$$(DB + BE) \,.\, DE^2 = JE \,.\, DE^2;$$

لكن

$$(DB + BA) \,.\, DA \,.\, DE = 2BD \,.\, CD \,.\, DE,$$

فيكون

$$2BD \,.\, CD \,.\, DE + (DB + BE)DE^2 = (DB + BA) \,.\, DA \,.\, DE + JE \,.\, DE^2,$$

لكن

$$(DB + BE)CD \,.\, DE + DE^2 \,.\, CD = 2DB \,.\, CD \,.\, DE,$$

فيكون

$$(DB + BE) \,.\, DE \,.\, CE = (DB + BA) \,.\, DA \,.\, DE + DE^2 \,.\, EM \qquad (١٣)$$

لكن

$$BC \,.\, BE^2 + AB^2 \,.\, BE - BE^3 < AC \,.\, BD^2 + AB^2 \,.\, BD - BD^3,$$

وبالتالي

$$BD^2 \,.\, BC + AB^2 \,.\, BD - (BE^2 \,.\, BC + AB^2 \,.\, BE) > BD^3 - BE^3 \qquad (١٤)$$

ومن جهة أخرى، لدينا

$$BC \,.\, BD^2 - (DB + BE)DE \,.\, CB = BE^2 \,.\, CB,$$

$$AB^2 \,.\, BD - AB^2 \,.\, DE = AB^2 \,.\, BE,$$

$$BD^3 - [BD^2 \,.\, DE + (DB + BE) \,.\, DE \,.\, BE] = BE^3,$$

فيكون

$$(BC \,.\, BD^2 + AB^2 \,.\, BD) - (BC \,.\, BE^2 + AB^2 \,.\, DE)$$
$$= (DB + BE)DE \,.\, CB + AB^2 \,.\, DE.$$

ولنبرهن الآن أن

$$(DB+DE) . DE . CB+AB^2 . DE = BD^3 - BE^3 + DE^2 . EM.$$

لنضع

$$I = BD^3 - BE^3$$

ونضع

$$II = (DB+BE)DE . CB + AB^2 . DE.$$

فإذا طرحنا $(DB+BE) . DE . BE$، من I و II، يبقى

$$I' = DB^2 . DE$$

$$II' = (DB+BE) . DE . CE + AB^2 . DE;$$

وإذا طرحنا $AB^2 . DE$ من I' و II' يبقى

$$I'' = (DB+BA) . DA . DE$$

$$II'' = (DB+BE) . DE . CE;$$

لكن، لدينا، استناداً إلى (١٣)

$$(DB+BE) . DE . CE - (DB+BA)DA . DE = DE^2 . EM,$$

فيكون لدينا، استناداً إلى (١٤)

$$BC . BD^2 + AB^2 . BD - BD^3 = BC . BE^2 + AB^2 . BE - BE^3 + DE^2 . EM,$$

لكن

$$DE^2 . EM = c_0 - c$$

فيكون

$$BC . BE^2 + AB^2 . BE - BE^3 = c;$$

ويكون $BE = x_1$ الجذر الأصغر المطلوب.

العلاقة بين المعادلة ٢٥ والمعادلة ١٥

١ ـ إذا كان $AB^2 . BC < c < c_0$، يكون $x_2 < BC$؛ فليكن $x_2 = BE$ (الشكل رقم (٣ ـ ٥٨))؛ برهنّا أن

$$(DB+BA)DA . DE = (DB+BE) . DE . CE + DE^2 . EM;$$



الشكل رقم (٣ ـ ٥٨)

ولنضع $DE = X$، فيكون لدينا

$$(DB + BE)DE \,.\, CE = (2DB + X)\,(CD - X)X$$
$$= 2BD \,.\, CDX - (2BD - CD)X^2 - X^3$$

وأيضاً

$$(DB + BA)DA \,.\, DE = (DB + BA)DA \,.\, X,$$

وبالتالي

$$(DB + BA)DA \,.\, X + X^3 + X^2(2BD - CD) = 2BD \,.\, CD \,.\, X + c_0 - c;$$

ولدينا، استناداً إلى (٧)

$$(DB + BA)DA = 2BD \,.\, CD,$$

فيكون

$$X^3 + X^2(2BD - CD) = c_0 - c;$$

وهذه المعادلة تعطي $X = DE = x_2 - x_0$.

٢ ـ إذا كان $c = AB^2 \,.\, BC$، يكون $x_2 = BC$؛ هذه النتيجة قدمها الطوسي من دون استخدام معادلة وسيطة.

٣ ـ إذا كان $c < AB^2 \,.\, BC$، يكون $x_2 = BE > BC$؛ (الشكل رقم (٣ ـ ٥٩)).



الشكل رقم (٣ ـ ٥٩)

تمهيد: إذا كان $p > q$ وَ $s > t$، يكون

$$(p + s) - (q + t) = (p - q) - (t - s).$$

لدينا

$$BD^3 + c_0 = BD^2 \,.\, BC + BD \,.\, AB^2$$
$$BD \,.\, AB^2 + ED \,.\, AB^2 = BE \,.\, AB^2$$
$$BD^2 \,.\, BC + (EB + BD)ED \,.\, BC = EB^2 \,.\, BC$$

وبالتالي

$$EB^2 \,.\, BC + BE \,.\, AB^2$$
$$= (BD \,.\, AB^2 + BD^2 \,.\, BC) + (ED \,.\, AB^2 + (EB + BD)ED \,.\, BC).$$

ومن جهة أخرى

$$BD^3 + BD^2 \,.\, ED + (EB + BD)ED \,.\, BE = BE^3;$$

فيكون لدينا

$$c = BC \,.\, BE^2 + AB^2 \,.\, BE - BE^3 = c_0 -$$
$$-\{BD^2 \,.\, ED + (EB + BD)DE \,.\, BE -$$
$$-[AB^2 \,.\, ED + (BE + BD)DE \,.\, BC]\};$$

فلنضع

$$t = BD^2 \,.\, ED + (EB + BD) \,.\, DE \,.\, BE,$$
$$s = AB^2 \,.\, ED + (BE + BD) \,.\, DE \,.\, BC.$$

ولنطرح $(BE + BD) \,.\, ED \,.\, BD$ من كلٍّ من s و t، فنحصل على:

$$t - s = BE^2 \,.\, ED - [ED \,.\, AB^2 + (EB + BD)ED \,.\, CD];$$

وبطرح $AB^2 \,.\, ED$ من كل من الحدين نحصل على

$$t - s = (EB + BA)AE \,.\, ED - (EB + BD)ED \,.\, CD.$$

وإذا وضعنا $DE = X$ نحصل على:

$$(EB + BA) \,.\, AE \,.\, ED = (BD + BA + X)\,(DA + X) \,.\, X$$
$$= [(DB + BA)DA + 2BD \,.\, X + X^2]X.$$
$$(EB + BD)ED \,.\, CD = (2BD + DE)DE \,.\, CD$$
$$= 2BD \,.\, CD \,.\, X + CD \,.\, X^2;$$

ومعلوم أن

$$(DB + BA)DA = 2DB \,.\, CD$$

فيكون بالتالي

$$t - s = (2BD - CD)X^2 + X^3 = c_0 - c;$$

ونحل المعادلة

$$(2BD - CD)X^2 + X^3 = c_0 - c,$$

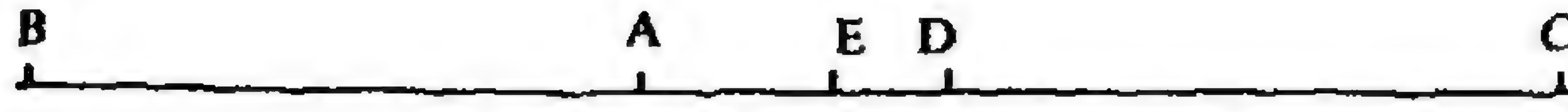
فنحصل على $X = DE$ ونستنتج $x_2 = BD + DE = x_0 + X$.

العلاقة بين المعادلة ٢٥ والمعادلة ٢١

نأخذ المعادلة من النوع ٢١

$$x^3 + c_0 - c = (2BD - CD)x^2 \qquad (١٢)$$

ليكن $X = DE$ (الشكل رقم (٣ ـ ٦٠)).



الشكل رقم (٣ ـ ٦٠)

١ ـ إذا كان $AD = BD - AB > DE$، يكون $x_1 = BD - BE > AB$. بما أن

$$c_0 = AB^2 . BD + BD^2 . CD$$
$$= AB^2 . BE + AB^2 . ED + EB^2 . CD + (BD + BE) . DE . CD$$

وَ

$$c = AB^2 . BE + EB^2 . CD + EB^2 . ED,$$

يكون لدينا

$$c_0 - c = AB^2 . ED + (BD + BE)DE . CD - EB^2 . ED.$$

وإذا طرحنا $AB^2 . DE$ من كلا الطرفين، نحصل على

$$c_0 - c = (BD + BE)DE . CD - (EB + AB)AE . ED,$$

فيكون

$$c_0 - c = (2DB - X)X . CD - (BD + BA - X)(DA - X)X$$
$$= 2DB . CD . X - CD . X^2 - (BD + BA)DA . X - X^3 + 2BD . X^2;$$

لكن لدينا

$$2DB . CD = (BD + BA)DA$$

فيكون

$$c_0 - c = (2BD - CD)X^2 - X^3,$$

ويكون $X = DE$ حلاً للمعادلة (١٢) ونستنتج

$$x_1 = BE = BD - DE = x_0 - X.$$

٢ ـ إذا كان $DE = BD - AB$، يكون $x_1 = AB$.

٣ ـ إذا كان $DE > BD - AB$، يكون $x_1 < AB$. ليكن $x_1 = BG$ (الشكل رقم (٣ ـ ٦١)).



الشكل رقم (٣ ـ ٦١)

سوف نستخدم التمهيد السابق.

لدينا ما يلي:

$$AB^2 \,.\, BD - AB^2 \,.\, DG = AB^2 \,.\, BG,$$
$$AB^2 \,.\, BD - AB^2 \,.\, DG = AB^2 \,.\, BG,$$
$$BD^2 \,.\, BC - (BD + BG) \,.\, DG \,.\, BC = BG^2 \,.\, BC,$$
$$BD^3 - [(BD + BG) \,.\, DG \,.\, DB + BG^2 \,.\, DG] = BG^3,$$

لكن

$$c = AB^2 \,.\, BG + BG^2 \,.\, BC - BG^3$$

فيكون

$$c_0 - c = AB^2 \,.\, DG + (BD + BG)DG \,.\, BC -$$
$$-[BG^2 \,.\, DG + (BD + BG) \,.\, DG \,.\, DB];$$

وإذا طرحنا $(BD + BG)DG \,.\, BG$ من حدّي الفرق نحصل على

$$c_0 - c = AB^2 \,.\, DG + (BD + BG) \,.\, DG \,.\, GC -$$
$$-[BG^2 \,.\, DG + (BD + BG) \,.\, DG \,.\, DG];$$

وإذا طرحنا من الحدّين $AB^2 \,.\, DG$، نحصل على

$$c_0 - c = (BD + BG)DG \,.\, CG - (BD + BA)DA \,.\, DG.$$

وإذا وضعنا $DG = X$، يكون لدينا

$$c_0 - c = (2DB - X)X(CD + X) - (DB + BA) \,.\, DA \,.\, X;$$

وإذا أخذنا بالاعتبار أن

$$2DB \cdot CD = (BD + BA)DA$$

نحصل على

$$c_0 - c = (2DB - CD)X^2 - X^3$$

أي على

$$X^3 + c_0 - c = (2DB - CD)X^2;$$

إن $X = DG$ حل لهذه المعادلة، فنستنتج

$$x_1 = BG = BD - DG = x_0 - X.$$

خلاصة:

نأخذ المعادلة

$$x^2 = \frac{2}{3}BC \cdot x + \frac{1}{3}AB^2 \qquad (٦)$$

التي يسمح جذرُها x_0 باحتساب c_0

$$c_0 = bx_0 + x_0^2\,(a - x_0);$$

- فإذا كان $c > c_0$ تكون المسألة مستحيلة؛
- وإذا كان $c = c_0$ يكون للمسألة حلٌّ هو x_0؛
- وإذا كان $c < c_0$ يكون لها حلّان x_1 و x_2 بحيث يكون

$$x_1 < x_0 < x_2.$$

وفي الحالة الأخيرة هذه:

- إذا كان $c = ab$ يكون $x_2 = a$ وَ $x_1 = \sqrt{b}$.
- إذا كان $c < ab$ أو $c > ab$، نأخذ المعادلة

$$x^3 + (3x_0 - a)x^2 = c_0 - c \qquad (٨)$$؛

ونسمي X حلّها؛ فيكون $x_2 = x_0 + X$. من ثم نأخذ المعادلة

$$x^3 + (c_0 - c) = (3x_0 - a)x^2 \qquad (١٢)$$

فإذا كان X حلاً لها (انظر التعليق) يكون $x_1 = x_0 - X$.

الحالة الثالثة : $a < b^{\frac{1}{2}}$ ، أي $BC < AB$.

ليكن BD جذراً للمعادلة

$$\frac{b}{3} + \frac{2a}{3}x = x^2 \qquad (٦)$$

فيكون

$$\frac{AB^2}{3} + \frac{2BC}{3} \cdot BD = BD^2.$$

لنبرهن أن

$BC < BD < AB$ (الشكل رقم (٣ ـ ٦٢))



الشكل رقم (٣ ـ ٦٢)

١ ـ لدينا $BD > BC$؛ فإذا كان $BD = BC$، يكون لدينا، استناداً إلى (٦)

$$\frac{BD^2}{3} = BD^2 - \frac{2}{3}BD \cdot BC = \frac{1}{3}AB^2$$

لكن

$$\frac{1}{3}BD^2 = \frac{1}{3}BC^2 < \frac{1}{3}AB^2,$$

فهذا خُلف. وإذا كان $BD < BC$ يكون

$$BD^2 - \frac{2}{3}BD \cdot BC < \frac{1}{3}BD^2 < \frac{1}{3}BC^2 < \frac{1}{3}AB^2,$$

وهذا خُلف.

٢ ـ ولدينا $BD < AB$. فإذا كان $BD = AB$ يكون

$$BD^2 - \frac{2}{3}BC \cdot BD = AB^2 - \frac{2}{3}BC \cdot AB = \frac{1}{3}AB^2;$$

لكن

$$AB^2 - \frac{2}{3}BC \cdot AB > \frac{1}{3}AB^2,$$

وهذا خُلف.

وإذا كان $BD > AB$، يكون

$$BD^2 - \frac{2}{3}BC \cdot BD > BD^2 - \frac{2}{3}AB \cdot BD > BD^2 > \frac{1}{3}AB^2,$$

وهذا خُلف. فيكون في النتيجة $BD < AB$.

لدينا، استناداً إلى (٦)

$$AB^2 . 2BC . BD = 3BD^2,$$

فيكون

$$(AB+BD) . AD + 2BC . BD = 2BD^2,$$

فيكون

$$(AB+BD) . AD = 2BD . CD;$$

وبالتالي

$$\frac{AB+BD}{2BD} = \frac{CD}{AD} .$$

نضع، في المعادلة ٢٥، $BD = x$، فيكون لدينا

$$bx = x^3 + (AB+BD) . AD . BD$$

ويكون

$$c - ax^2 = (AB+BD) . AD . BD.$$

ومن ثم نضع

$$c_0 = BD^2 . BC + (AB+BD) . AD . BD,$$

فإذا برهنا أنه بالنسبة إلى كل x (إن كان $x = BE > BD$، أو كان $x = BE < BD$)، لدينا

$$c = BE^2 . BC + (AB+BE) . AE . BE < c_0 ,$$

نكون قد برهنا استحالة المسألة إذا ما كان $c > c_0$.

١ ـ نفرض أن $x > BD$ (الشكل رقم (٣ ـ ٦٣))



الشكل رقم (٣ ـ ٦٣)

١ ـ ١ ـ إذا كان $BD < BE < BA$، يكون $c < c_0$.

فلدينا، استناداً إلى (٦)

$$2BD \cdot CD = (AB + BD) \cdot AD$$

لكن

$$(AB + BE) \cdot AE < (AB + BD) \cdot AD,$$

وَ

$$(EB + BD) \cdot DC > 2BD \cdot DC,$$

فيكون

$$(EB + BD) \cdot DC > (AB + BE) \cdot AE,$$

وبالتالي

$$\frac{EB + BD}{AB + BE} > \frac{AE}{DC},$$

فيكون

$$\frac{(EB + BD) \cdot DE}{(AB + BE) \cdot AE} > \frac{DE}{DC},$$

ويكون

$$(EB + BD) \cdot DE \cdot DC > (AB + BE) \cdot AE \cdot DE;$$

وإذا طرحنا $(AB + BE) \cdot AE \cdot DC$ من كلا الطرفين:

$$(AB + BD) \cdot AD \cdot DC > (AB + BE) \cdot AE \cdot EC;$$

وإذا أضفنا

$$(AB + BE)AE \cdot BC + (BE + BD) \cdot ED \cdot BC,$$

إلى طرفي المعادلة، نحصل على:

$$(AB + BD) \cdot AD \cdot BD > (AB + BE)AE \cdot EB + (BE + BD) \cdot ED \cdot BC;$$

وإذا أضفنا إلى كلا الطرفين $DB^2 \cdot BC$، نحصل على

$$c_0 > (BA + BE)AE \cdot BE + BE^2 \cdot BC,$$

فيكون

$$c_0 > c.$$

١ ـ ٢ ـ إذا كان $BD < BE = AB$، يكون $c < c_0$ (الشكل رقم (٣ ـ ٦٤)).



الشكل رقم (٣ ـ ٦٤)

فلدينا

$$c = BC \cdot BE^2 = BC \cdot AB^2$$

فيكون بالتالي

$$c < c_0.$$

١ ـ ٣ ـ لنضع الآن $x = BI$ ولنبرهن أنه إذا كان $BD < AB < BI$، يكون $c < c_0$ (الشكل رقم (٣ ـ ٦٥)).



الشكل رقم (٣ ـ ٦٥)

بما أن لدينا

$$BI^3 - AB^2 \cdot BI = (BI + BA)AI \cdot BI,$$

يحصل

$$c = BC \cdot BI^2 - (BI + BA)AI \cdot BI;$$

لكن

$$c < BC \cdot BI^2 - (IB + BA) \cdot AI \cdot BC = BA^2 \cdot BC,$$

وبالتالي يكون

$$BA^2 \cdot BC < c_0 ,$$

ومنه النتيجة المطلوبة.

٢ ـ نفرض أن $x < BD$.

٢ ـ ١ ـ لنضع $x = BG$ ولنبرهن أنه إذا كان $BC < BG < BD$، يكون $c < c_0$ (الشكل رقم (٣ ـ ٦٦)).



الشكل رقم (٣ ـ ٦٦)

لدينا

$$AB^2 . BG - BG^3 = (AB + BG)AG . BG$$

وبالتالي

$$c = BC . BG^2 + (AB + BG) . AG . BG;$$

لكن استناداً إلى (٦) لدينا

$$2BD . CD = (AB + BD)AD,$$

فيكون

$$(AB + BD) . AD > (DB + BG)CG,$$

ومنها

$$\frac{AB + BD}{DB + BG} > \frac{CG}{AD}$$

فيكون

$$\frac{(AB + BD) . AD}{(DB + BG) . DG} > \frac{CG}{DG}$$

وبالتالي

$$(AB + BD) . AD . DG > (DB + BG)DG . CG;$$

وإذا أضفنا $(AB + BD)AD . CG$ إلى كلا الطرفين، نحصل على

$$(AB + BD)AD . DC > (AB + BG)AG . CG;$$

وإذا أضفنا

$$[(AB + BD) . DA + (BD + BG) . DG] . BC,$$

إلى كلا الطرفين، نحصل على

$$(BA + BD) . AD . BD + (BD + BG) . DG . BC > (BA + BG)AG . BG;$$

وبإضافة $BG^2 . BC$ إلى كلا الطرفين نحصل على:

$$c_0 > c$$

٢ ـ ٢ ـ إذا كان $BG = BC < BD$ يكون $c < c_0$ (الشكل رقم (٣ ـ ٦٧)).



الشكل رقم (٣ ـ ٦٧)

فلدينا

$$c = AB^2 \, . \, BG = AB^2 \, . \, BC$$

وأيضاً

$$(AB + BD) \, . \, AD \, . \, BD > (AB + BD) \, . \, AD \, . \, BC;$$

وإذا أضفنا $(DB + BC) \, . \, DC \, . \, BC$ إلى كلا الطرفين، نحصل على

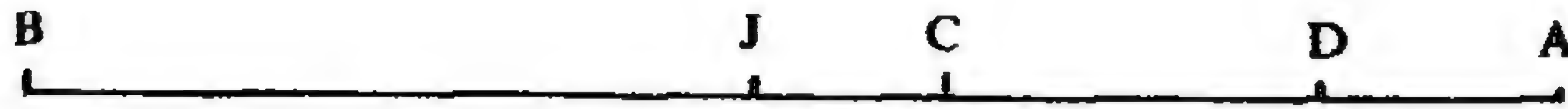
$$(AB + BD) \, . \, AD \, . \, BD + (DB + BC)DC \, . \, BC > (AB + BC) \, . \, AC \, . \, BC;$$

وإذا أضفنا BC^3 إلى كلا الطرفين، نحصل على:

$$c_0 > AB^2 \, . \, BC,$$

ومنها النتيجة المطلوبة.

٢ ـ ٣ ـ لنضع $x = BJ$ ولنبرهن أنه إذا كان $BJ < BC < BD$ يكون $c < c_0$ (الشكل رقم (٣ ـ ٦٨)).



الشكل رقم (٣ ـ ٦٨)

فلدينا

$$BC \, . \, BJ^2 - BJ^3 = BJ^2 \, . \, JC,$$

لذلك

$$c = AB^2 \, . \, BJ + BJ^2 \, . \, JC,$$

لكن

$$AB^2 \, . \, BC > AB^2 \, . \, BJ + BJ^2 \, . \, JC,$$

فيكون

$$c_0 > AB^2 \, . \, BC,$$

وبالتالي

$$c_0 > c.$$

من ١ وَ ٢ نستنتج أن أي x يعطي $c < c_0$. لذلك نستطيع أن نقول ما يلي:

- إذا كان $c > c_0$ تكون المسألة مستحيلة؛
- إذا كان $c = c_0$ يكون $BD = x_0$ الحلّ الوحيد؛
- إذا كان $c < c_0$ يكون للمسألة حلّان x_1 و x_2 يحققان

$$x_1 < x_0 = BD < x_2 .$$

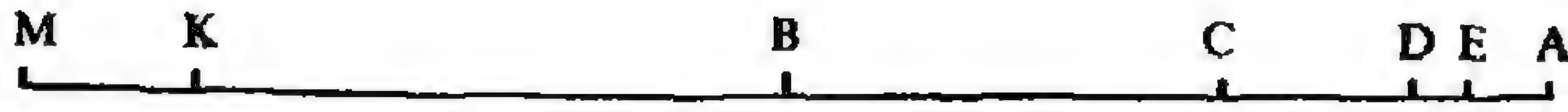
تحديد الجذر الأكبر x_2

ليكن $BK = BD$ ولنضع $KM = DC$ ولنأخذ المعادلة من النوع ١٥ التالية:

$$x^3 + DM \,.\, x^2 = c_0 - c \qquad (١٥)$$

وليكن $X = DE$ حلها (الشكل رقم (٣ ـ ٦٩))، فيكون

$$c_0 - c = DE^2 \,.\, EM$$



الشكل رقم (٣ ـ ٦٩)

١ ـ إذا كان $DE < AD$؛ في هذه الحالة يكون $x_2 = BE = BD + DE$.
فلدينا، استناداً إلى (٦)

$$2DB \,.\, CD = (AB + BD) \,.\, AD ,$$

ولدينا

$$(EB + BD) \,.\, DE = DE^2 + 2BD \,.\, ED.$$

فيكون

$$I = (EB + BD) \,.\, DE \,.\, DC = DE^2 \,.\, DC + (AB + BD)AD \,.\, ED.$$

ونضع

$$II = (AB + BE)AE \,.\, ED ,$$

فنحصل على

$$I = DE^2 \,.\, DC + II + (EB + ED)ED^2,$$
$$I = II + ED^2 \,.\, EM .$$

وبإضافة $(AB+BE) . AE . DC$ إلى كلا الطرفين، نحصل على

$$(AB+BD)AD . DC = (AB+BE) . AE . EC + ED^2 . EM;$$

وإذا أضفنا $[(AB+BE)AE + (EB+BD)ED]BC$ إلى كلا الطرفين، نحصل على:

$$(AB+BD)AD . DB =$$
$$= (AB+BE)AE . EB + (EB+BD)ED . BC + ED^2 . EM;$$

وأخيراً، إذا أضفنا $BD^2 . BC$ إلى كلا الطرفين، نحصل على:

$$c_0 = (AB+BE) . AE . EB + EB^2 . BC + ED^2 . EM;$$

لكن، استناداً إلى (١٥)، لدينا

$$c_0 - c = EM . ED^2$$

وبالتالي

$$c = AB^2 . EB + BC . EB^2 - EB^3$$

فيكون BE الحل الأكبر للمعادلة ٢٥.

٢ ـ إذا كان $DE = AD$؛ في هذه الحالة يكون $x_2 = AB$.

فلدينا

$$c = AB^2 . BC,$$

لكن

$$AD^2 . AM = AD^2 . MK + AD^2(AD + DK),$$
$$= AD^2 . DC + AD^2(AB + BD),$$

وبالتالي

$$AD^2 . AM = (AB+BD) . AD . DC.$$

وإذا أضفنا $(AB+BD)AD . BC$ إلى كلا الطرفين، نحصل على

$$AD^2 . AM + (AB+BD)AD . BC = (AB+BD)AD . BD;$$

ومن ثم، إذا ما أضفنا إلى كلا الطرفين $BD^2 . BC$، نحصل على

$$AD^2 . AM + AB^2 . BC = c_0;$$

لكن

$$AD^2 . AM = c_0 - c,$$

ومنها

$$c = AB^2 \, . \, BC,$$

فيكون $x_2 = AB$ الجذر الأكبر للمعادلة ٢٥.

٣ ـ إذا كان $X = DI$ حل المعادلة (١٥)، يكون

$$c_0 - c = DI^2 \, . \, IM.$$

فإذا كان $DI > AD$، يكون $x_2 = BI = BD + DI$ (الشكل رقم (٣ ـ ٧٠)).



الشكل رقم (٣ ـ ٧٠)

فقد برهنا أن

$$c_0 = BC \, . \, BD^2 + AB^2 \, . \, BD - BD^3 = (AB + BD)AD \, . \, BD + BD^2 \, . \, BC.$$

ولنضع

$$I = BD^3 \; , \; II = BC \, . \, BD^2 + AB^2 \, . \, BD.$$

وإذا أضفنا $(IB + BD)ID \, . \, BC + AB^2 \, . \, ID$ إلى كلا الحدّين، نحصل على

$$I' = BD^3 + (IB + BD)ID \, . \, BC + AB^2 \, . \, ID,$$
$$II' = BI^2 \, . \, BC + AB^2 \, . \, BI,$$

والفرق بينهما لا يتغير وهو مساوٍ لِـ c_0.

وبإضافة $III = (IB + BD) \, . \, ID \, . \, CD + (IB + BA) \, . \, AI \, . \, ID$ إلى I'، نحصل على

$$III + I' = BI^3,$$

فيكون

$$c_0 - III = BI^2 \, . \, BC + AB^2 \, . \, BI - BI^3 \qquad (١٦)$$

لكن

$$(IB + BD)ID \, . \, CD = ID^2 \, . \, CD + 2BD \, . \, CD \, . \, ID$$
$$= ID^2 \, . \, CD + (AB + BD)AD \, . \, ID$$

فيكون

$$III = ID^2 . CD + (IB + BD) . ID^2$$
$$= ID^2 . KM + (ID + 2BD) . ID^2$$
$$= ID^2 . KM + (ID + DK)ID^2$$
$$= ID^2 . KM + IK . ID^2$$
$$= ID^2 . IM;$$

لكن

$$ID^2 . IM = c_0 - c,$$

فنحصل استناداً إلى (١٦) على

$$c = AB^2 . BI + BC . BI^2 - BI^3 ,$$

لذلك، فإن $BI = x_2$ هو الجذر الأكبر للمعادلة ٢٥ .

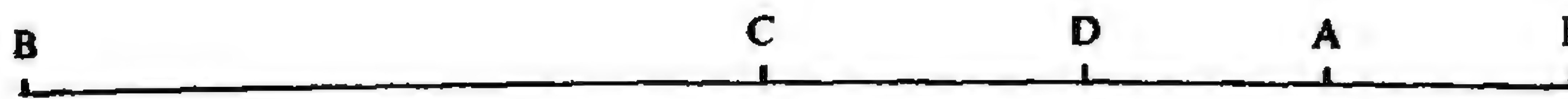
حصر الحل الأكبر

لنأخذ المعادلة (١١)

$$x^2 = BC . x + AB^2$$

وليكن BI حلها (النقطة I هنا تختلف عن النقطة I المذكورة سابقاً). ولنبرهن أنه مهما كان الجذر الأكبر للمعادلة ٢٥، يكون لدينا

$$BD < x_2 < BI$$ (الشكل رقم (٣ ـ ٧١))



الشكل رقم (٣ ـ ٧١)

فلدينا

$$BI^2 = BC . BI + AB^2,$$

ومنها

$$BI^3 = BC . BI^2 + AB^2 . BI$$

فلا يمكن لِـ BI أن يكون جذراً للمعادلة ٢٥؛ فلو كان كذلك لَحصَل

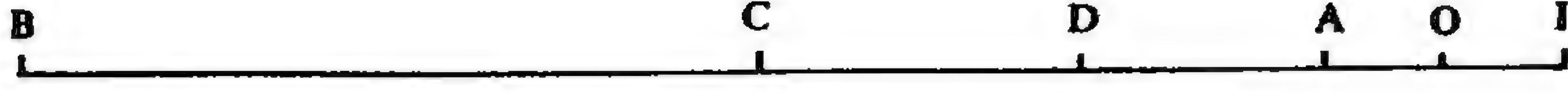
$$BI^3 + c = BC . BI^2 + AB^2 . BI = BI^3,$$

وهذا خُلف.

وكذلك، فإن أي حل للمعادلة ٢٥، هو أصغر من BI. نسجل هنا أن الطوسي

لا يبرر تأكيده هذا. (راجع التعليق).

ولنبرهن الآن أن أي x، $x = BO$، $BD < BO < BI$، يمكن اعتباره حلاً لمعادلة من النوع ٢٥، (الشكل رقم (٣ ـ ٧٢)).



الشكل رقم (٣ ـ ٧٢)

فليكن $BO = x$؛ لدينا:

$$BI^3 - BO^3 = BO^2 . OI + (IB + BO)IO . IB$$

فيكون، استناداً إلى (١١)

$$BI^3 - BO^3 = BC . BI^2 + AB^2 . BI - BO^3,$$

لكن

$$(BC . BI^2 + AB^2 . BI) - (BC . BO^2 + AB^2 . BO)$$
$$= AB^2 . IO + (IB + BO) . IO . BC,$$

وبما أن $BI > BC$، يكون لدينا

$$AB^2 . IO + (IB + BO)IO . BC < OB^2 . IO + (IB + BO)IO . IB$$

وبالتالي

$$BO^3 < BC . BO^2 + AB^2 . BO;$$

فإذا وضعنا

$$BC . BO^2 + AB^2 . BO - BO^3 = c$$

يكون BO حلاً لمعادلة من النوع ٢٥.

تحديد الجذر الأصغر

لنأخذ المعادلة من النوع ٢١

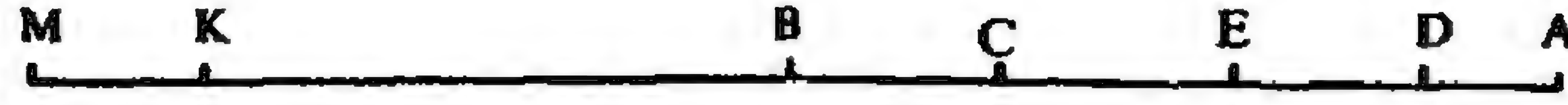
$$x^3 + c_0 - c = DM . x^2 \qquad (١٢)$$

وليكن DE حلاً لها؛ فيكون

$$DE^2 . EM = c_0 - c$$

١ ـ إذا كان $DE < DC$؛ في هذه الحالة يكون

$$x_1 = BE = BD - DE$$ (الشكل رقم (٣ ـ ٧٣))



الشكل رقم (٣ ـ ٧٣)

فلقد رأينا أن

$$I = (AB + BD)AD \,.\, DE = 2BD \,.\, CD \,.\, DE$$

ولدينا

$$II = 2BD \,.\, CD \,.\, DE = 2BD \,.\, DE \,.\, CD$$

$$= DE^2 \,.\, DC + (DB + BE)DE \,.\, DC.$$

لكن

$$(DB + BE) \,.\, DE^2 = EK \,.\, DE^2$$

وَ

$$DE^2 \,.\, DC = MK \,.\, DE^2$$

فيكون

$$(DB + BE) \,.\, DE^2 + DE^2 \,.\, DC = EM \,.\, DE^2.$$

وإذا أضفنا إلى I وَ II $(AB + BD)AD \,.\, EC$، نحصل على

$$I' = (AB + BD) \,.\, AD \,.\, DC,$$
$$II' = (AB + BE) \,.\, AE \,.\, EC + DE^2 \,.\, EM;$$

وإذا أضفنا إلى I' وَ II' $(AB + BD) \,.\, AD \,.\, BC$، نحصل على

$$I'' = (AB + BD) \,.\, AD \,.\, DB$$
$$II'' = (AB + BE) \,.\, AE \,.\, EC + DE^2 \,.\, EM + (AB + BD)AD \,.\, BC;$$

وإذا أضفنا إلى I'' وَ II'' $(DB + BE) \,.\, DE \,.\, BC$، نحصل على

$$I''' = (AB + BD) \,.\, AD \,.\, DB + (DB + BE) \,.\, DE \,.\, BC,$$
$$II''' = (AB + BE) \,.\, AE \,.\, BE + DE^2 \,.\, EM;$$

وأخيراً إذا أضفنا $BE^2 \,.\, BC$، إلى كلا التعبيرين، نحصل على

$$c_0 = (AB + BD) \,.\, AD \,.\, BD + BD^2 \,.\, BC$$
$$= (AB + BE) \,.\, AE \,.\, EB + BE^2 \,.\, BC + DE^2 \,.\, EM$$

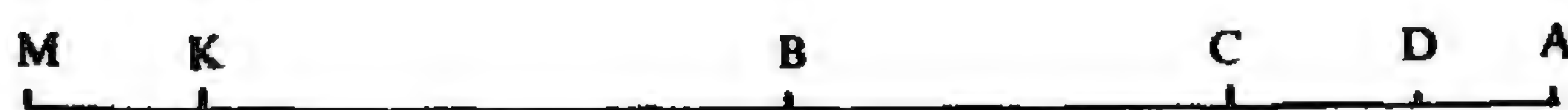
لكن

$$c_0 = c + DE^2 \cdot EM,$$

فيكون

$$AB^2 \cdot EB + BC \cdot EB^2 - AB^3 = c$$

٢ ـ إذا كان $DE = DC$؛ في هذه الحالة يكون $x_1 = BC$ (الشكل رقم (٣ ـ ٧٤)).



الشكل رقم (٣ ـ ٧٤)

فلقد رأينا أن

$$(AB + BD) \cdot AD \cdot CD = 2BD \cdot CD^2 = DK \cdot CD^2 = CM \cdot CD^2;$$

وإذا أضفنا $(AB + BD) \cdot AD \cdot BC$ إلى كلا الطرفين، نحصل على

$$(AB + BD) \cdot AD \cdot BD = (AB + BD) \cdot AD \cdot BC + CM \cdot CD^2;$$

وإذا أضفنا أيضاً $BD^2 \cdot BC$ إلى كلا الطرفين، نحصل على

$$c_0 = (AB + BD) \cdot AD \cdot BD + BD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot BC + DC^2 \cdot CM;$$

لكن

$$c_0 - c = DC^2 \cdot CM,$$

فيكون

$$c = AB^2 \cdot BC;$$

لكن، لدينا

$$BC^3 + AB^2 \cdot BC - BC \cdot BC^2 = AB^2 \cdot BC = c,$$

فيكون $BC = x_1$ الجذر الأصغر للمعادلة ٢٥.

٣ ـ إذا كان جذر المعادلة ١٢، DI يحقق

$$DC < DI < DB = x_0$$ (الشكل رقم (٣ ـ ٧٥))



الشكل رقم (٣ ـ ٧٥)

في هذه الحالة يكون $x_1 = BI = BD - DI$ جذراً للمعادلة ٢٥.

فلدينا

$$BC \, . \, BD^2 + AB^2 \, . \, BD - BD^3 = c_0.$$

وإذا وضعنا

$I = BC \, . \, BD^2 + AB^2 \, . \, BD$ وَ $II = BD^3$ يكون

$$c_0 = I - II.$$

فإذا طرحنا $DB^2 \, . \, DI + (DB + BI) \, . \, DI \, . \, BI$ من كلا الطرفين، نحصل على:

$$I' = BC \, . \, BD^2 + AB^2 \, . \, BD - (DB + BI) \, . \, DI \, . \, BI - DB^2 \, . \, DI$$

وَ

$$II' = BI^3$$

وَ

$$c_0 = I' - II' \, .$$

وإذا وضعنا

$$III = (DB + BI) \, . \, DI \, . \, CI + (AB + BD) \, . \, AD \, . \, DI.$$

يكون لدينا

$$c_0 = (I' - III) - II' + III$$

وبالتالي

$$c_0 = BI^2 \, . \, BC + AB^2 \, . \, BI - BI^3 + III.$$

لكن

$$(AB + BD) \, . \, AD \, . \, DI = 2BD \, . \, CD \, . \, DI = DI^2 \, . \, DC + (DB + IB)DI \, . \, DC$$

فيكون

$$\begin{aligned} III &= DI^2 \, . \, MK + (DB + BI)DI \, . \, (DC + DI) \\ &= DI^2 \, . \, MK + IK \, . \, DI^2 = DI^2 \, . \, IM = c_0 - c \end{aligned}$$

وبالتالي

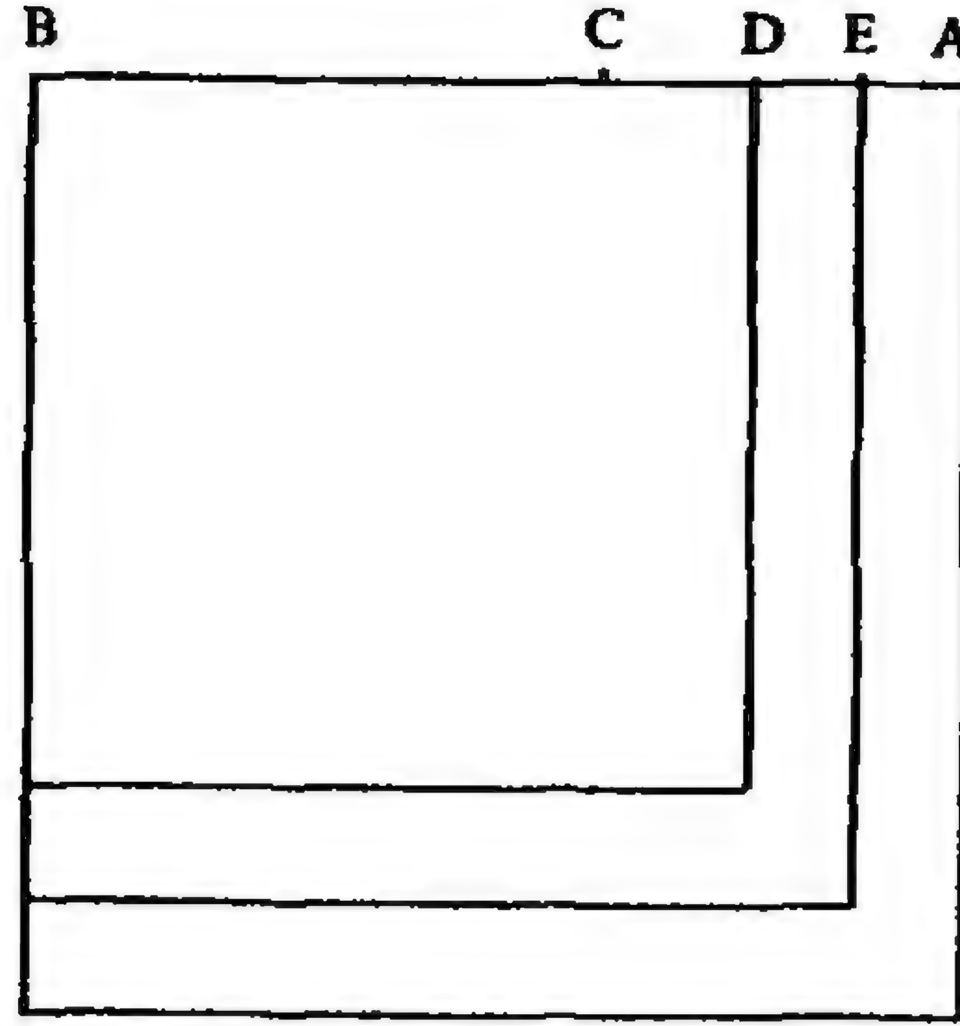
$$c = BI^2 \, . \, BC + AB^2 \, . \, BI - BI^3,$$

فيكون $BI = x_1$ الجذر الأصغر للمعادلة ٢٥.

العلاقة بين المعادلة ٢٥ والمعادلة ١٥

ليكن $BE = x_2$ الجذر الأكبر للمعادلة ٢٥.

١ ـ الحالة $DE < DA$ وَ $BD < BE < BA$، (الشكل رقم (٣ ـ ٧٦)).



الشكل رقم (٣ ـ ٧٦)

في هذه الحالة يكون

$$c_0 = (BA^2 - BD^2) \,.\, BD + BD^2 \,.\, BC$$

ومنها

$$c_0 = BD(BA^2 - BE^2) + BD\,(BE^2 - BD^2) + BD^2 \,.\, BC$$

وإذا كان BE جذراً للمعادلة ٢٥، يكون

$$c = BE(BA^2 - BE^2) + BE^2 \,.\, BC$$

فيكون

$$c = BD(BA^2 - BE^2) + DE(BA^2 - BE^2) + (BE^2 - BD^2) \,.\, BC + BD^2 \,.\, BC.$$

فإذا وضعنا

$$I = BD(BE^2 - BD^2)$$
$$II = ED(BA^2 - BE^2) + BC(BE^2 - BD^2)$$

يكون لدينا

$$c_0 - c = I - II;$$

وإذا طرحنا $BC(BE^2 - BD^2)$ من كلا الحدّين، يبقى

$$I' = CD(BE^2 - BD^2)$$

وَ

$$II' = ED(BA^2 - BE^2).$$

وإذا وضعنا $X = DE$، نحصل على:

$$I' = 2DB \,.\, DC \,.\, X + DC \,.\, X^2,$$
$$II' = (AB + BD + X)\,(AD - X) \,.\, X,$$
$$= (AB + BD)AD \,.\, X - 2BD \,.\, X^2 - X^3;$$

لكن

$$I' = II' + c_0 - c$$

فيكون

$$2DB \,.\, DC \,.\, X + DC \,.\, X^2 = (AB + BD) \,.\, AD \,.\, X - 2BD \,.\, X^2 - X^3 + c_0 - c$$

لكن

$$2DB \,.\, DC = (AB + BD)AD;$$

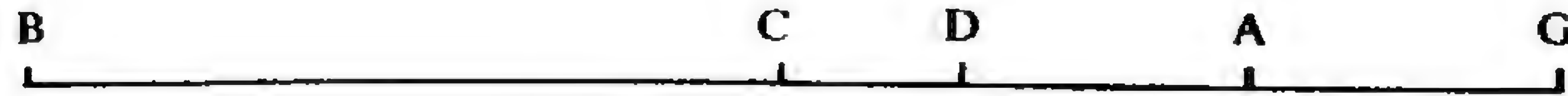
فيكون

$$X^2(2BD + DC) + X^3 = c_0 - c,$$

ويكون $X = DE$ جذراً لمعادلة من النوع ١٥ . فنحتسب DE ونستنتج x_2؛ $x_2 = BE = x_0 + X$.

٢ ـ الحالة $DE = DA$؛ في هذه الحالة يكون $x_2 = BE = BA$.

٣ ـ الحالة $DG > DA$ (الشكل رقم (٣ ـ ٧٧))، حيث نفرض أن $x_2 = BG$؛



الشكل رقم (٣ ـ ٧٧)

فيكون

$$c_0 = BD \,.\, AB^2 + BD^2 \,.\, BC - BD^3;$$

ومن جهة أخرى

$$BD \,.\, AB^2 + GD \,.\, AB^2 = (GD + DB)AB^2 = GB \,.\, AB^2$$
$$BD^2 \,.\, BC + (GB + BD)GD \,.\, BC = GB^2 \,.\, BC$$
$$BG^3 = BD^3 + BG^2 \,.\, GD + (GB^2 - BD^2)BD$$

فإذا وضعنا

$$I = (AB^2 \,.\, BG + BC \,.\, BG^2) - (AB^2 \,.\, BD + BD^2 \,.\, BC)$$
$$= AB^2 \,.\, GD + (GB^2 - BD^2)BC,$$
$$II = BG^3 - BD^3 = GB^2 \,.\, GD + (GB^2 - BD^2) \,.\, BD,$$

يكون لدينا

$$c_0 - c = II - I.$$

وإذا طرحنا $BC \cdot (GB^2 - BD^2)$، من كلا الحدين، نحصل على

$$I' = AB^2 \cdot GD,$$
$$II' = GB^2 \cdot GD + (GB^2 - BD^2) \cdot CD,$$

وبالتالي يكون

$$c_0 - c = (GB^2 - AB^2)GD + (GB^2 - BD^2) \cdot CD.$$

فإذا وضعنا $GD = X$، يكون

$$(GB^2 - AB^2) \cdot GD = (GB + BA)GA \cdot GD = (AB + BD + X)(X - AD)$$
$$= 2BD \cdot X^2 + X^3 - (AB + BD)AD \cdot X,$$

ويكون

$$(GB^2 - BD^2)CD = (GB + BD)GD \cdot CD = (2BD + X) \cdot X \cdot CD$$
$$= 2BD \cdot CD \cdot X + CD \cdot X^2.$$

لكن من المعلوم أن

$$2BD \cdot CD = (AB + BD)AD,$$

فيكون

$$c_0 - c = (2BD + CD)X^2 + X^3,$$

ويكون $X = GD$ جذراً لمعادلة من النوع ١٥، فنجد X ونستنتج $x_2 = BD + DG = BG$.

العلاقة بين المعادلة ٢٥ والمعادلة ٢١

ليكن $x_1 = BK$ الجذر الأصغر للمعادلة ٢٥، وليكن DK فائض BK على $BD = x_0$.

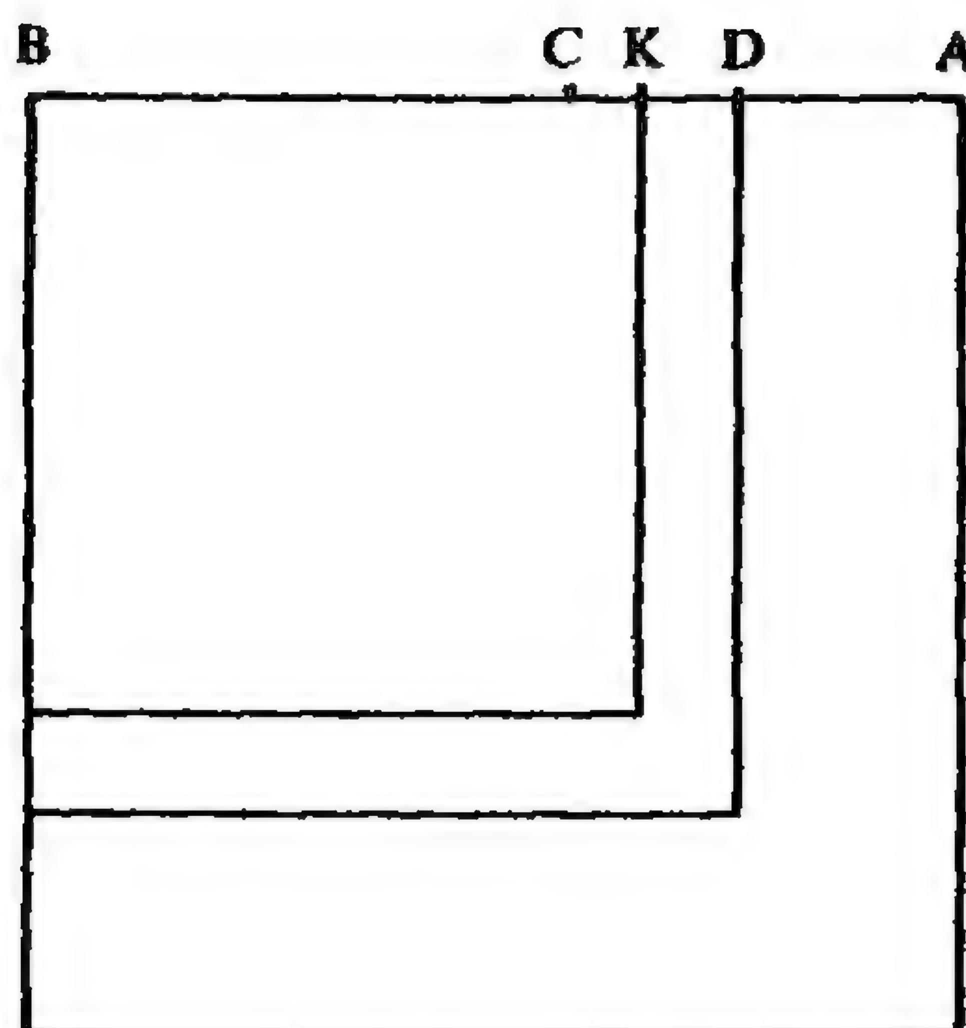
١ ـ الحالة $DK < DC$ وَ $BD > BK > BC$. (الشكل رقم (٣ ـ ٧٨)).

في هذه الحالة لدينا

$$AB^2 \cdot BK - KB^3 = KB(AB^2 - BK^2) = KB[(AB^2 - BD^2) + (BD^2 - BK^2)]$$

فيكون

$$c = BC \cdot BK^2 + KB[(AB^2 - BD^2) + (BD^2 - BK^2)],$$



الشكل رقم (٣ ـ ٧٨)

لكن

$$c_0 = BC\ .\ BD^2 + DB(AB^2 - BD^2),$$

وبالتالي

$$c_0 = BC\ .\ BK^2 + BC(BD^2 - BK^2) + BK(AB^2 - BD^2) + KD(AB^2 - BD^2);$$

وإذا طرحنا من c ومن c_0 الحدود المشتركة بينهما، نحصل على

$$c' = KB(BD^2 - BK^2),$$
$$c'_0 = BC(BD^2 - BK^2) + KD(AB^2 - BD^2),$$

وإذا طرحنا، من كل من c' و c'_0 ، $BC(BD^2 - BK^2)$، يبقى

$$c'' = CK(BD^2 - BK^2),$$
$$c''_0 = KD(AB^2 - BD^2).$$

لكن

$$c''_0 = c_0 - c + c''$$

فيكون

$$KD(AB^2 - BD^2) = c_0 - c + KC(BD^2 - BK^2).$$

وإذا وضعنا $KD = X$، نحصل على

$$X(AB + BD)\ .\ AD = c_0 - c + (CD - X)(2BD - X)X,$$

وبالتالي، على

$$X(AB+BD) . AD = c_0 - c + 2BD . CD . X + X^3 - (2BD+CD)X^2;$$

لكننا نعلم أن

$$(AB+BD)AD = 2BD . CD,$$

فيكون

$$X^3 + c_0 - c = X^2(2BD+CD),$$

ويكون $X = DK$ جذراً لمعادلة من النوع ٢١. فما علينا إلا أن نجد $X = DK$ ونستنتج $x_1 = BD - DK = BK$.

٢ ـ الحالة $DK = DC$؛ في هذه الحالة يكون $x_1 = BC = BD - DC$.

٣ ـ الحالة $x_1 = DE > DC$؛ (الشكل رقم (٣ ـ ٧٩))؛



الشكل رقم (٣ ـ ٧٩)

نضع

$$x_1 = BE = BD - DE,$$

فيكون لدينا

$$AB^2 . BD - DE . AB^2 = AB^2 . BE,$$

$$CB . BD^2 - DE(DB+BE) . BC = CB . BE^2,$$

وبالتالي

$$AB^2 . BD + CB . BD^2$$

$$= AB^2 . BE + CB . BE^2 + DE . AB^2 + DE(DB+BE) . BC;$$

ومن جهة أخرى، لدينا

$$BD^3 = BE^3 + BD^2 . DE + (BD+BE) . DE . BE,$$

فنستنتج

$$c_0 - c =$$

$$= DE . AB^2 + (DB+BE)DE . BC - [BD^2 . DE + (BD+BE)DE . BE];$$

ونطرح $(DB+BE) \,.\, DE \,.\, BE$ من حدّي الفرق فنجد:

$$c_0 - c = DE \,.\, AB^2 + (DB+BE)DE \,.\, EC - DB^2 \,.\, DE;$$

وبطرح $DB^2 \,.\, DE$ من كل من حدي هذا الفرق، نحصل على

$$c_0 - c = DE \,.\, (AB+BD) \,.\, DA + (DB+BE)DE \,.\, EC.$$

فإذا وضعنا $DE = X$، نحصل على

$$c_0 - c = (AB+BD)DA \,.\, X + (2DB - X)\ (X - DC) \,.\, X,$$

وبالتالي

$$c_0 - c = (AB+BD)DA \,.\, X + (2DB+DC)X^2 - X^3 - 2DB \,.\, CB \,.\, X;$$

لكننا نعلم أن

$$(AB+BD) \,.\, DA = 2DB \,.\, CB,$$

فيكون

$$c_0 - c + X^3 = (2DB+CD)X^2;$$

ويكون X حلاً لمعادلة من النوع ٢١. نحتسب إذن $X = DE$، ثم نستخلص $x_1 = BE = BD - DE$.

خلاصة:

نأخذ المعادلة

$$\frac{2}{3}ax + \frac{1}{3}b = x^2,$$

ونحتسب حلّها x_0، ثم نحتسب

$$c_0 = ax_0^2 - x_0^3 + bx_0.$$

- فإذا كان $c > c_0$ تكون المسألة مستحيلة؛

- وإذا كان $c = c_0$ تكون المسألة ممكنة ويكون x_0 حلّها الوحيد؛

- وإذا كان $c < c_0$ يكون للمسألة حلّان x_1 و x_2 بحيث

$$x_1 < x_0 < x_2.$$

فنأخذ التفاوت $c_0 - c$ والمعادلة

$$x^3 + (3x_0 - a)x^2 = c_0 - c;$$

ونأخذ حلها X، فيكون

$$x_2 = x_0 + X;$$

ثم نأخذ المعادلة

$$x^3 + c_0 - c = (3x_0 - a)x^2$$

ونأخذ حلها الأصغر X، فيكون

$$x_1 = x_0 - X.$$

تعليق

تكتب المعادلة ٢٥ على الشكل

$$x^3 + c = ax^2 + bx.$$

ويحلها الطوسي في كل من الحالات الرئيسة الثلاث التالية:

الحالة الرئيسة الأولى: $a = b^{\frac{1}{2}}$.

تكتب المعادلة في هذه الحالة كما يلي:

$$x^3 + c = ax^2 + a^2x$$

١ ـ يميز الطوسي بين حالات ثلاث أ، ب و ج

أ ـ $c > a^3$. في هذه الحالة تكون المسألة مستجيلة:

ـ فإذا كان $x \geq b^{\frac{1}{2}}$ يكون لدينا

$$c = bx - x^2(x - b^{\frac{1}{2}}) \leq bx - b(x - b^{\frac{1}{2}}) = b^{\frac{3}{2}} = a^3;$$

وهذا خُلف.

ـ وإذا كان $x < b^{\frac{1}{2}}$ يكون

$$c = bx + x^2(b^{\frac{1}{2}} - x) < bx + b(b^{\frac{1}{2}} - x) = b^{\frac{3}{2}} = a^3,$$

وهذا خُلف.

ب ـ $c = a^3$. في هذه الحالة تصبح المعادلة

$$x^3 + a^3 = ax^2 + a^2x,$$

فيكون $x = a$ حلاً لها.

نسجل أن $x = a$ هو، في هذه الحالة جذرٌ مزدوج وأن $-a$ هو الجذر الثالث.

ج - $c < a^3$. وفي هذه الحالة يكون للمعادلة جذران x_1 و x_2 يحققان العلاقة التالية:

$$x_1 < a < x_2.$$

نلاحظ أن الطوسي، عند دراسته لهذه الحالة، يتبع الطريق نفسه الذي سلكه لدى معالجته للمعادلة السابقة (المعادلة ٢٤ (المترجم))، لكن من دون أن يصرّح بذلك. فإذا وضعنا

$$f(x) = ax^2 + a^2x - x^3,$$

يكون لدينا

$$f'(x) = 2ax + a^2 - 3x^2,$$

ويكون

$$f'(a) = 0$$

وبالتالي يكون

$f(a) = \underset{x>0}{Sup}\, f(x) = a^3$ (= النهاية العظمى لِـ $f(x)$، $x > 0$).

٢ - تحديد x_2

ليكن X حل المعادلة من النوع ١٥:

$$x^3 + 2ax^2 = a^3 - c$$

فيكون $x_2 = a + X$ جذراً للمعادلة ٢٥.

فلدينا

$$X^2(X + 2a) + c = a^3 \qquad (١)$$

وإذا أضفنا a^2X إلى كلا الطرفين نحصل على

$$(X + a)^2 \,.\, X + c = a^2(a + X),$$

فإذا أضفنا $a \,.\, (X + a)^2$ إلى كلا الطرفين، نحصل على

$$(X + a)^3 + c = a(a + X)^2 + b(a + X);$$

ويكون $a + X$ جذراً للمعادلة ٢٥.

حصر x_2

مهما كان العدد c، $c \in]0, a^3[$، يكون لدينا

$$a < x_2 < 2a$$

فلدينا استناداً إلى (١)

$$X^2(X + 2a) < a^3$$

فإذا كان $X \geq a$، يكون $X^2 . (X + 2a) \geq 3a^3$ وهذا خُلف؛ لذلك يكون

$$0 < X < a,$$

ومنها

$$a < x_2 < 2a.$$

لكن الطوسي لا يعالج هنا القضية العكسية (راجع الملاحظة في نهاية هذه الحالة).

٣ ـ تحديد x_1

ليكن X الجذر الموجب(٩) للمعادلة من النوع ٢١:

$$x^3 + a^3 - c = 2ax^2,$$

فيكون $x_1 = a - X$ حلاً للمعادلة ٢٥.

فلدينا

$$a^3 = a^2(a - X) + (a - X)^2 . X + (2a - X) . X^2,$$

واستناداً إلى المعادلة ٢١

$$a^3 = X^2(2a - X) + c,$$

وبالتالي

$$a^2(a - X) + (a - X)^2 . X + (a - X)^3 = c + (a - X)^3,$$

فيكون

$$a^2(a - X) + a(a - X)^2 = c + (a - X)^3;$$

---

(٩) المقصود هنا بالطبع، هو الجذر الأصغر، لأن الجذر الموجب الآخر أكبر من $\frac{4a}{3}$.

ويكون $x_1 = a - X$ حلاً للمعادلة ٢٥.

حصر x_1

مهما كان x_1، حيث $x_1 \in]0, a[$، يوجد عدد c بحيث يكون x_1 جذراً للمعادلة ٢٥ (الخاصة بـ c (المترجم)). فبما أن

$$f(x_1) < f(a) = a^3,$$

يكون $c = f(x_1)$ عدداً مناسباً.

٤ ـ العلاقة بين المعادلة ٢٥ والمعادلة ١٥

إذا كان x_2 الجذر الأكبر للمعادلة ٢٥ يكون

$$a^3 - c = (x_2 - a)\ (x_2^2 - a^2);$$

فإذا وضعنا $X = x_2 - a$ يكون

$$a^3 - c = X^2(2a + X);$$

فيكون X جذراً لمعادلة من النوع ١٥، ويكون

$$x_2 = X + a.$$

٥ ـ العلاقة بين المعادلة ٢٥ والمعادلة ٢١

إذا كان x_1 الجذر الأصغر للمعادلة ٢٥، يكون

$$a^3 - c = (a + x_1)\ (a - x_1)^2,$$

فإذا وضعنا $X = a - x_1$، يحصل

$$a^3 - c = (2a - X)X^2;$$

فيكون X جذراً لمعادلة من النوع ٢١.

إيجازاً للحالة الأولى هذه يمكن القول إن النهاية العظمى لِ

$$f(x) = ax^2 - x^3 + a^2x$$

هي

$$\underset{x \in]0,\ 2a[}{Sup}\ f(x) = f(a) = a^3.$$

فنكون أمام احتمالات ثلاثة:

- $c > f(a)$، فتكون المسألة مستحيلة؛

- $c = f(a)$، فيكون a جذراً مزدوجاً؛

- $c < f(a)$، فيكون للمعادلة حلّان x_1 و x_2 يحققان

$$0 < x_1 < x_2 < 2a.$$

وهنا نضع $k = f(a) - c$ ونبني معادلة من النوع ١٥ ومعادلة من النوع ٢١، تعطياننا بالتتالي x_1 و x_2.

ملاحظة: عندما يدرس الطوسي حصر الجذور (راجع المعادلة ٢٤)، يضع

$$f(x) = x \, . \, g(x),$$

ويأخذ المعادلة

$$g(x) = 0;$$

التي يكون لها، بحسب الظروف، جذر أو جذران (موجبان)، يستخدمهما لحصر x_1 وx_2. وفي حالتنا هذه لدينا

$$g(x) = ax + a^2 - x^2$$

التي لها جذر موجب واحد هو $\lambda = \dfrac{a(1+\sqrt{5})}{2}$. ويبرهن الطوسي عادة أن

$$a < x_2 < \lambda;$$

لكنه لا يقدم في هذه الحالة أي برهان ويعطي حصراً أقل دقة:

$$a < x_2 < 2a.$$

ونستطيع هنا أن نبرهن العكس، أي أن أي عدد β، $\beta \in]a, \lambda[$، يقابله عدد موجب c بحيث يكون β الجذر الأكبر للمعادلة ٢٥ الخاصة بـ c. فإذا كان $\beta \in]a, \lambda[$، يكون $g(\beta) > 0$ فيكون

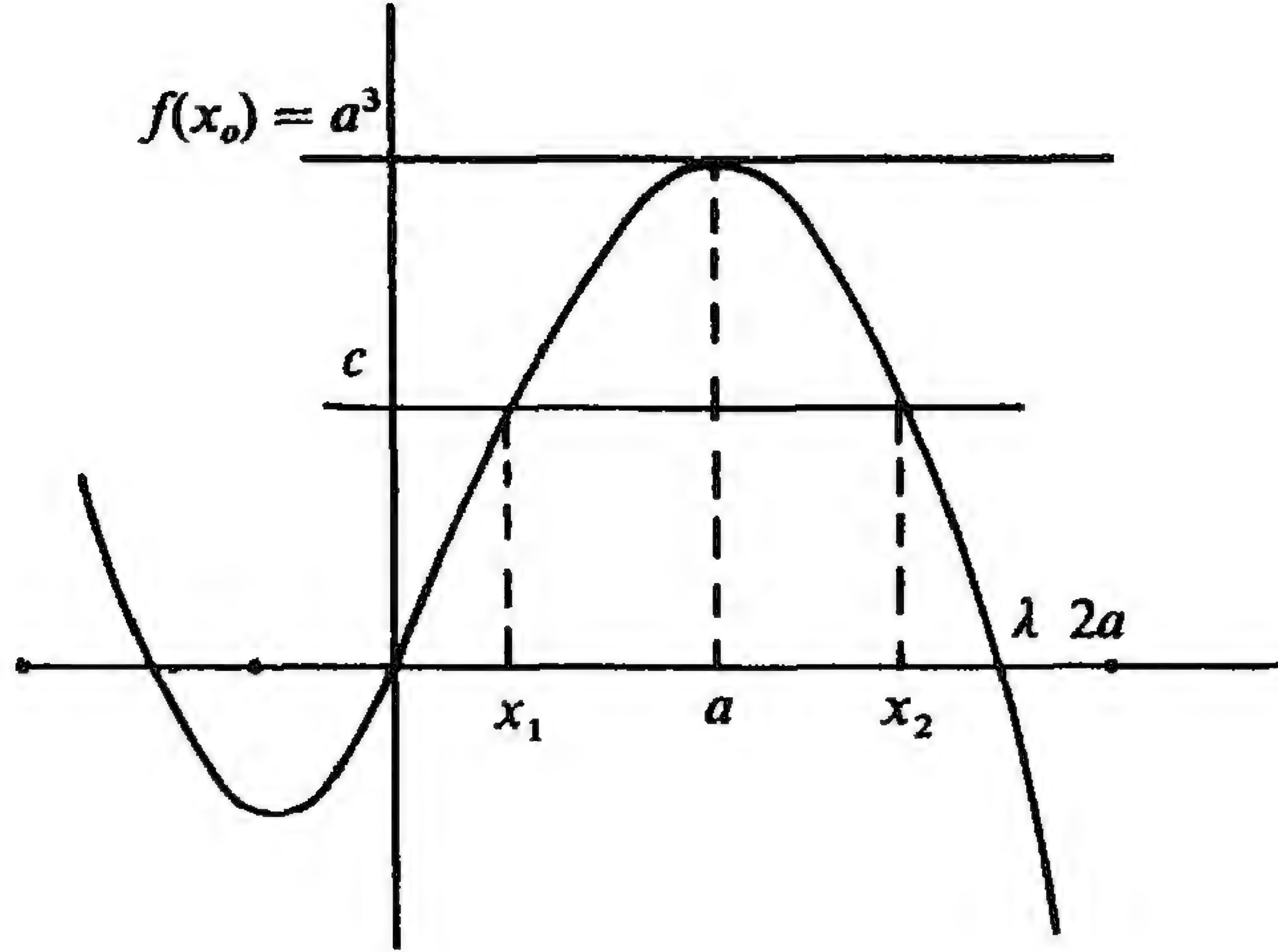
$$f(\beta) = \beta \, . \, g(\beta) > 0$$

فنأخذ $c = f(\beta)$.

وإذا لاحظنا أن $c = 0$ يقابله $x_1 = 0$ وَ $x_2 = \lambda$، وأن $c = a^3$ يقابله $x_1 = x_2 = a$، يكون قد تحدد، بديهياً التطبيقان التقابليان

$$x_1 : \; [0, \; a^3] \longrightarrow [0, \; a]$$

$$x_2 : \; [0, \; a^3] \longrightarrow [a, \; \lambda].$$



الحالة الرئيسة الثانية: $a > b^{\frac{1}{2}}$.

تُكتب المعادلة ٢٥ على الشكل التالي:

$$f(x) = x^2(a - x) + bx = c.$$

١ ـ دراسة النهاية العظمى

ليكن x_0 الجذر الموجب للمعادلة

$$f'(x) = 2ax + b - 3x^2 = 0 \qquad (١)$$

لنبرهن أن

$$b^{\frac{1}{2}} < x_0 < a.$$

فلدينا أن $x_0 \neq b^{\frac{1}{2}}$ لأنه لو كان $x_0 = b^{\frac{1}{2}}$ لحصل استناداً إلى (١)

$$2ab^{\frac{1}{2}} = 2b,$$

وهذا خُلف. ومن جهة أخرى، إذا كان $x_0 < b^{\frac{1}{2}}$، نحصل استناداً إلى (١) على

$$\frac{b^{\frac{1}{2}}}{3} < x_0 - \frac{2a}{3}$$

وإذا أضفنا $\frac{2}{3}b^{\frac{1}{2}}$ إلى كلا الطرفين نحصل على

$$b^{\frac{1}{2}} < x_0 - \frac{2a}{3} + \frac{2}{3}b^{\frac{1}{2}} < x_0\ ,$$

وهذا خُلف. هكذا يتبيّن أن $x_0 > b^{\frac{1}{2}}$. ومن جهة أخرى لدينا

$$\left(x_0 - \frac{2a}{3}\right) b^{\frac{1}{2}} < \left(x_0 - \frac{2a}{3}\right) x_0 = \frac{b}{3} \ ,$$

فيكون

$$\left(x_0 - \frac{2a}{3}\right) < \frac{b^{\frac{1}{2}}}{3} < \frac{a}{3} \ ,$$

ويكون بالتالي $x_0 < a$. هكذا نكون قد بيّنا أن $b^{\frac{1}{2}} < x_0 < a$.

لنأخذ الآن

$$f(x_0) = x_0^2(a - x_0) + bx_0 \ ;$$

ولنبرهن أن كل عدد x، $x \neq x_0$، يحقق $f(x) < f(x_0)$.

١ ـ $x > x_0 \Longrightarrow f(x) < f(x_0)$.

هنا يميز الطوسي حالات ثلاثاً أ، ب وَ ج.

أ ـ عندما يكون $x_0 < x < a$؛ في هذه الحالة لدينا

$$f(x_0) = x_0^2(a - x) + x_0^2(x - x_0) + bx_0$$
$$f(x) = x_0^2(a - x) + (x^2 - x_0^2)(a - x) + bx_0 + b(x - x_0).$$

لكن $2x_0 > a - x$ لأن $x_0 > \frac{2a}{3}$، استناداً إلى (١)، فيكون

$$2x_0(x - x_0) > (a - x)\ (x - x_0),$$

ويكون

$$2x_0(a - x_0) > (x + x_0)\ (a - x)$$

وَ

$$x_0^2 - b = 2x_0(a - x_0) > (x + x_0)\ (a - x),$$

ومنها

$$f(x_0) > f(x).$$

ب ـ عندما يكون $x_0 < x = a$ يكون لدينا

$$f(a) = ab$$
$$f(x_0) = ab - b(a - x_0) + x_0^2(a - x_0);$$

ولكن $x_0 > b^{\frac{1}{2}}$، فيكون

$$f(x_0) > f(x).$$

ج ـ عندما يكون $x_0 < a < x$ يكون لدينا

$$f(x) = bx - x^2(x-a) < bx - b(x-a),$$

وبالتالي

$$f(x) < ab$$

واستناداً إلى الحالة السابقة، يكون لدينا $f(x) < f(x_0)$.

١ ـ ٢ ـ $x < x_0 \Longrightarrow f(x) < f(x_0)$.

وهنا أيضاً يميز الطوسي حالات ثلاثاً:

أ ـ عندما يكون $b^{\frac{1}{2}} < x < x_0$، يكون لدينا

$$f(x) = (x^2-b)(x_0-x) + x^2(a-x_0)+$$

$$+b(x_0-x) < x_0^2(a-x_0) + b(x_0-x) < f(x_0).$$

فلدينا

$$(x_0+x)(a-x_0) = 2x_0(a-x_0) - (x_0-x)(a-x_0),$$
$$x^2 - b = (x_0^2-b) - (x_0^2-x^2),$$

لكن

$$2x_0(a-x_0) = x_0^2 - b,$$

$$(x_0-x)(a-x_0) < x_0^2 - x^2,$$

وذلك لأن x_0 جذر للمعادلة (١)، $x_0 > \frac{2a}{3}$، وبالتالي $x_0 > \frac{a}{2}$،

وبالتالي

$x_0 > a - x_0$ وَ $x_0 + x > a - x_0$.

فلدينا إذاً

$$(x_0+x)(a-x_0) > x^2 - b,$$

وبالتالي

$$(x^2-b)(x_0-x) < (x_0^2-x^2)(a-x_0),$$

ومنها النتيجة المطلوبة.

ب ـ عندما يكون $b^{\frac{1}{2}} = x < x_0$، يكون لدينا

$$f(x_0) = ab + (x_0^2-b)(a-x_0)$$
$$f(x) = ab,$$

فيكون $f(x) < f(x_0)$.

ج ـ عندما يكون $x < b^{\frac{1}{2}} < x_0$ يكون لدينا، استناداً إلى الحالة السابقة $f(x_0) > ab$ وَيكون

$$f(x) = x^2(a - x) + bx < b(a - x) + bx < ab$$

ومنها النتيجة المطلوبة.

إيجازاً لهذه النقطة يمكن القول إنه:

ـ إذا كان $c > f(x_0)$ فالمسألة مستحيلة؛

ـ إذا كان $c = f(x_0)$ يكون x_0 حلاً مزدوجاً؛

ـ إذا كان $c < f(x_0)$ فللمسألة حلّان x_1 و x_2 بحيث

$$x_1 < x_0 < x_2.$$

٢ ـ تحديد الجذر x_2

٢ ـ ١ ـ إذا كان $c > ab$ يكون $x_0 < x_2 < a$.

فلنأخذ الجذر X للمعادلة من النوع ١٥

$$x^3 + (3x_0 - a)x^2 = f(x_0) - c,$$

إن X يحقق العلاقة $X < a - x_0$. فبما أن $ab < c$، يكون

$$f(x_0) - c < f(x_0) - ab$$

وبالتالي

$$X^3 + (3x_0 - a)X^2 < x_0^2(a - x_0) - b(a - x_0).$$

لكن

$$(a - x_0)\ (x_0^2 - b) = (a - x_0)^3 + (3x_0 - a)\ (a - x_0)^2$$

لأن

$$2x_0(a - x_0) = x_0^2 - b.$$

فيكون

$$X^3 + (3x_0 - a)X^2 < (a - x_0)^3 + (3x_0 - a)\ (a - x_0)^2$$

ومنها

$$X < a - x_0.$$

وإذا وضعنا $x_2 = x_0 + X$، يكون

$$X \,.\, x_0^2 + bx_0 = (x_0^2 - b)X + b(x_0 + X) = 2Xx_0(a - x_0) + b(x_0 + X)$$

ونحصل على

$$\begin{aligned} x_0^2(a - x_0) + bx_0 &= 2Xx_0(a - x_0) + b(x_0 + X) + x_0^2(a - x_0 - X) \\ &= x_2^2(a - x_2) + bx_2 + X^2(X + 3x_0 - a), \end{aligned}$$

فيكون

$$\begin{aligned} f(x_0) - f(x_2) &= X^3 + (3x_0 - a)X^2 \\ &= f(x_0) - c, \end{aligned}$$

وبالتالي

$$f(x_2) = c,$$

ويكون x_2 جذراً للمعادلة ٢٥، ويكون $x_0 < x_2 < a$.

٢ ـ ٢ ـ إذا كان $c = ab$ يكون $x_2 = a$ وهذا ما يمكن التحقق منه على الفور. نتحقق في هذه الحالة أيضاً من أن $x_1 = b^{\frac{1}{2}}$.

٢ ـ ٣ ـ إذا كان $c < ab$ يكون $x_2 > a$.

في هذه الحالة، نبرهن أن الجذر X للمعادلة ١٥ يحقق العلاقة $X > a - x_0$. فلدينا

$$f(x_0) - c > f(x_0) - ab,$$

لكن

$$f(x_0) - ab = (a - x_0)^3 + 3(x_0 - a)(a - x_0)^2$$

كما أن

$$f(x_0) - c = X^3 + (3x_0 - a)X^2$$

ومنها النتيجة $X > a - x_0$.

وإذا وضعنا $x_2 = x_0 + X$ يكون x_2 حلاً للمعادلة ٢٥.

فلدينا

$$bx_0 + ax_0^2 - x_0^3 = f(x_0),$$

ومنها

$$b(x_0 + X) + a(x_0 + X)^2 = f(x_0) + x_0^3 + bX + (2x_0 + X)aX,$$

فيحصل

$$b(x_0+X)+a(x_0+X)^2-(x_0+X)^3+X^2(3x_0+X-a)=f(x_0);$$

لكن

$$f(x_0)-c=X^3+(3x_0-a)X^2,$$

وبالتالي

$$f(x_0+X)=c,$$

وهذا ما سعينا إلى بيانه.

٣ - حصر الجذرين x_2 و x_1

ليكن λ الجذر الموجب للمعادلة

$$x^2=ax+b.$$

عند ذلك، مهما كان c، $c\in]0,\ f(x_0)[$، يكون $x_2<\lambda$.

فلدينا

$$\lambda^3=a\lambda^2+b\lambda,$$

لذلك فليس λ حلاً لمعادلة من النوع ٢٥ يكون فيها $c\neq 0$، ويكون بالتالي $x_2\neq\lambda$. ولنبرهن الآن أن $x_2<\lambda$.

فإذا كان $x_2>\lambda$ يكون:

$$x_2^3-\lambda^3=(x_2-\lambda)x^2+\lambda(x_2-\lambda)(x_2+\lambda),$$

$$(ax_2^2+bx_2)-(a\lambda^2+b\lambda)=b(x_2-\lambda)+a(x_2-\lambda)\ (x_2+\lambda);$$

لكن لدينا

$$\lambda^3=a\lambda+b\lambda,$$
$$\lambda>a,$$
$$x_2^2>b,$$

فنستنتج

$$x_2^3>ax_2^2+bx_2\ ;$$

فلا يمكن بالتالي إيجاد عدد موجب c بحيث يكون

$$x_2^3+c=ax_2^2+bx_2.$$

وفي الواقع لا يبرهن الطوسي ما سبق بالطريقة نفسها. لكنه يبرهن، بها نفسها، العكس، أي أن أي عدد x، أصغر من λ، هو جذر لمعادلة من النوع ٢٥. فإذا كان

$$x_0 < x < \lambda.$$

يمكن أن نكتب

$$\lambda^3 - x^3 = (\lambda - x)x^2 + (\lambda - x)\ .\ \lambda\ .\ (\lambda + x)$$

و

$$(a\lambda^2 + b\lambda) - (ax^2 + bx) = b(\lambda - x) + a(\lambda - x)(\lambda + x);$$

ويكون بالتالي

$$x^3 < ax^2 + bx.$$

ونلاحظ أن الشرط $x_0 < x$ لا دخل له في الاستدلال السابق. فالنتيجة السابقة تنطبق على أي x أصغر من λ. لذلك، فلأي عدد x أصغر من λ يوجد عدد c موجب بحيث يكون x جذراً للمعادلة ٢٥ الخاصة بـ c:

- فإذا كان $x_0 < x < \lambda$ يكون x الجذر الأكبر؛
- وإذا كان $0 < x < x_0$ يكون x الجذر الأصغر.

وهكذا يكون الطوسي قد برهن أن لكل عدد x، $x \in]0, \lambda[$، يوجد عدد c بحيث يكون x جذراً للمعادلة ٢٥ الخاصة بـ c.

فيكون إذن قد تبين أن كل عدد c، $c \in]0, f(x_0)[$، يقابله جذران من المعادلة ٢٥ هما $x_1(c)$ وَ $x_2(c)$ حيث $x_2(c) \in]x_0, \lambda[$ وَ $x_1(c) \in]0, x_0[$.

والعكس صحيح، فلكل عدد α، $\alpha \in]0, x_0[$، يوجد عدد $c(\alpha)$، $c(\alpha) \in]0, f(x_0)[$، بحيث يكون α الجذر الأكبر للمعادلة ٢٥ الخاصة بـ $c(\alpha)$. ولكل عدد β، $\beta \in]x_0, \lambda[$، يوجد $c(\beta)$، $c(\beta) \in]0, f(x_0)[$، بحيث يكون β الجذر الأكبر للمعادلة ٢٥ الخاصة بـ $c(\beta)$.

فإذا لاحظنا أن $c = 0$ يقابله الجذران

$$x_2(0) = \lambda \qquad \text{وَ} \qquad x_1(0) = 0$$

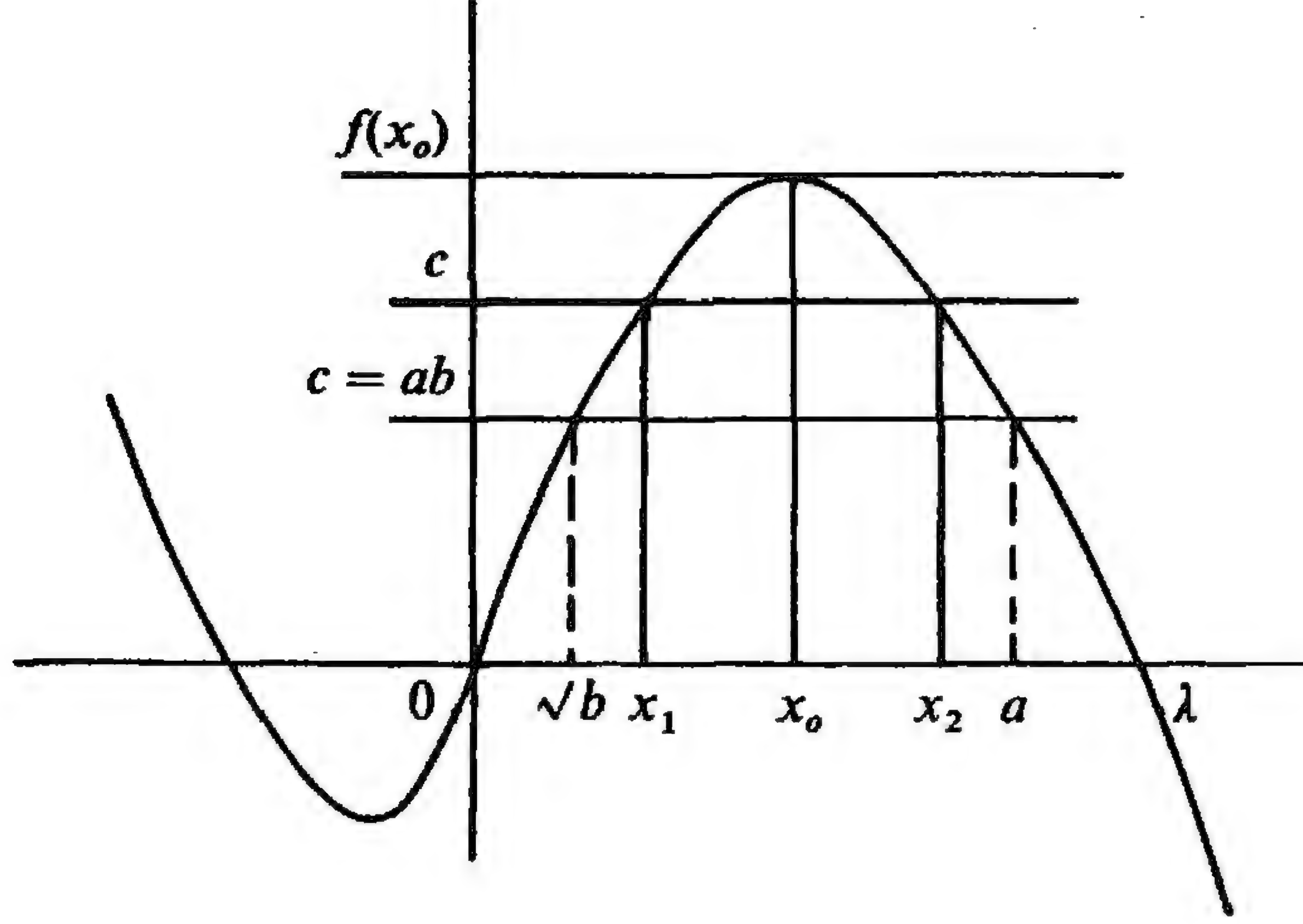
وأن $c = c_0 = f(x_0)$ يقابل الجذر المزدوج

$$x_0 = x_1(c_0) = x_2(c_0)$$

يكون قد تحدد بشكل بديهي التطبيقان التقابليان:

$$x_1 : [0,\ c_0] \longrightarrow [0,\ x_0]$$

$$x_2 : [0,\ c_0] \longrightarrow [x_0,\ \lambda]$$



٤ ـ تحديد الجذر x_1

ليكن X الجذر الأصغر للمعادلة من النوع ٢١:

$$x^3 + f(x_0) - c = (3x_0 - a)x^2 \qquad (٢)$$

إن مسألة وجود الجذور لهذه المعادلة واختيار الجذر الأصغر، X، (الموجب) تعالج وتشرح كما في السابق. يبرهن الطوسي أن:

$$x_1 = x_0 - X$$

وذلك عبر تمييزه للحالات الثلاث، ٤ ـ ١، ٤ ـ ٢ وَ ٤ ـ ٣، التالية:

٤ ـ ١ ـ $X < x_0 - b^{\frac{1}{2}}$.

في هذه الحالة، لدينا، استناداً إلى (١):

$$2x_0(a - x_0) = x_0^2 - b \qquad (٣)$$

واستناداً إلى (٢)

$$f(x_0) - c = X^2(3x_0 - a - X);$$

فيكون

$$2x_0(a-x_0)X=(x_0^2-b)X$$

وبالتالي

$$(x_0^2-x_1^2)(a-x_0)+X^2(a-x_0)=(x_0^2-x_1^2)X+(x_1^2-b)X;$$

فينتج

$$(x_0^2-x_1^2)(a-x_0)=(x_1^2-b)X+X^2(3x_0-a-X)$$

وَ

$$x_0^2(a-x_0)+bx_0=x_1^2a+bx_1-x_1^3+X^2(3x_0-a-X)$$

وهذا يعني

$$f(x_0)=f(x_1)+f(x_0)-c,$$

وبالتالي

$$f(x_1)=c,$$

أي أن $x_1=x_0-X$ جذر للمعادلة ٢٥.

٤ ـ ٢ ـ $X=x_0-b^{\frac{1}{2}}$.

في هذه الحالة يكون $x_1=b^{\frac{1}{2}}$.

فلدينا، استناداً إلى (٣):

$$2x_0(a-x_0)\ (x_0-b^{\frac{1}{2}})=(x_0-b^{\frac{1}{2}})^2(x_0+b^{\frac{1}{2}});$$

لكن

$$2x_0(x_0-b^{\frac{1}{2}})=(x_0+b^{\frac{1}{2}})\ (x_0-b^{\frac{1}{2}})+(x_0-b^{\frac{1}{2}})^2,$$

وبالتالي

$$(x_0^2-b)(a-x_0)=(x_0-b^{\frac{1}{2}})^2(2x_0-b^{\frac{1}{2}}-a).$$

وبإضافة ab إلى كلا الطرفين نحصل على

$$x_0^2(a-x_0)+bx_0=X^2(3x_0-a-X)+ab$$

ومنها

$$f(x_0)=f(x_0)-c+ab;$$

لكن

$ab=f(b^{\frac{1}{2}})$ ومنها $f(b^{\frac{1}{2}})=c$؛

فيكون بالتالي $b^{\frac{1}{2}}$ جذراً للمعادلة ٢٥.

٤ ـ ٣ ـ $X > x_0 - b^{\frac{1}{2}}$.

في هذه الحالة لدينا، استناداً إلى (٣):

$$X^2(2x_0 - X) + (x_0^2 - b)X = X^2(2x_0 - X) + 2x_0X(a - x_0);$$

لكن

$$2x_0X(a - x_0) = (x_0^2 - x_1^2)\ (a - x_0) + X^2(a - x_0),$$

ومنها

$$X^2(3x_0 - a - X) + (x_0^2 - b)X = X(2x_0 - X)\ (a - x_0 + X),$$

ومنها

$$f(x_0) - c + (x_0^2 - b)X = X(2x_0 - X)\ (a - x_0 + X);$$

لكن

$$\begin{aligned} f(x_0) - f(x_1) &= a(x_0^2 - x_1^2) + b(x_0 - x_1) - [x_0^2(x_0 - x_1) + (x_0^2 - x_1^2)x_1] \\ &= (x_0^2 - x_1^2)(a - x_1) - (x_0 - x_1)(x_0^2 - b) \\ &= X(2x_0 - X)(a - x_0 + X) - X(x_0^2 - b), \end{aligned}$$

فنستنتج

$$f(x_1) = c;$$

ويكون $x_1 = x_0 - X$ جذراً للمعادلة ٢٥.

٥ ـ العلاقة بين المعادلة ٢٥ والمعادلة ١٥

إذا كان x_2 الجذر الأكبر للمعادلة ٢٥ فإن $X = x_2 - x_0$ جذر لمعادلة من النوع ١٥.

٥ ـ ١ ـ إذا كان $ab < c < f(x_0)$؛

معلوم، في هذه الحالة أن $x_2 < a$. ولدينا

$$(x_0^2 - b)(x_2 - x_0) = (x_0 + x_2)(x_2 - x_0)(a - x_2) + f(x_0) - c.$$

وإذا وضعنا $X = x_2 - x_0$، نحصل على

$$(x_0^2 - b)X = X(2x_0 + X)\ (a - x_0 - X) + f(x_0) - c;$$

لكن

$$x_0^2 - b = 2x_0(a - x_0),$$

فيكون

$$X^3 + X^2(3x_0 - a) = f(x_0) - c;$$

لذلك فإن X جذر للمعادلة ١٥.

٥ ـ ٢ ـ إذا كان $c = ab$؛

في هذه الحالة يعطي الطوسي النتيجة $x_2 = a$ دون أن يستخدم أي معادلة وسيطة.

٥ ـ ٣ ـ إذا كان $c < ab$؛

في هذه الحالة يكون $x_2 > a$. ولدينا

$$f(x_0) - c = f(x_0) - f(x_2) = [x_0^2(x_2 - x_0) + (x_2^2 - x_0^2)x_2] - [b(x_2 - x_0) + a(x_2^2 - x_0^2)]$$
$$= (x_2^2 - b)(x_2 - x_0) - (x_2^2 - x_0^2)(a - x_0);$$

وبالتالي، فإذا وضعنا $X = x_2 - x_0$، نحصل على:

$$f(x_0) - c = X^2(2x_0 + X) + X(x_0^2 - b) - X(2x_0 + X)(a - x_0);$$

وأخذاً بالاعتبار (٣)، يكون لدينا

$$f(x_0) - c = X^3 + X^2(3x_0 - a);$$

ويكون X جذراً لمعادلة من النوع ١٥.

٦ ـ العلاقة بين المعادلة ٢٥ والمعادلة ٢١

إذا كان x_1 الجذر الأصغر للمعادلة ٢٥ يكون $x_1 < x_0$. فلنبرهن أن $X = x_0 - x_1$ جذر لمعادلة من النوع ٢١.

٦ ـ ١ ـ إذا كان $b^{\frac{1}{2}} < x_1 < x_0$؛

في هذه الحالة نستطيع أن نكتب

$$f(x_0) = bx_1 + b(x_0 - x_1) + x_1^2(a - x_0) + (x_0^2 - x_1^2)(a - x_0)$$
$$c = f(x_1) = bx_1 + x_1^2(a - x_0) + x_1^2(x_0 - x_1),$$

وبالتالي

$$f(x_0) - c = (x_0^2 - x_1^2)(a - x_0) - (x_0 - x_1)(x_1^2 - b);$$

فإذا وضعنا $X = x_0 - x_1$، نحصل على

$$f(x_0) - c = X(2x_0 - X)(a - x_0) - X(x_0^2 - 2x_0X + X^2 - b);$$

وأخذاً بالاعتبار العلاقة (٣)، يكون

$$f(x_0) - c = (3x_0 - a)X^2 - X^3;$$

فيكون $X = x_0 - x_1$ جذراً لمعادلة من النوع ٢١.

٦ ـ ٢ ـ إذا كان $x_1 = b^{\frac{1}{2}}$؛

في هذه الحالة لا يستخدم الطوسي معادلة وسيطة.

٦ ـ ٣ ـ إذا كان $x_1 < b^{\frac{1}{2}}$؛

في هذه الحالة لدينا

$$\begin{aligned} f(x_0) - c &= b(x_0 - x_1) + a(x_0^2 - x_1^2) - [(x_0^2 - x_1^2)x_0 + x_1^2(x_0 - x_1)] \\ &= (x_0^2 - x_1^2)(a - x_0) - (x_1^2 - b)(x_0 - x_1). \end{aligned}$$

وإذا وضعنا $X = x_0 - x_1$، نحصل على

$$f(x_0) - c = X(2x_0 - X)(a - x_0) - X(x_0^2 - 2x_0X + X^2 - b)$$

وأخذاً بالاعتبار العلاقة (٣)، يكون

$$f(x_0) - c = X^2(3x_0 - a) - X^3;$$

فيكون $X = x_0 - x_1$ جذراً لمعادلة من النوع ٢١.

الحالة الرئيسة الثالثة: $a < b^{\frac{1}{2}}$.

تكتب المعادلة على الشكل

$$f(x) = x(b - x^2) + ax^2 = c.$$

١ ـ دراسة النهاية العظمى

لنأخذ المعادلة

$$f'(x) = b - 3x^2 + 2ax = 0 \qquad (١)$$

وليكن x_0 جذرها الموجب. لدينا ما يلي:

$$a < x_0 < b^{\frac{1}{2}}.$$

فإذا كان $x_0 = a$ يكون $a^2 = b$ وهذا خُلف. لذلك لدينا $x_0 \neq a$.

وبما أن

$$\frac{b}{3} = x_0\left(x_0 - \frac{2a}{3}\right)$$

فإذا كان $x_0 < a$ يكون $b^{\frac{1}{2}} < a$ وهذا خُلف. لذلك فإن $x_0 > a$.

من جهة أخرى، لدينا $x_0 < b^{\frac{1}{2}}$. فإذا كان $x_0 \geq b^{\frac{1}{2}}$ يكون، كما في ما سبق، $a \geq b^{\frac{1}{2}}$، وهذا خُلف.

ليكن

$$f(x_0) = x_0(b - x_0^2) + ax_0^2 ,$$

ولنبرهن أن كل x غير x_0 يحقق العلاقة $f(x) < f(x_0)$.

١ - ١ - $x > x_0 \Longrightarrow f(x) < f(x_0)$.

نفرض أولاً أن $x_0 < x < b^{\frac{1}{2}}$، فيكون لدينا استناداً إلى (١):

$$2x_0(x_0 - a) = b - x_0^2 ;$$

لكن

$$b - x^2 < b - x_0^2,$$

فيكون

$$(x - x_0)(x + x_0)(x_0 - a) > (b - x^2)(x - x_0);$$

وإذا أضفنا إلى كل من الطرفين:

$$(b - x^2)(x_0 - a) + a(b - x^2) + ax^2$$

نحصل على

$$bx_0 - x_0^3 + ax_0^2 > bx - x^3 + ax^2,$$

وهو المطلوب بيانه.

وإذا كان $x = b^{\frac{1}{2}}$ يكون $f(x) = ab < f(x_0)$.

وأخيراً، إذا كان $x > b^{\frac{1}{2}}$ يكون

$$f(x_0) > ab = ax^2 - a(x^2 - b) > ax^2 - x(x^2 - b) = f(x),$$

وذلك لأن $x > b^{\frac{1}{2}} > a$.

١ ـ ٢ ـ $x < x_0 \Longrightarrow f(x) < f(x_0)$؛

نفرض أولاً أن $a < x < x_0$، فيكون لدينا استناداً إلى (١):

$$2x_0(x_0 - a) = b - x_0^2$$

ومنها

$$b - x_0^2 > (x_0 + x)(x_0 - a);$$

فيكون

$$(b - x_0^2)(x_0 - x) + [(b - x_0^2)(x - a) + a(b - x_0^2) + ax_0^2] >$$
$$> (x_0^2 - x^2)(x_0 - a) + [(b - x_0^2)(x - a) + a(b - x_0^2) + ax_0^2]$$

ويكون بالتالي

$$f(x_0) > f(x).$$

وإذا كان $x = a$ يكون، كما في ما سبق

$$ab = f(x) < f(x_0)$$

وإذا كان $x < a < x_0$، يكون، كما في ما سبق

$$f(x) < ab < f(x_0).$$

خلاصة، نستطيع القول إنه

ـ إذا كان $c > f(x_0)$، تكون المسألة مستحيلة؛

ـ إذا كان $c = f(x_0)$، يكون x_0 حلاً مزدوجاً؛

ـ إذا كان $c < f(x_0)$، يكون للمعادلة حلّان، x_1 و x_2 بحيث يكون

$$x_1 < x_0 < x_2 .$$

٢ ـ تحديد الجذر x_2

لنأخذ المعادلة من النوع ١٥ التالية:

(٢) $f(x_0) - c = x^3 + (3x_0 - a)x^2$،

وليكن X حلّها الموجب.

٢ ـ ١ ـ إذا كان $X < b^{\frac{1}{2}} - x_0$؛

في هذه الحالة يكون $x_2 = x_0 + X$ جذراً للمعادلة ٢٥ ويكون $x_2 < b^{\frac{1}{2}}$. فلدينا، استناداً إلى (١):

$$2x_0(x_0 - a) = b - x_0^2 \qquad (٣)$$

ومن جهة أخرى

$$(x_2^2 - x_0^2) = (x_2 - x_0)^2 + 2(x_2 - x_0)x_0 \; .$$

فيكون

$$(x_2^2 - x_0^2)(x_0 - a) = (x_2 - x_0)^2(x_0 - a + x_2 + x_0) + (b - x_2^2)(x_2 - x_0);$$
$$(x_2^2 - x_0^2)(x_0 - a) = X^2(3x_0 - a + X) + (b - x_2^2)(x_2 - x_0);$$

وبإضافة $(b - x_2^2)(x_0 - a)$ إلى كلٍّ من الطرفين نحصل على

$$(b - x_0^2)(x_0 - a) = f(x_0) - c + (b - x_2^2)(x_2 - a).$$

$$f(x_0) = f(x_0) - c + f(x_2)$$

$$f(x_2) = c,$$

ويكون $x_2 = x_0 + X$ جذراً للمعادلة ٢٥.

٢ ـ ٢ ـ إذا كان $x = b^{\frac{1}{2}} - x_0$؛

في هذه الحالة يكون $x_2 = b^{\frac{1}{2}}$ ويكون

$$f(x_2) = f(b^{\frac{1}{2}}) = ab.$$

فالعلاقة (٢) تعطي

$$f(x_0) - c = (b^{\frac{1}{2}} - x_0)^2(b^{\frac{1}{2}} + 2x_0 - a)$$
$$= (b - x_0^2)(b^{\frac{1}{2}} - x_0) + (b^{\frac{1}{2}} - x_0)^2(x_0 - a);$$

واستناداً إلى (٣):

$$f(x_0) - c = 2x_0(x_0 - a)(b^{\frac{1}{2}} - x_0) + (b^{\frac{1}{2}} - x_0)^2(x_0 - a),$$

وبالتالي

$$f(x_0) - c = (x_0 - a)(b - x_0^2)$$
$$= f(x_0) - ab,$$

فيكون

$$ab = f(b^{\frac{1}{2}}) = c,$$

ويكون $x_2 = b^{\frac{1}{2}}$ جذراً للمعادلة ٢٥.

٢ ـ ٣ ـ إذا كان $X > b^{\frac{1}{2}} - x_0$؛

في هذه الحالة يكون $x_2 = x_0 + X$ جذراً أكبر من $b^{\frac{1}{2}}$.

فلدينا

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(x_2) + [x_0^3 - x_2^3 - a(x_2^2 - x_0^2) - b(x_2 - x_0)] \\ &= f(x_2) + (x_0 - x_2)[x_0^2 + x_0x_2 + x_2^2 - a(x_0 + x_2) - b]. \end{aligned}$$

لكن، استناداً إلى (٣)

$$f(x_0) = f(x_2) + (x_0 - x_2)\ [(x_2 - a)(x_2 + x_0) - 2x_0(x_0 - a)]$$

وبالتالي

$$f(x_0) = f(x_2) + X^2(X + 3x_0 - a);$$

واستناداً إلى (٢) يكون

$$f(x_0) = f(x_2) + f(x_0) - c,$$

ومنها

$$f(x_2) = c,$$

ويكون $x_2 = x_0 + X$ جذراً للمعادلة ٢٥.

٣ ـ حصر الجذرين x_1 و x_2

ليكن λ الجذر الموجب للمعادلة

$$x^2 = ax + b \qquad (٤)$$

مهما كان العدد c، $c < f(x_0)$، يكون

$$0 < x_1 < x_0 \qquad \text{وَ} \qquad x_0 < x_2 < \lambda$$

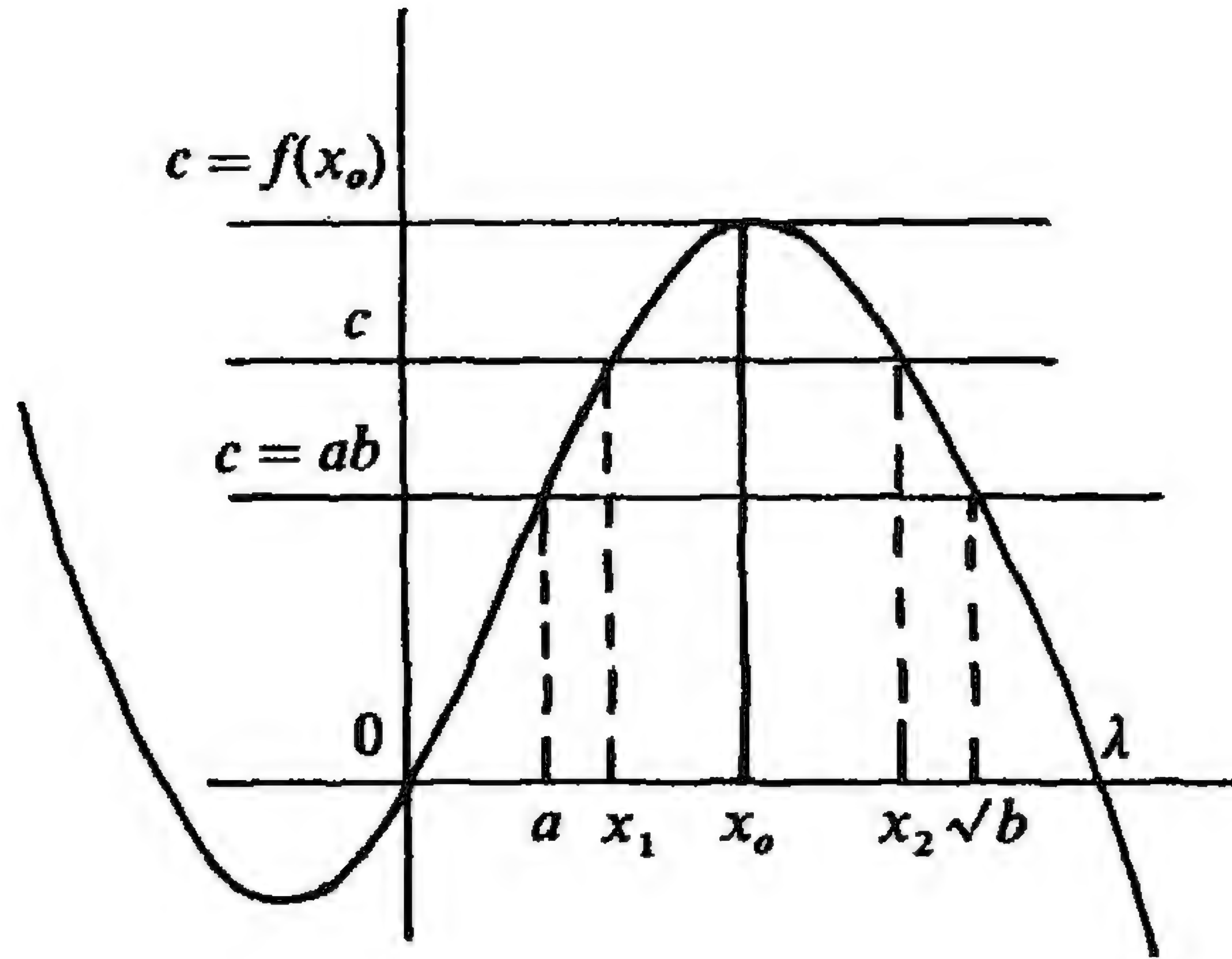
وبالعكس، فكل عدد x، حيث $x < \lambda$، يقابله عدد c، $c > 0$ بحيث يكون x جذراً للمعادلة ٢٥ الخاصة بالعدد c.

فإذا كان $x_0 < x < \lambda$، يكون x الجذر الأكبر x_2؛ أما إذا كان $0 < x < x_0$ فيكون x الجذر الأصغر x_1.

بيان ذلك يتم بطرق مشابهة للطرق التي اتُبعت في الحالة الثانية. ونلاحظ، كما في الحالة السابقة، أن $x_1 = 0$ وَ $x_2 = \lambda$ جذران للمعادلة $f(x) = 0$. وهنا أيضاً يتحدد تطبيقان تقابليان

$$x_1 : \ [0,\ c_0] \longrightarrow]\ [0,\ x_0]$$

$$x_2 : \ [0,\ c_0] \longrightarrow [x_0,\ \lambda].$$



٤ ـ تحديد الجذر x_1

ليكن X جذر المعادلة من النوع ٢١:

$$x^3 + f(x_0) - c = (3x_0 - a)x^2 \qquad (٥)$$

إن مسألة وجود الجذور لهذه المعادلة واختيار الجذر الأصغر X، (الموجب) تعالج وتشرح كما في السابق. يبرهن الطوسي أن

$$x_1 = x_0 - X.$$

وذلك عبر تمييزه للحالات الثلاث ٤ ـ ١، ٤ ـ ٢ وَ ٤ ـ ٣ التالية:

٤ ـ ١ ـ إذا كان $X < x_0 - a$؛

في هذه الحالة لدينا، استناداً إلى (٣):

$$X(b - x_0^2) = 2x_0(x_0 - a)X = X^2(x_0 - a) + X(2x_0 - X)\ (x_0 - a);$$

وإذا أضفنا إلى كلا الطرفين:

$$(b - x_0^2)(x_0 - X) + aX(2x_0 - X) + a(x_0 - X)^2,$$

نحصل على

$$f(x_0) = f(x_0 - X) + X^2(3x_0 - a - X),$$

واستناداً إلى (٥)

$$f(x_0) = f(x_0 - X) + f(x_0) - c,$$

وبالتالي

$$f(x_0 - X) = c,$$

فيكون $x_1 = x_0 - X$ جذراً للمعادلة ٢٥.

٤ ـ ٢ ـ إذا كان $X = x_0 - a$؛

في هذه الحالة يكون $x_1 = a$. فلدينا، استناداً إلى (٣):

$$f(x_0) = f(a) + 2x_0(x_0 - a)^2;$$

لكن، استناداً إلى (٥)

$$f(x_0) - c = 2x_0(x_0 - a)^2,$$

وبالتالي

$$f(a) = c,$$

فيكون $x_1 = a$ جذراً للمعادلة ٢٥.

٤ ـ ٣ ـ إذا كان $X > x_0 - a$؛

في هذه الحالة يكون $x_1 = x_0 - X < a$؛ لدينا

$$f(x_0) = (ax_0^2 + bx_0) - x_0^3 = [ax_0^2 + bx_0 + (x_0 - X)^3 - x_0^3] - (x_0 - X)^3 \quad \text{(ف)}$$

وإذا طرحنا

$$a(x_0 - X)^2 + b(x_0 - X),$$

من حدّي الفرق الأخير، (ف)، نحصل على

$$f(x_0) = X^2(3x_0 - a - X) + f(x_0 - X),$$

وعلماً بأن

$$X^2(3x_0 - a - X) = f(x_0) - c$$

يكون لدينا

$$f(x_0 - X) = c,$$

ويكون $x_1 = x_0 - X$ جذراً للمعادلة ٢٥.

٥ ـ العلاقة بين المعادلة ٢٥ والمعادلة ١٥

إذا كان x_2 الجذر الأكبر للمعادلة ٢٥ فإن $X = x_2 - x_0$ جذر لمعادلة من النوع ١٥.

٥ ـ ١ ـ إذا كان $X < b^{\frac{1}{2}} - x_0$؛

في هذه الحالة يكون $x_0 < x_2 < b^{\frac{1}{2}}$، ويكون لدينا

$$f(x_0) = x_0(b - x_2^2) + x_0(x_2^2 - x_0^2) + ax_0^2$$
$$c = x_0(b - x_2^2) + (x_2 - x_0)\ (b - x_2^2) + a(x_2^2 - x_0^2) + ax_0^2,$$

ومنها

$$f(x_0) - c = x_0(x_2^2 - x_0^2) - [(x_2 - x_0)(b - x_2^2) + a(x_2^2 - x_0^2)] \quad (\text{ف}')$$

وإذا طرحنا $a(x_2^2 - x_0^2)$ من حدّي الفرق (فَ)، نحصل على

$$f(x_0) - c = (x_0 - a)(x_2^2 - x_0^2) - (x_2 - x_0)(b - x_2^2),$$

وبالتالي

$$f(x_0) - c = X(x_0 - a)(2x_0 + X) - X(b - x_0^2 - 2x_0X - X^2);$$

وإذا أخذنا بالاعتبار (٣)، نحصل على

$$c_0 - c = X^2(3x_0 - a) + X^3;$$

ويكون X جذراً لمعادلة من النوع ١٥.

٥ ـ ٢ ـ إذا كان $X = b^{\frac{1}{2}} - x_0$.

يكون $x_2 = b^{\frac{1}{2}}$؛ ويصل الطوسي إلى هذه النتيجة من دون استخدام معادلة وسيطة.

٥ ـ ٣ ـ إذا كان $X > b^{\frac{1}{2}} - x_0$.

في هذه الحالة يكون $x_2 > b^{\frac{1}{2}}$؛ ولدينا

$$c = f(x_2) = bx_2 + ax_0^2 + a(x_2^2 - x_0^2) - [x_0^3 + x_2^2(x_2 - x_0) + x_0(x_2^2 - x_0^2)].$$

وبالتالي

$$f(x_0) - c = X(x_0^2 + 2x_0X + X^2 - b) + X(2x_0 + X)(x_0 - a),$$

وإذا أخذنا بالاعتبار (٣)، نحصل على

$$f(x_0) - c = X^3 + X^2(3x_0 - a);$$

ويكون X جذراً لمعادلة من النوع ١٥.

٦ ـ العلاقة بين المعادلة ٢٥ والمعادلة ٢١

إذا كان x_1 الجذر الأصغر للمعادلة ٢٥، يكون $X = x_0 - x_1$ جذراً لمعادلة من النوع ٢١.

٦ ـ ١ ـ إذا كان $X < x_0 - a$؛

في هذه الحالة يكون $a < x_1 < x_0$ ويكون لدينا

$$c = f(x_1) = ax_1^2 + x_1(b - x_0^2) + x_1(x_0^2 - x_1^2),$$
$$f(x_0) = ax_1^2 + a(x_0^2 - x_1^2) + x_1(b - x_0^2) + (x_0 - x_1)(b - x_0^2),$$

وبالتالي

$$f(x_0) - c = a(x_0^2 - x_1^2) + (x_0 - x_1)(b - x_0^2) - x_1(x_0^2 - x_1^2)$$
$$= X(b - x_0^2) - X(2x_0 - X)(x_0 - a - X)$$

وإذا أخذنا بالاعتبار (٣)، نحصل على

$$X^3 + f(x_0) - c = X^2(3x_0 - a);$$

ويكون X جذراً للمعادلة الوسيطة من النوع ٢١.

٦ ـ ٢ ـ إذا كان $X = x_0 - a$، يكون $x_1 = a$؛ وهذه النتيجة يعطيها الطوسي من دون استخدام معادلة وسيطة.

٦ ـ ٣ ـ إذا كان $X > x_0 - a$؛

في هذه الحالة يكون $x_1 < a$؛ ولدينا:

$$f(x_0) - c = b(x_0 - x_1) + a(x_0^2 - x_1^2) - [x_0^2(x_0 - x_1) + x_1(x_0^2 - x_1^2)],$$

وبالتالي

$$f(x_0) - c = (x_0 - x_1)(b - x_0^2) + (x_0^2 - x_1^2)(a - x_1)$$
$$= X(b - x_0^2) + X(2x_0 - X)(X + a - x_0),$$

وإذا أخذنا بالاعتبار (٣)، نحصل على:

$$X^3 + f(x_0) - c = X^2(3x_0 - a);$$

ويكون X جذراً لمعادلة من النوع ٢١.

تعليقات إضافية(1)

[3,12] كلمة «gnomon» هي الكلمة الفرنسية التي اخترناها لنقل كلمة «عَلَم» التي استخدمها الطوسي. ولا يخفى على القارئ العربي معاني كلمة «عَلَم» هذه، فاستخداماتها قديمة في اللغة العربية. [انظر مثلاً أبو الحسين أحمد بن زكريا بن فارس، **معجم مقاييس اللغة**، بتحقيق وضبط عبد السلام محمد هارون، ٦ج (القاهرة: دار إحياء الكتب العربية، ١٣٦٦ ـ ١٣٧١هـ)، ج٤، ص ١٠٩ ـ ١١١].

والأصل اليوناني *γνώμων* يشير أيضاً إلى فكرة العلامة المميزة. والكلمة تعود إلى كلمة *γιγνωσκω* «أنا أعلَم» وتعني، بحسب تعبير Th. Heath حرفياً «A thing enabling something to be known, observed or verified, a teller or a marker as one might say» [Th. Heath, *Euclid's Elements* (Dover: [n.pb.], 1956), vol. 1, p. 370].

وفي علم الفلك نقلت كلمة «gnomon» إلى العربية بكلمات عدة وبخاصة بكلمة «المقياس» [انظر: Carl Schoy, *Die Gnomonik der Araber*, Die Geschichte der Zeitmessung under der Uhren; Bd. 1, Lfg. F (Berlin: W. de Gruyter, 1923), p. 5].

وفي الهندسة أيضاً، قصد المترجمون العرب ألا يبتعدوا عن معنى الأصل اليوناني فاختاروا كلمة «عَلَم».

فلقد قدّم ثابت بن قرّة في ترجمته لِ **الأصول** التي نقّحها حنين بن اسحق، قدّم التحديد التالي لكلمة «عَلَمْ» [انظر: إقليدس، **الأصول**، II، التحديد ٢]: «كل شكل متوازي الأضلاع، فليسمّ أحد السطحين المتوازيي الأضلاع اللذين على قطره، أيهما كان، مع كلا السطحين المتممين: العلم»، [انظر: إقليدس، **الأصول**، ترجمة حنين بن اسحق (مخطوطة هانت رقم ٤٣٥، مكتبة بودلين)، الورقة ١٣ظ].

وهكذا، فإن هذا الاستخدام للكلمة المذكورة، فرض نفسه ابتداءً من القرن التاسع حيث أخذ يتردد في الرياضيات اللاحقة. إن الطوسي يعمّم هذه اللفظة باستخدامه تعبير

---

(1) نشير إلى كل ملاحظة برقمين، رقم الصفحة (إلى اليسار) ورقم السطر، في النص العربي في المجلد الثاني.

«العلم المجسم» الذي يشير إلى شكل ذي ثلاثة أبعاد.

[140, 13]؛ ليكن $ABCD$ مربعاً بحيث $AB = 10$. المطلوب هو تقسيم هذا المربّع إلى أربع مساحات:

$$S_1, \quad S_2, \quad S_3, \quad S_4$$

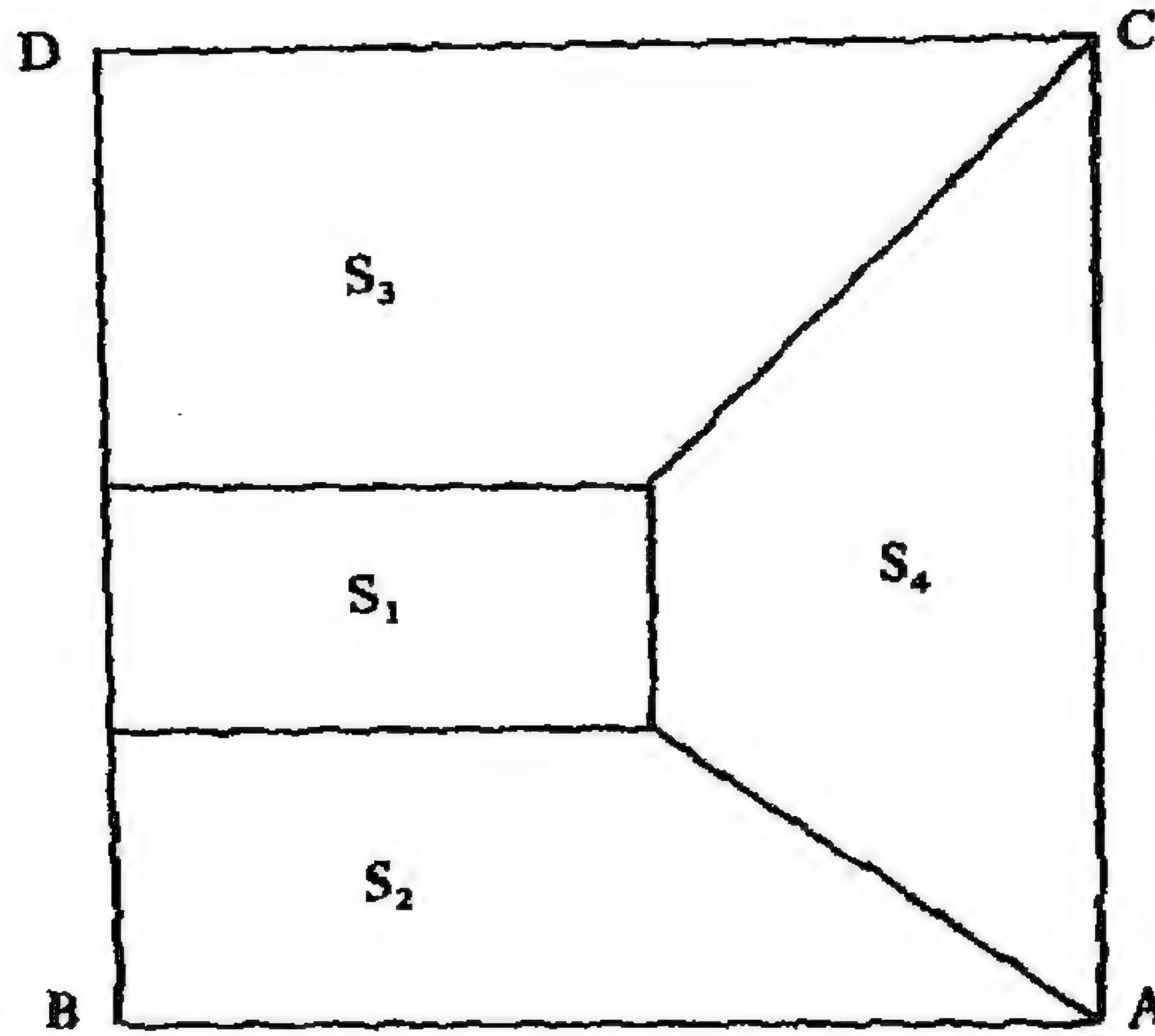
بحيث يكون:

- S_1 مستطيلاً، ذا ضلع محمول بـ BD.

- كل من S_2، S_3، S_4، شبه منحرف، نحصل عليه بوصل كل من رأسي المستطيل الباقيين إلى النقطتين A وَ C.

ليكن S_2 شبه المنحرف ذا القاعدة AB، S_3 شبه المنحرف ذا القاعدة DC و S_4 شبه المنحرف ذا القاعدة AC. والمطلوب أيضاً أن يكون لدينا

$$S_2 = 2S_1, \quad S_3 = 5S_1, \quad S_4 = 3S_1$$



المسألة إذن هي مسألة بناء هندسي بواسطة المسطرة والفرجار. لذلك فمن الطبيعي أن نظن، للوهلة الأولى، أن مسألة البناء هذه مستقلة تماماً عن إنجازات الطوسي الجبرية كما عَرَضها في رسالته عن المعادلات. ويتدعّم هذا الانطباع بالعرض الرياضي التركيبي الذي يقدّمه الطوسي.

فإلى أي حد، وبأي معنى، استطاعت مفاهيم الطوسي وتقنياته الجبرية أن تلعب دورها في مسألة هي في النهاية مسألة تقليدية، إضافة إلى أنها ظرفية؟ هذا هو السؤال الذي يطرح نفسه على المؤرّخ الذي لا يكتفي بسرد الوقائع ووصفها. إن الإجابة عن هذا السؤال تسمح بتحديد موقع هذه المسألة ضمن عمل الطوسي الرياضي. لكن، وقبل

الشروع في الإجابة عن هذا السؤال، سنلخّص أولاً حل الطوسي متلافين قدر الإمكان الابتعاد عن نصّه أو عن أسلوبه.

ليكن $ABCD$ مربعاً بحيث $AB = 10$، ولتكن E نقطة على AB (انظر الشكل التالي).

نبني النقطة I بحيث يكون $BI = 10BE$. من ثم نجمع ID ونمدّ من E، EF متوازياً مع ID؛ (النقطة F على BD)، فيكون لدينا $BF = \frac{1}{10}AB$، أي $BF = 1$.

ولتكن I' نقطة كيفما اتفق، على BE ولتكن G و H بحيث يكون $I'G = 54\ BI'$، $GH = 45\ BI'$. ولنجمع GF ونمد $HJ//GF$، فيكون لدينا

$$BJ = \frac{20}{11}BF \qquad \text{أي} \qquad BJ = \frac{2}{11}BD.$$

من ثم نرسم JS، $JS//AB$، ونضع M بين J وَ S ونضع L من الجهة الأخرى لِـ J بحيث يكون

$$JL = \frac{7}{4}BF \qquad \text{وَ} \qquad JM = 2BF$$

ولتكن C_b كيفما اتفقت على BD، ولتكن B_c و J_d بحيث يكون

$$C_bB_c = 3024\ JC_b \qquad \text{وَ} \qquad J_dB_c = 725\ JC_b$$

من ثم نرسم B_cM وَ $JN//B_cM$ (N على JS)؛ ونضع

$$SO = 5BF + \frac{5}{11}BF = \frac{60}{11}BF$$

ونرسم نصف الدائرة ذات القطر SO ونمد من S، ضمن نصف الدائرة هذا وتراً SP مساوياً لِـ $2JK$، وهذا ممكن لأن $SO > LN$. ليكن I منتصف $\widehat{SP}$ وليكن $UQ \perp SO$.

لتكن X كيفما اتفق على UQ ولتكن النقطة T على IQ بحيث

$$XT = \left(1 + \frac{1}{3}\right) QX$$

نرسم TS ونرسم $XR//TS$، R على SO. ونضع V على AC بحيث يكون $SV = SR$، ومن V نمدّ VK_b موازياً لِـ AB، K_b على BD.

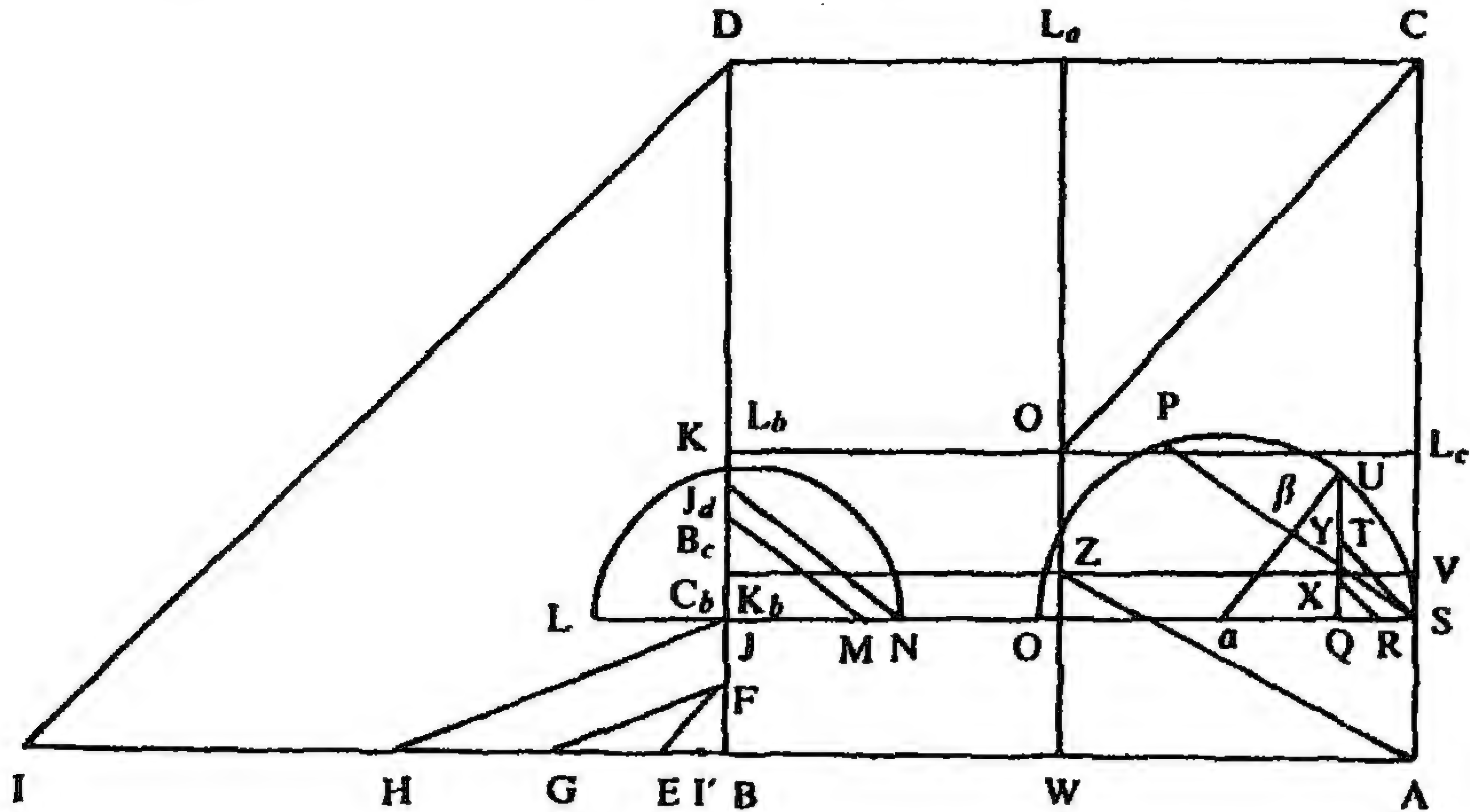
وليكن L_b على BD بحيث $DL_b = \left(2 + \frac{1}{2}\right)BK_b$. ومن L_b نمد $L_bL_c//AB$،

حيث L_c على AC. وليكن W على AB بحيث

$$AW = \frac{2}{3}BJ + \left(3+\frac{1}{2}\right)JK_b$$

وليكن $WL_a // BD$ (النقطة L_a على CD).

ليكن Z التقاء K_bV وَ WL_a وليكن O' التقاء WL_a وَ L_cL_b. فيكون:



- $ZO'K_bL_b$ مستطيلاً؛

- $ABZK_b$ شبه منحرف بحيث يكون

$$(A,\ B,\ Z,\ K_b) = 2(Z,\ O',\ K_b,\ L_b)$$

- $AZO'C$ شبه منحرف بحيث يكون

$$(A,\ Z,\ O',\ C) = 5(Z,\ O',\ K_b,\ L_b)$$

- CDL_bO' شبه منحرف بحيث يكون

$$(C,\ D,\ L_b,\ O') = 3(Z,\ O',\ K_b,\ L_b).$$

البرهان: BF هو الواحد.

بناء J يعطي $\frac{BF}{FJ} = \frac{11}{9}$ ومنها

$$FJ = \frac{9}{11}BF \quad , \quad BJ = \frac{20}{11}BF.$$

وبناء N يعطي

$$MN = \frac{725}{3025} MJ = \frac{1450}{3025} BF,$$

ومنها

$$JN = JM + MN = \frac{300}{121} BF.$$

لكن قدرة النقطة J بالنسبة إلى الدائرة ذات القطر NL تعطي

$$JN \cdot JL = JK^2 ,$$

ولدينا

$$\overline{JK}^2 = \frac{300}{121} \cdot \frac{7}{4} \overline{BF}^2 = \frac{525}{11^2} \cdot \overline{BF}^2.$$

لكن، بما أن $SP = 2KJ$ فإن U هو منتصف $\widehat{SP}$ وَ $SO \perp UQ$. لذلك، فإن مساواة المثلثين، قائمي الزاوية $S\alpha\beta$ وَ $U\alpha Q$ تعطي $UQ = S\beta = \frac{1}{2} SP$ ومنها $UQ = KJ$.
ومن جهة أخرى، بناءً على قدرة النقطة Q بالنسبة إلى الدائرة ذات القطر SO، لدينا $SQ \cdot QO = \overline{UQ}^2$، ومنها

$$SQ \cdot QO = \frac{525}{11^2} BF^2.$$

واستناداً إلى بناء R، لدينا

$$RS = \frac{4}{7} QS \qquad \text{وَ} \qquad RQ = \frac{3}{7} QS ,$$

وبالتالي

$$OQ \cdot RS = \frac{4}{7} \cdot \frac{525}{11^2} \overline{BF}^2.$$

لكن

$$(K_b V \text{ على } Y)\ OQ \cdot RS = OQ \cdot QY = (O,\ Y)$$

وذلك لأن

$$QY = SV = SR,$$

فيكون

$$(OY) = \frac{4}{7} \cdot \frac{525}{11^2} \cdot BF^2.$$

ولدينا

$$(V,\ J) = (V,\ R) + (R,\ Y) + (Y,\ O) + (O,\ K_b)$$

ولدينا

$$OJ = \frac{50}{11} BF, \quad \text{أي} \quad (O,\ K_b) = OJ\ .\ JK_b = OJ\ .\ RS$$

فيكون
$$(V,\ J) = \overline{RS}^2 + \frac{3}{4}\overline{RS}^2 + \frac{4}{7}\ .\ \frac{525}{11^2}\overline{BF}^2 + \frac{50}{11}BF\ .\ RS$$

$$= \frac{7}{4}\overline{RS}^2 + \frac{300}{11^2}\overline{BF}^2 + \frac{50}{11}BF\ .\ RS.$$

ومن جهة أخرى، لدينا

$$(V,\ W) = AW\ .\ AV = \left(\frac{3}{2}AS + \frac{7}{2}VS\right)(AS + VS)$$
$$= \frac{3}{2}\overline{AS}^2 + 5\ AS\ .\ VS + \frac{7}{2}\overline{VS}^2$$
$$= \frac{3}{2}\left(\frac{20}{11}BF\right)^2 + 5\ .\ \frac{20}{11}BF\ .\ RS + \frac{7}{2}RS^2$$
$$= \frac{600}{11^2}\overline{BF}^2 + \frac{100}{11}BF\ .\ RS + \frac{7}{2}\overline{RS}^2 = 2(V,\ J).$$

فيكون لدينا

$$(V,\ J) = \frac{1}{2}(V,\ W) = (A,\ V,\ Z).$$

لكن

$$(V,\ B) - (V,\ J) = (B,\ S)$$

وَ

$$(V,\ B) - (A,\ V,\ Z) = (B,\ K_b,\ Z,\ A)$$

ومنها

$$(B,\ S) = (B,\ K_b,\ Z,\ A).$$

لكن

$$(B,\ S) = \frac{2}{11}(A,\ B,\ C,\ D),$$

فيكون

$$(B,\ K_b,\ Z,\ A) = \frac{2}{11}(A,\ B,\ C,\ D).$$

ومن جهة أخرى فإن لِشبهي المنحرف $(B,\ K_b,\ Z,\ A)$ وَ $(D,\ C,\ O',\ L_b)$

قاعدتين متساويتين، ونسبة ارتفاعيهما BK_b إلى DL_b، تساوي $\frac{2}{5}$؛ فيكون لدينا

$$(D,\ C,\ O',\ L_b) = \frac{5}{11}(A,\ B,\ C,\ D).$$

ولدينا

$$(A,\ Z,\ O',\ C) = (A,\ L_a) - [(A,\ W,\ Z) + (C,\ O',\ L_a)].$$

لكن

$$(C,\ O',\ L_a) = \frac{5}{2}\ (A,\ W,\ Z),$$

فيكون

$$\begin{aligned}(A,\ Z,\ O',\ C) &= (A,\ L_a) - \frac{7}{2}\ (V,\ J)\\ &= AC\ .\ AW - \frac{7}{2}AC\ .\ VS\\ &= AC\left(\frac{3}{2}AS + \frac{7}{2}VS - \frac{7}{2}VS\right) = \frac{3}{2}AC\ .\ AS\\ &= \frac{3}{2}(B,\ S) = \frac{3}{11}(A,\ B,\ C,\ D).\end{aligned}$$

وفي النهاية، إذا حذفنا من المربع $(ABCD)$، شبه المنحرفات الثلاثة، يبقى المستطيل $(O',\ L_b,\ K_b,\ Z)$ الذي تكون مساحته إذن $\frac{1}{11}(A,\ B,\ C,\ D)$.

إن عرض الطوسي كما يظهر هذا الموجز، هو عرض تركيبي حصراً. فلم يكشف الرياضي عن دواعي اختياره للقيم العددية الخاصة بالبناء الهندسي الذي قام به، وذلك في أيٍّ من مراحل هذا البناء تقريباً. [منذ البداية أخذ $S_1 = \frac{1}{11}ABCD$، كما أخذ النقطة J بحيث $BJ = \frac{2}{11}BD$ وبحيث يكون المستطيل $(A,\ J)$ يساوي $\frac{2}{11}(ABCD)$؛ فيكون $(A,\ J)$ مساوياً لشبه المنحرف المطلوب S_2]. كما أن الطوسي لا يشرح من جهة ثانية دواعي التسلسل الذي اعتمده في ترتيب بنائه الهندسي. هذا التسلسل الذي لا يمكن تفسيره في الواقع إلا عبر تفحص المسار التحليلي الذي اتبعه الطوسي. وهذا ما يتأكد عند قراءة خاتمة عرض الطوسي، حيث يعترف الرياضي بأهمية التحليل الرياضي بخاصة في مثل هذا النوع من المسائل الحسابية ـ الهندسية، إلا أنه يرد إغفاله للتحليل إلى أسباب ظرفية دعته إلى الاقتضاب.

فالطوسي يعتبر التحليل ضرورياً للوصول إلى النتيجة المطلوبة ويعتبر «أن أعظم فوائد العلوم الرياضية إنما هو ذلك». وهو يعلن إلى مراسله، أنه وإن استغنى عن هذا التحليل ولم يعرضه، إلا أنه مستعد لعرضه عليه إن هو رغب في ذلك.

لكن موقف الطوسي المبدئي هذا لا يغير من واقع الحال في ما يخصنا وهو أن

النص لا يحتوي على أية معلومة بالنسبة إلى التحليل الذي اتبعه في هذه المسألة. فلا يبقى أمامنا إذن إلا إعادة تركيب هذا التحليل مستخدمين فقط الوسائل التي كانت بحوزته. لنضع أمامنا من جديد مسألة الطوسي، ولنأخذ:

$S_1 =$ مساحة المستطيل $ZO'K_bL_b$

$S_2 =$ مساحة شبه المنحرف ABK_bZ

$S_3 =$ مساحة شبه المنحرف CDL_bO'

$S_4 =$ مساحة شبه المنحرف $AZO'C$

بحيث يكون

$$S_2 = 2S_1,\ S_3 = 5S_1,\ S_4 = 3S_1.$$

ولنضع:

$$K_bL_b = x,\ K_bZ = y,\ K_bB = t.$$

فنجد، مباشرة

$$S_1 = \frac{1}{11}(A,\ B,\ C,\ D) = \frac{100}{11}$$

$$S_2 = \frac{2}{11}(A,\ B,\ C,\ D) \Longleftrightarrow S_2 = (B,\ J,\ S,\ A)$$

مع كون:

$$BJ = \frac{2}{11}BD = \frac{20}{11}$$

$$S_3 = \frac{5}{2}S_2 \Longleftrightarrow DL_b = \frac{5}{2}BK_b.$$

ولنأخذ $u = JK_b$ كمجهول مساعد

$$t = \frac{20}{11} + u \quad , \quad z = \frac{50}{11} + \frac{5}{2}u$$

$$x = 10 - t - z = \frac{40}{11} - \frac{7}{2}u$$

$$S_4 = 3S_1 \Longleftrightarrow \frac{(10-y)(10+x)}{2} = 3xy$$

فيكون

$$y = \frac{80}{11} - \frac{7}{2}u.$$

وبالتالي

$$AW = 10 - y = \frac{30}{11} + \frac{7}{2}u,$$

فيكون

$$AW = \frac{3}{2}BJ + \frac{7}{2}JK_b.$$

ويكون من الواضح أن حل المسألة يعود إلى تحديد u. لدينا

$$S_1 = \frac{100}{11} \Longleftrightarrow xy = \frac{100}{11} \Longleftrightarrow \left(\frac{40}{11} - \frac{7}{2}u\right) \left(\frac{80}{11} - \frac{7}{2}u\right) = \frac{100}{11} ,$$

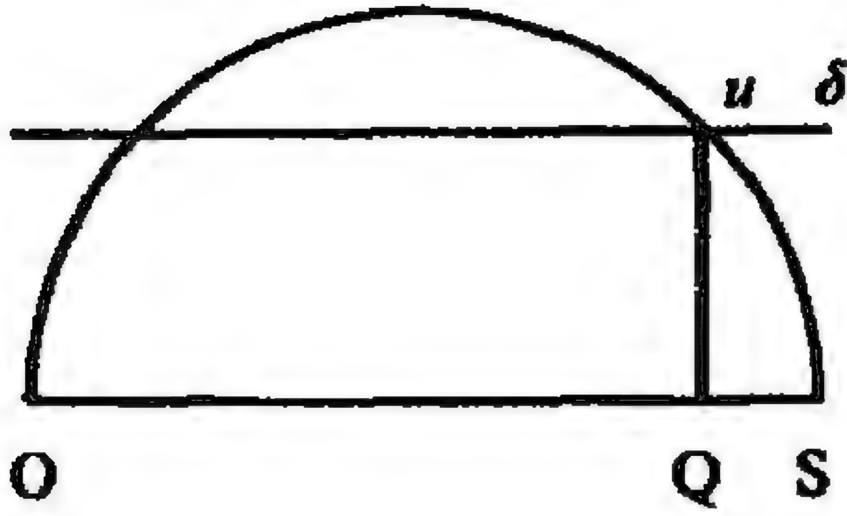
وبالتالي

$$\left(\frac{7}{4}u\right)^2 - \frac{60}{11}\left(\frac{7}{4}u\right) + \frac{525}{11^2} = 0,$$

مع كون $\frac{7}{4}u < \frac{20}{11}$؛

فيكون

$$\frac{7}{4}u = \frac{60 - \sqrt{375}}{11} .$$



هكذا نكون قد وجدنا، عن طريق ما تقدم من تحليل، معظم القيم العددية التي قدمها الطوسي. لكن الحل الجبري لمعادلة الدرجة الثانية التي وصلنا إليها، يعطي عدداً أصمّ c فلا يمكن بالتالي أن يشكل جواباً لمسألة البناء المطروحة. فالتحليل يقتضي إذن تحديد جذري المعادلة بوسائل «البناء» إذا صح التعبير. الدائرة التي نحتاج إليها هنا لها بالضرورة قطر SO يعادل $\frac{60}{11}$ (جمع الجذرين). كما يجب أن يكون مربع المسافة بين SO والخط δ، مساوياً لِ $\frac{525}{11^2}$ (ضرب الجذرين).

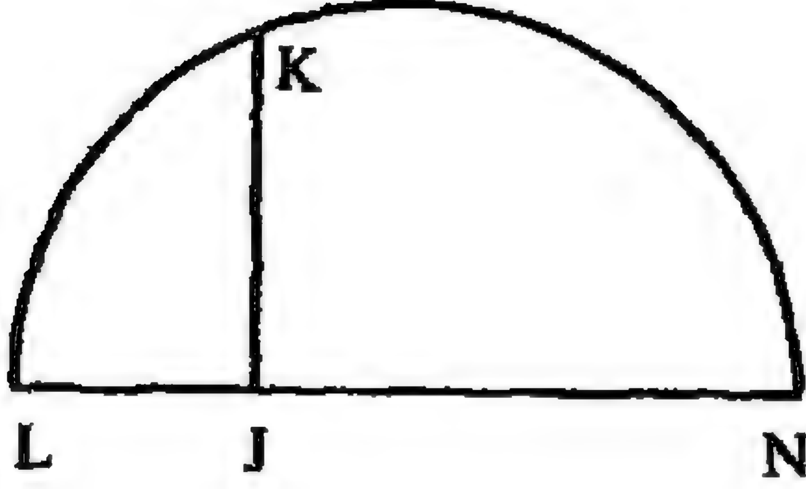
لكن، إذا أخذنا بالاعتبار الشرط: $\frac{7}{4}u < \frac{20}{11}$، نستنتج أن الجذر QS هو الوحيد الذي يناسب هذه المسألة.

لكن، لإنهاء التحليل، يجب أن يكون بالإمكان وضع الخط δ. لذلك، فمن الضروري اعتماد بناء ثانٍ للحصول على قطعة مستقيم ذات طول ℓ بحيث يكون $\ell^2 = \frac{525}{11^2}$. عند ذلك نحصل على ℓ كمتوسط هندسي بين طولين ℓ_1 و ℓ_2 بحيث يكون: $\ell_1 . \ell_2 = \frac{525}{11^2}$؛ ($\ell_1$ و ℓ_2 عددين منطّقين، أي $\ell_1 \in Q$ وَ $\ell_2 \in Q$).

وكان اختيار الطوسي لِـ ℓ_1 وَ ℓ_2 هو التالي:

$$\ell_1 = JL = \frac{7}{4} \quad ; \quad \ell_2 = JN = \frac{300}{121}$$

فنرسم الدائرة ذات القطر LN ونحصل على قطعة المستقيم JK ذات الطول ℓ باستخدام قدرة النقطة J بالنسبة إلى هذه الدائرة.



كان هذا، على ما يبدو لنا، طريق التحليل الذي اتبعه الطوسي. إن هذا التحليل يسمح بأن نفهم أسباب اختياره للقيم العددية الخاصة التي نجدها في تركيب المسألة وللمراحل المتتالية لهذا التركيب. فالواقع أننا تمكنا من إدراك دواعي مختلف البناءات ومن فهم ترتيب تتاليها.

ولا يوجد ما يدعو للاستغراب في ما سبق من تحليل: فالمفاهيم والتقنيات التي استدعاها هي من بين المفاهيم والتقنيات الأولية الموجودة في رسالته عن المعادلات. فبعد أن باشر باتباع طريق تحليل جبري لدراسة المجاهيل x, y, z, t، اعتمد تقنية تردد استخدامها عبر كل الرسالة: رد هذه المجاهيل، بواسطة تحويلات أفينية إلى مجهول واحد u ومن ثم إعطاء الحل الهندسي للمسألة المطروحة عبر ترجمة هندسية لعناصر تحليله الجبري.

وإذا صحت فرضيتنا هذه التي عرضناها في ما تقدم، يكون ما صادفناه، في هذا النوع من مسائل البناء الهندسي بواسطة المسطرة والفرجار المعالج من قبل رياضي جبري، يكون ما صادفناه هذا، عبارة عن ترجمتين متواليتين: ترجمة جبرية لمسألة هندسية، تؤول بالمسألة إلى معادلة جبرية؛ ومن ثم، ترجمة هندسية للمسألة الجبرية، تهدف إلى الجواب عن السؤال الأولي بواسطة بناء هندسي (تقاطع دائرة مع مستقيم).

هذا الفرق المهم بين حل مسائل البناء الهندسي من قبل جبريين ودراسة المسائل نفسها من قبل هندسيين، يعود إلى هذه الترجمة المزدوجة. إنه لا يعبر عن علاقات جديدة بين الجبر والهندسة فقط، بل يجعل أيضاً معنى عبارة «التحليل» أكثر مرونة في النقاش الشهير حول التحليل والتركيب.

الفصل الرابع

النـصـوص

- نص رسالة الطوسي حول «المعادلات (١ ـ ٢٠)»
- نص رسالة الطوسي حول «المعادلات (٢١ ـ ٢٥)»
- نص رسالة «في الخطين اللذين يقربان ولا يلتقيان»
- نـص رسالـة «فـي عـمـل مـسـألـة هـنـدسـيـة»

المعادلات

<I>

ف - ١ - ظ
ل - ٣٥ - ظ

بسم الله الرحمن الرحيم

أما بعد حمد الله تعالى والثناء عليه، والصلاة على رسوله محمد وآله؛ فإني قصدت في هذا الكتاب تلخيص صناعة الجبر والمقابلة وتهذيبَ ما وصل إليّ من كلام الفاضل الفيلسوف الأعظم شرفِ الدين المظفر بن محمد الطوسيّ، وتحويلَ كلامه من إفراط التطويل إلى حد الاعتدال. وأسقطت الجداول التي رسمها في عمل الحساب واستنباط المسائل، لبعده عن الطّبع واستدعائه طولَ الزّمان الموجب للمَلال، وتثبيتَ كيفية استخراج المسائل بالتخت. وجمعت بين العمل والبرهان، وسميته **بالمعادلات**. وأستغيث بالله وحده، وهو حسبنا ونعم المعين.

〈 مقدّمات 〉

لنقدّمْ عليه مقدّمةً تحتوي على أشكال يُحتاج إليها في تقرير المطالب.

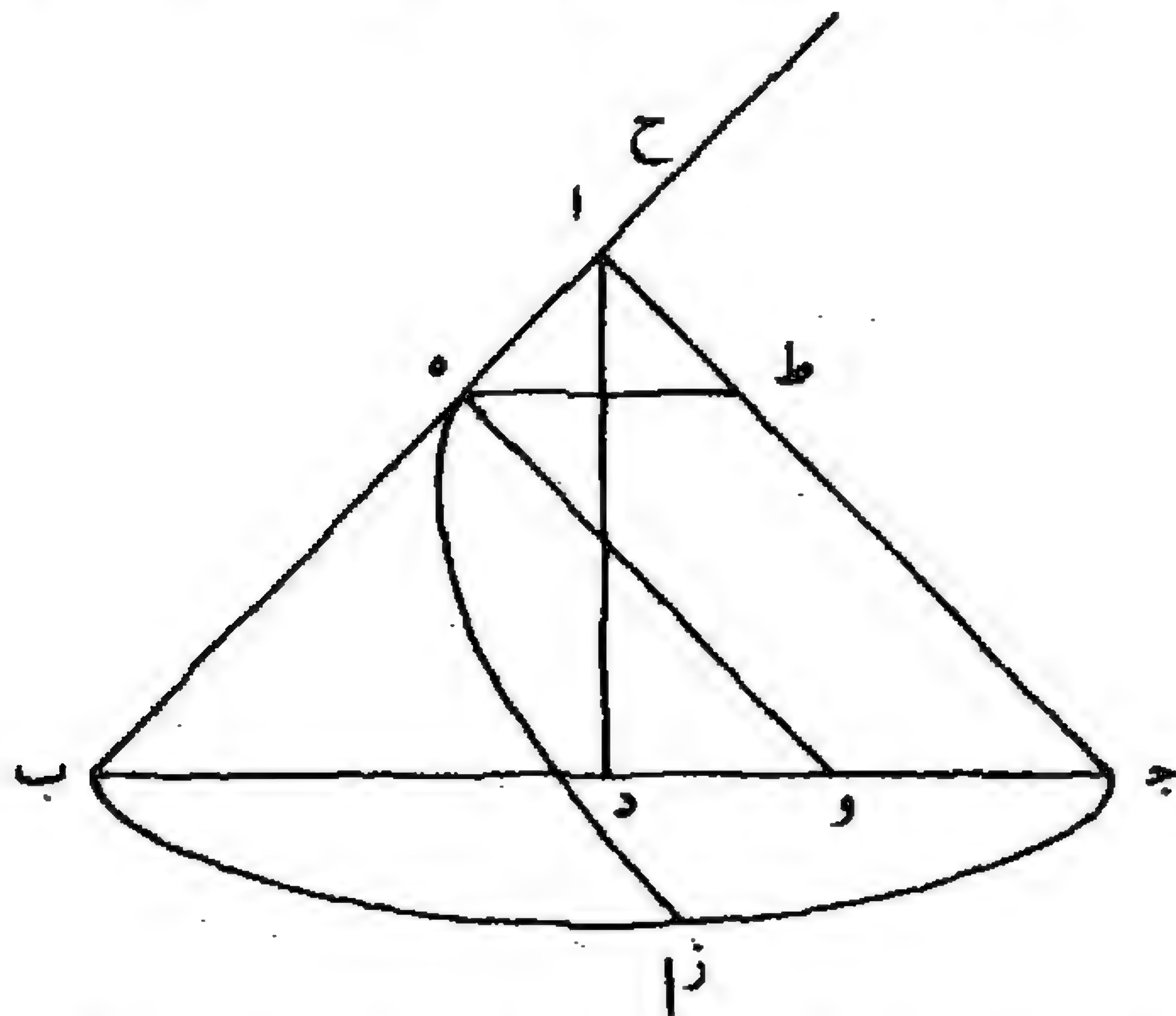
إذا قُطع المخروط بسطحٍ يجوز على سهمه حدَث في المخروط مثلث، ساقاه هما الفصْلان المشتركان بين السطح القاطع وبين بسيط / المخروط؛ (ل - ٣٦ - و) وقاعدته الفصْل المشترك بين هذا السطح القاطع وبين قاعدة المخروط. ثم قُطع بسطح آخرَ يقوم على سطح المثلث على زوايا قائمةٍ، فإن الفصل المشترك بين هذا السطح وبين المخروط يقال له القِطْعُ، والخطّ الذي هو الفصل المشترك بين سطح القِطْع وسطح المثلث يقال له قُطر القِطْع،

6 رسمها: رسمه [ف، ل] – 7 وتثبيت: ويثبت [ف] ويثبته [ل] – 8 بالتخت: بالبحث [ف، ل] – 11 لنقدم: والتقدم [ف] / تحتوى: يحتوى [ف، ل] / يحتاج: محتاج [ف] – 12 حدث: وحدث [ف، ل] – 14 المخروط: ناقصة [ف] – 14-15 ثم قطع: على تقدير «إذا» – 16 هو: ناقصة [ف]

والأعمدة الخارجة من محيط القِطْع إلى القُطر يقال لها خطوط الترتيب، فإن كان قُطر القِطْع موازياً لضلعٍ ‹أو› لآخر من المثلث يسمّى القطعُ مكافئاً، وإن لاقاه من جهة رأس المخروط يسمى زائداً، وإن لاقاه من جهة القاعدة يسمى ناقصاً.

والخطّ المساوي لضعف ما بين رأس القطْع ورأس المخروط من ضلع المثلث المارّ بالسّهم يُسمى ضلعاً قائماً للقطْع المكافئ، والخطّ المتصل بقطْر القطع الزائد على الاستقامة فيما بين القطْع ونقطةِ ملاقاة الضلع الآخر من المثلث يقال له القطرُ المُجانب.

ساقا ا ب ا ج من مثلث ا ب ج متساويان، وزاوية ا منه قائمة، وأُخرج من زاويته القائمة خط ا د إلى منتصف القاعدة حتى صار عموداً عليه، وفرض على خط ا ب نقطةٌ كيف اتفقت، وأُخْرِج منها خطّ موازٍ لخط ا ج وهو هـ و وفُرض على خط هـ و / سطح يمرّ به، ويقوم على ل - ٣٦ - سطح المثلث على زوايا قائمة، وتوهّمنا حركة مثلث ا د ج مع ثبات ا د حتى طابقَ مثلث ا د ب فيحدث نصف مخروط، ويرسم د ج نصف دائرة، ويرسم السطح المارّ بخط هـ و قطْعاً مكافئاً رأسهُ عند نقطة هـ وسهمه هـ و.



1 الخارجة: الخالطة [ف، ل] – 2 لضلع: للضلع [ف، ل] / لآخر: لا اخر [ف]، لا اخير [ل] – 5 لضعف: بضعف [ف، ل] – 6 المكافىء: المكافى [ل] – 10 منتصف: متصف [ف] – 11 وفرض: فرض [ل] / مواز: موازيا [ف] – 14 ويرسم: ونرسم [ف، ل] – 14-15 دج ... ويرسم: ناقصة [ل] – 15 المار: الماو [ل] / هـ و: هـ ر، الزاي مهملة في المخطوطتين [ف، ل]، ولن نشير إلى هذا فيما بعد / رأسه: راسة [ل]

فأقول: إن ضرب ضلعه القائم – وهو ضعف ا هـ وليكن هـ ح – في الخط الذي يفصله خط الترتيب من القطر مما يلي رأس القطع مثلُ مربع خط الترتيب.

لأنّا نخرج من نقطة ز عموداً في سطح القطع على خط هـ و، فيكون عموداً على سطح المثلث، فهو عمود على قطر القاعدة، فيكون هو بعينه هو الفصل المشترك بين سطح القطع وقاعدة المخروط، وإلا فلنُخرج من نقطة ز عموداً في سطح القاعدة على قطرها، فيخرج من نقطة واحدة عمودان على قطر القاعدة؛ هذا خلف. فالعمود هو الفصل المشترك. فضربُ جـ و في ب و مثل مربع العمود، فنُخرج من نقطة هـ خطاً موازياً لخط ب جـ وهو هـ ط، فيكون هـ ط مثل و جـ، فضرب هـ ط في ب و مثلُ مربع العمود، ولأن زاوية ب هـ و مثل هـ ا ط فهي قائمة، وزاوية ب نصف قائمة، يبقى زاوية ب وهـ نصف قائمة فـ ب هـ مثل هـ و ومربع ب و مثل مربعي ب هـ و هـ فهو ضعف مربع هـ و. / ولأن زاوية ب مثل ا هـ ط ل – ٣٧ – و وزاوية جـ مثل ا ط هـ، فـ ا هـ مثل ا ط، ومربع هـ ط مثل مربعي ا هـ ا ط، فهو ضعف مربع ا هـ، ومربع هـ ح أربعة أمثال مربع ا هـ، فمربع هـ ح ضعف مربع هـ ط، فنسبة مربع هـ ح إلى مربع هـ ط كنسبة مربع ب و إلى مربع هـ و، فنسبة هـ ح إلى هـ ط كنسبة ب و إلى هـ و. فضرب هـ ح في هـ و مثل ضرب هـ ط في ب و / الذي هو مثل مربع ف – ٢ – و العمود، وهو خط الترتيب، فضرب الضلع القائم في الخطّ الذي يفصله

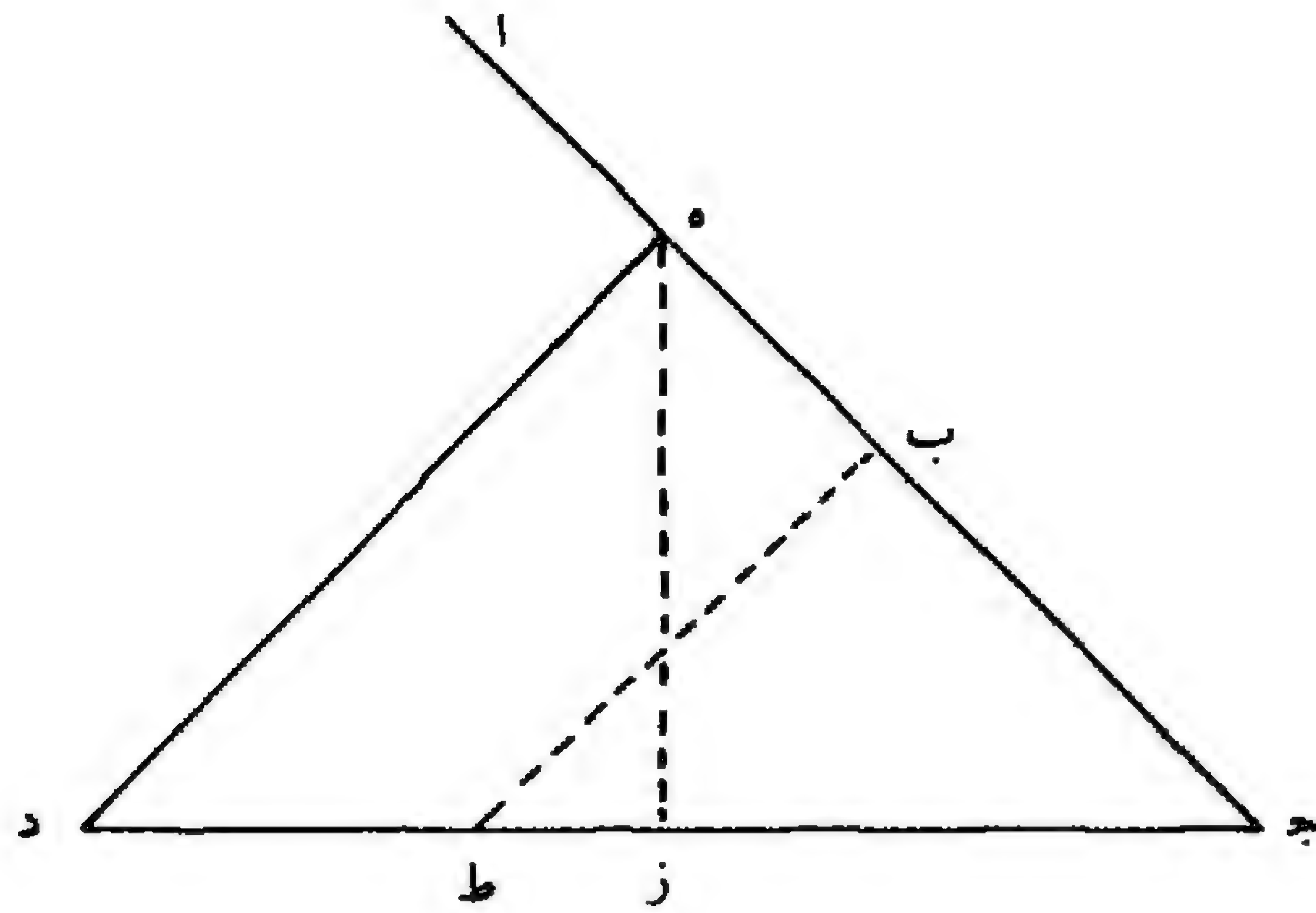
1 وليكن: وليكون [ف] / هـ ح: هـ ج. يكتب ناسخ ف في أغلب الأحيان الحاء جيماً، ولن نشير إلى هذا فيما بعد – 2 يفصله: يفضله [ف] – 4 نخرج: يخرج [ل] / هـ و: هـ ر [ف، ل] – 6 فلنخرج: فليخرج [ل] – 8 جـ و: جـ ر [ف، ل] – 9 ب و: ب ر [ف، ل] / فنخرج: فيخرج [ف، ل] – 10 ب و: ب ر [ف، ل] – 11 زاوية: ناقصة [ل] – 12 ب هـ: ب ا هـ [ف، ل] / هـ و: هـ ر [ف، ل] – 13 و هـ: ر هـ [ف، ل] – 14 ا ط هـ: ا ط [ل] – 16 هـ ط: هـ ا [ل] – 17 ب و: ممحوة [ل] / هـ و: هـ ر [ف، ل] / ب و: ب ر [ف، ل] / هـ و: هـ ر [ف، ل] – 18 ب و: بر [ل] – 19 يفصله: يفضله [ف]

خط الترتيب من القطر مما يلي رأس القطع مثلُ مربع خط الترتيب. وتبيّن أن كلّ نقطة تُفرض على قُطر القطْع فإنه يخرج منها عمودٌ ينتهي إلى محيط القطْع، ويكون خطّ ترتيب له؛ وذلك ما أردنا بيانَه.

نريد أن نجد قِطْعاً مكافئاً ضلعه القائم خط مفروض هو ا ب.

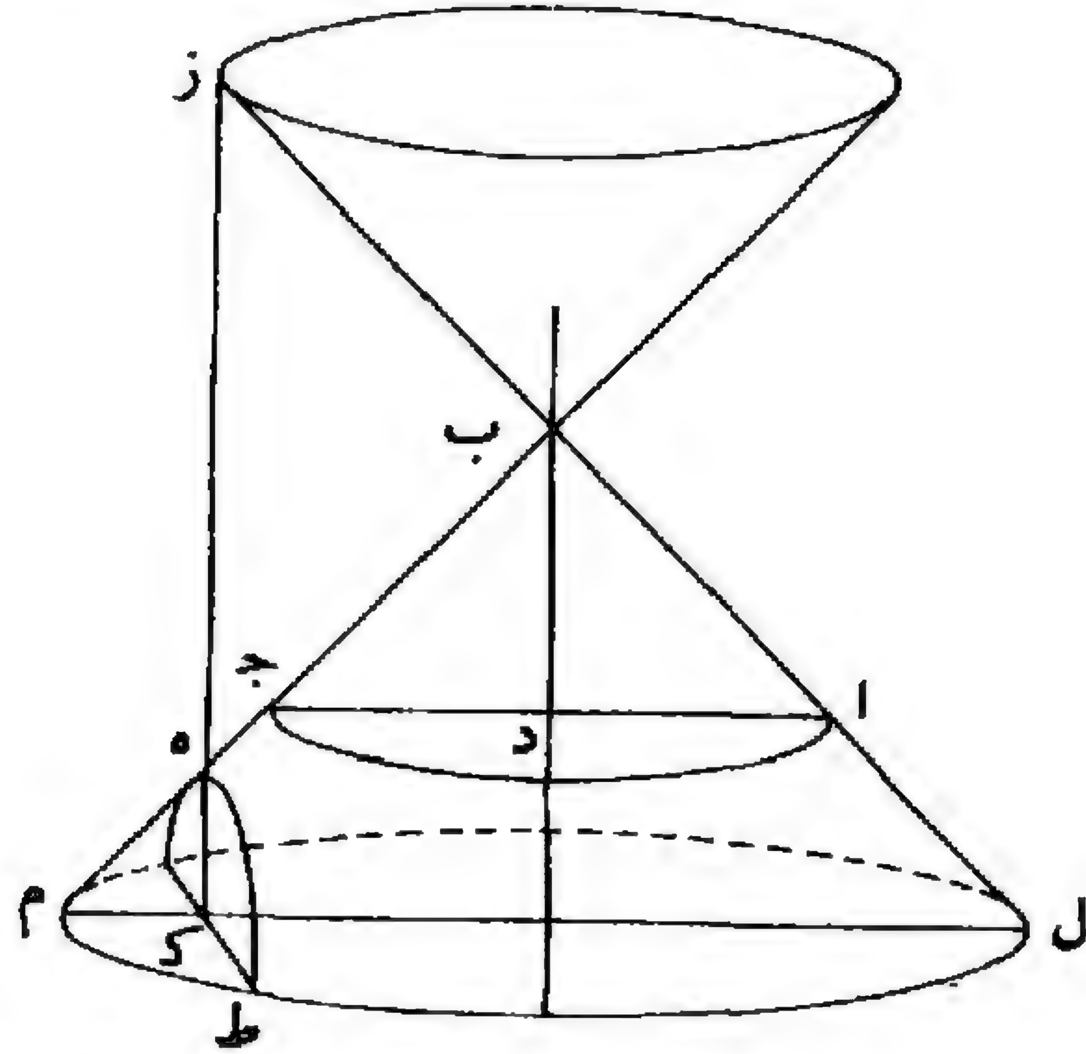
فنقسم ا ب بنصفين على نقطة ه، ونخرج من نقطة ه خط ه د عموداً على ا ب ونخرج ا ب بالاستقامة، ونفصل ه ج مثل ه د ونصل ج د، وننصفه على نقطة ز ونصل ه ز فهو عمود على ج د، ونخرج من نقطة ب خطاً موازياً لخط ه د وهو ب ط ويتوهم حركة مثلث ه د ز مع ثبات / ه ز حتى يطابق مثلث ه ز ج، فيحدث نصف مخروط ويرسم خطٌّ ل - ٣٧ - ظ ز د نصفَ دائرة، ونتوهم سطحاً يمر بخط ب ط ويقوم على سطح المثلث على زوايا قائمة، فيرسم في بسيط المخروط قطْعاً مكافئاً ضلعه القائم خطّ ا ب المفروض؛ وذلك ما أردنا بيانَه.

ساقا ا ب ب ج من مثلث ا ب ج متساويان، وزاوية ا ب ج منه



1 وتبين: ونبين [ف، ل] – 2 أن: أنى [ف، ل] / تفرض: نفرض [ف، ل] / يخرج: تخرج [ل] – 4 قطعا: قطعتا [ف] – 5 فنقسم: فيقسم [ف] – 7 وننصفه: وينصفه [ف] / ج د: الجيم غير واضحة [ل] – 8 موازيا: يوازنا [ل] / ب ط: ب ط ه [ف، ل] / ه د ز: ر د [ف، ل] – 9 ه ز: ه و [ل] / يطابق: تطابق [ف] – 10 ز د: ري [ل] / ونتوهم: ويتوهم [ف، ل] / ب ط: ر ط [ف، ل] – 11 فيرسم: فنرسم [ف]، فبرسم (كذا) [ل]

قائمة، وأخرج من نقطة ب خطٌّ إلى منتصف خط ا ج وهو ب د، فـ ب د عمود على ا ج، والداخلتان فيما بين خط ا ج وكلّ خط موازٍ له مثلُ قائمتين، وكلّ خطٍّ يوازي ا ج فهو عمود على ب د. وإذا توهمنا حركة مثلث ب د ج مع ثبات ب د حتى طابق ا د ب فإنه يرسم بحركته نصف مخروط، وخط د ج يرسم بحركته نصف دائرة، وكل خطّ موازٍ له فإنه يرسم بحركته نصف دائرة سطحها قائم على سطح المثلث على زوايا قائمة، وإذا أخرج خط ب ج على الاستقامة إلى نقطة هـ وأخرج من نقطة هـ خط هـ ز موازياً لـ ب د فزاوية م ب د مثل زاوية هـ، و م ب د أقل من قائمة، فزاوية هـ أقل من قائمة، وزاوية هـ ب ز قائمة، فالداخلتان فيما بين خطي هـ ز ب ز أقلُّ من قائمتين. فإذا أخرج مثلث ا ب ج / والمخروطُ إلى غير النهاية، فإن الخطّ الخارج من نقطة هـ إذا أخرج أيضاً ل – ٣٨ – و إلى غير النهاية فإنه يلقى ا ب وليكن على ز، ويقطع قاعدته، وليكن على ك وتوهمنا سطحاً يمرّ بخط هـ ك ز ويقوم على سطح المثلث على زوايا قائمة فإنه يحدث في المخروط قطعاً زائداً قطره خط ز ك ومجانبُه ز هـ ومحيطه هـ ط.



2 وكل خط: خط ناقصة [ل] – 5 يرسم: نرسم [ف] – 6 نصف: ممحوة [ف] – 7 أخرج: خرج [ل] – 8 هـ: هـ ر [ل] / خط هـ ز: ناقصة [ل] / هـ، و م ب د: هـ و م ب د [ف] 11 والمخروط: ووالمخروط [ل] – 12 النهاية: النهايت، كثيراً ما يكتب ناسخ ف التاء المربوطة مفتوحة، ولن نشير لهذا مرة أخرى – 13 ك: ج [ف] ح [ل] / هـ ك ز: هـ ر ج [ف، ل] – 14 ز ك: ر ح [ف، ل]، المقصود أن القطر يقع على ز ك – 15 هـ ط: ر س [ف، ل]

فأقول: إنّ ضرب المجانب مع الخط الذي يفصله خط الترتيب من القطر مما يلي رأس القطْع في الخط المفصول مساوٍ لمربع خط الترتيب.

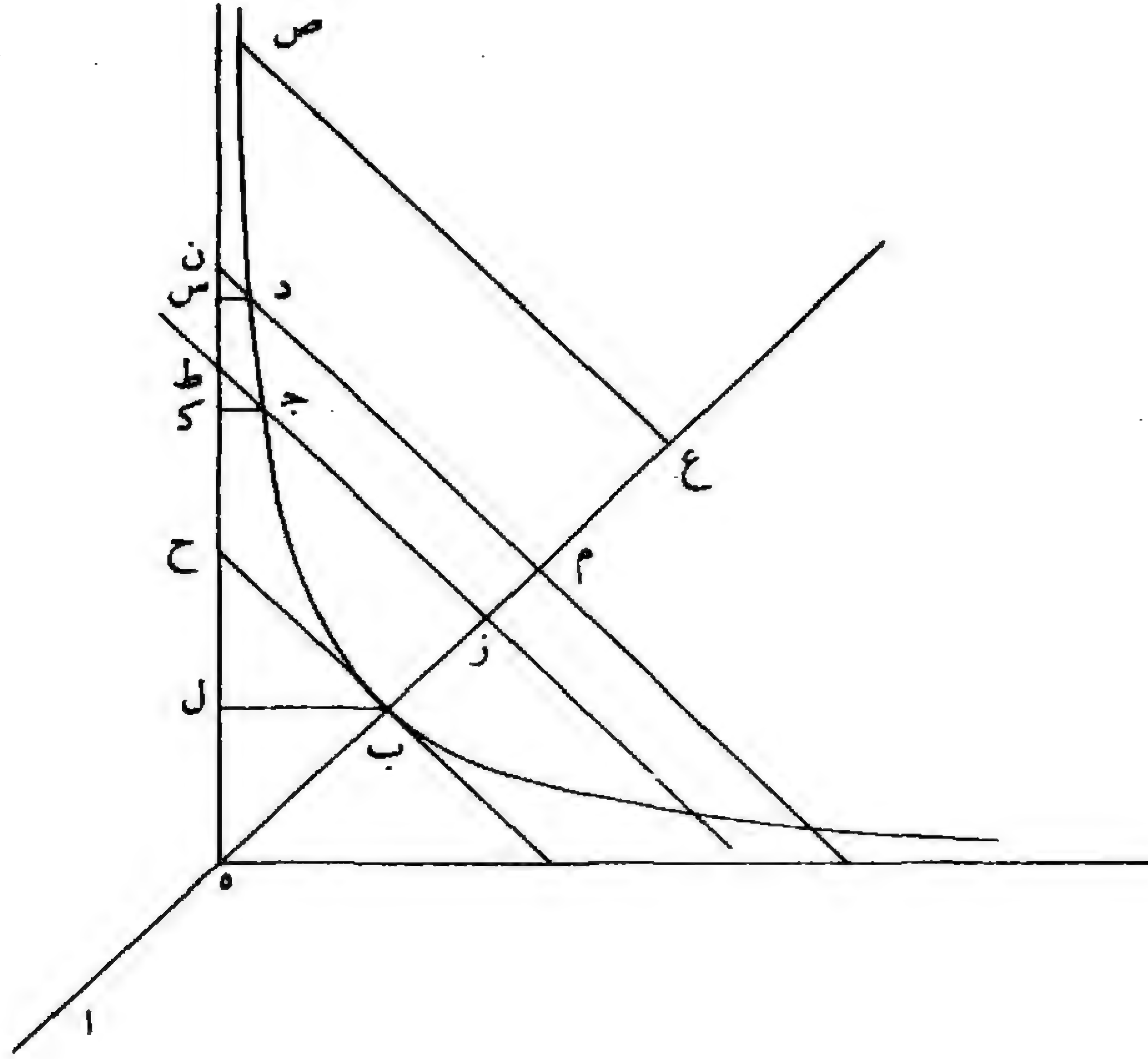
لأنّا نُخرج من محيط القطْع من نقطة ط عموداً أعني خطّ ترتيب إلى قطر القطْع، وليكن ط ك، ونخرج من موقعه خطاً موازياً لخط ا ج، وهو خط ل ك م، ونتوهم سطحاً يمرّ بخط ل ك م، ويقوم على سطح المثلث على زوايا قائمة. فهذا السطح يُحدث في المخروط دائرة، لأن خط ل ك م عمود على ب د، وكلّ خط موازٍ لـ د ج يرسم بحركته نصف دائرة، ويكون عمود ط ك بعينه هو الفصل المشترك بين السطح القاطع وسطح هذه الدائرة لما مرّ في الشكل المتقدم، ولأن زاوية هـ ك م قائمة، وزاوية هـ م ك نصف قائمة، تبقى زاوية م هـ ك نصف قائمة، فخط هـ ك مثل / ك م، وزاوية ز ك ل قائمة وزاوية ز ل ك نصف قائمة، فزاوية ل ز ك نصف قائمة، فـ ز ك مثل ك ل، ولأن ضرب م ك في ك ل مثل مربع ك ط، و ك م مثل ك هـ، و ل ك مثل ك ز، فضرب هـ ك في ك ز مثل مربع ك ط، وهو خط الترتيب. ولأن سطح القطْع قائم على سطح مثلث ا ب ج على زوايا قائمة، وكلّ نقطة تفرض على قطر القطْع فإنه يخرج منها إلى محيط القطْع عمودٌ، ويكون خطَّ ترتيب له؛ وذلك ما أردنا بيانَه.

ل - ٣٨ - ظ

خط ب ج محيط قطع زائد، قطره ا م ومجانبه ا ب ومنتصف المُجانب نقطةُ هـ، وأخرجنا من نقطة ب - وهي رأس القطع - عموداً

1 يفصله: بفضله [ف] - 5 ونتوهم: ويتوهم [ف، ل] - 6 ل ك م: م س [ف، ل] - 9 هذه: فوق السطر [ل] / هـ ك م: ك م [ف، ل] - 10 تبق: يبق [ف] / م هـ ك: هـ ك م [ف، ل] - 14 الترتيب: التي يب [ل] - 15 تفرض: يفرض [ف] - 16 يخرج: تخرج [ف] - 18 ومنتصف: وننصف [ل]

على ا ب، وفصلنا منه مثل ب ه وهو ب ح، ووصلنا ه ح وأخرجناه على استقامة بغير نهاية، وأخرجنا محيط / القطع بغير نهاية. ف – ٢ – ظ



فأقول: إن هذا الخطّ المستقيم يقرب أبداً من محيط القطْع ولا يلقاه. لأنّا نفرض على محيط القطع نقطة ج، ونخرج منها عموداً على القطر وليكن ج ز، ونخرجه على الاستقامة، فلأن زاوية ب من مثلث ه ب ح قائمة، وزاويتي ه ح متساويتان، فكلٌّ واحدة منهما نصف قائمة، وزاوية

1 وأخرجناه: وأخرجنا ه [ف]، وأخرجنا [ل] – 4 القطع: ناقصة [ف] – 5 ه ب ح: ا ب ح [ف، ل] – 6 فكل: وكل [ف] / واحدة: واحد [ف، ل]

هـ ز جـ قائمة فعمود جـ ز / (ل - ٣٩ - و) يلقى الخط المستقيم، وليكن على نقطة ط ، ونخرج من نقطة جـ عموداً على الخط المستقيم وهو جـ ك، ونخرج من نقطة ب أيضاً عموداً على الخط المستقيم وهو عمود ب ل، فلأن زاوية ب هـ ل نصف قائمة، وزاوية هـ ز ط قائمة، تبقى زاوية ز ط هـ نصف قائمة، فـ ز ط مثل ز هـ ، فخط هـ ز ط إذا فُرض خطاً مستقيماً فقد قُسم بقسمين متساويين على ز ومختلفين على جـ ، فضرب هـ ز جـ في جـ ط مع مربع ز جـ مثلُ مربع ز ط، أعني مربع ز هـ ، و ا ب قد قُسم بنصفين على نقطة هـ وزيد فيه خط ب ز، فضرب ا ز في ب ز مع مربع هـ ب مثلُ مربع هـ ز، فضرب ا ز في ب ز مع مربع هـ ب مثلُ ضرب هـ ز جـ في جـ ط مع مربع ز جـ. لكن ضرب ا ز في ب ز مثل مربع ز جـ، لكونه خطَّ الترتيب، فيبقى مربع هـ ب مثل ضرب هـ ز جـ في جـ ط ، فنسبة هـ ز جـ إلى هـ ب كنسبة هـ ب إلى جـ ط ، وهـ ز جـ أعظم من هـ ب ، فـ هـ ب أعظم من جـ ط ، ولأن زاوية هـ نصف قائمة وهـ ل ب قائمة يبقى هـ ب ل نصف قائمة. فخطّ هـ ل مثل ب ل، فمربع هـ ب مثل مربعي هـ ل ل ب ، فهو ضعف مربع ب ل، ولأن زاوية ط نصف قائمة و جـ ك ط قائمة، يبقى ط جـ ك / (ل - ٣٩ - ظ) نصف قائمة، فـ جـ ك مثل ك ط ، فمربع جـ ط مثل مربعي جـ ك ك ط ، فهو ضعف مربع جـ ك، فضعف مربع ب ل أعظم من ضعف مربع جـ ك، فنصفه – وهو مربع ب ل – أعظم من نصفه وهو مربع جـ ك، فخط ب ل أعظم من جـ ك. وكذلك لو فرضنا على محيط القطع نقطة د ، وأخرجنا منها عموداً

1 نقطة: ناقصة [ف] – 4 تبقى: يبقى [ف] – 9 هـ ز: هـ و [ل] – 10 ز جـ: و هـ [ل] – 11 لكونه: لكن نه [ف] – 13 هـ ل ب: هـ ل ر [ل]

على القطر وهو د م ، وأخرجناه على الاستقامة حتى يلقى الخط المستقيم على نقطة ن ، وأخرجنا من نقطة د عموداً على الخط المستقيم وهو س د فإنا نبيّن كما بيّنا أن جـ ك أعظم من د س. فقد بان أن الخطين يتقاربان أبداً.

وأقول: إنهما لا يلتقيان، وإلا فليلتقيا على نقطة ص فنخرج منها عمود ص ع ، فلأن خط ص ع مثل ع ه لما مرّ آنفاً، فضرب ا ع في ع ب مثل مربع ع ص لكونه خط الترتيب، أعني مربع ع ه ، أعني ضرب ا ع في ع ب مع مربع ه ب ، فضرب ا ع في ع ب مع مربع ه ب مثل ضرب ا ع في ع ب ، هذا خُلْف. فالخطان لايلتقيان.

وأقول أيضاً: إن ضرب ه س في س د مثل مربع ه ل.

لأن خط ه م مثل م ن لما مرّ آنفاً، فمربع ه م ن إذا فُرض خطاً مستقيماً / فهو أربعة أمثال مربع ه م. ومربع ه ن مثل مربعي ه م ل - ٤٠ - و م ن ، فمربع ه م ن مثل ضعف مربع ه ن ، ومربع د س ن – إذا فرض خطاً مستقيماً – مثلُ ضعف مربع د ن ، لهذا بعينه، فنسبة مربع ه م ن إلى مربع ه ن كنسبة مربع د س ن إلى مربع د ن. فنسبة ه م ن إلى ه ن كنسبة د س ن إلى د ن. فضرب ه م ن في د ن مثل ضرب ه ن في د س ن، لكن ضرب ه م ن في د ن مثل ضرب ه م د في د ن مع مربع د ن ، وضرب ه ن في د س ن مثل ضرب ه س في د س ن مع ضرب س ن في د س ن. فضرب ه م د في د ن مع مربع د ن مثل ضرب ه س في د س ن مع ضرب س ن في

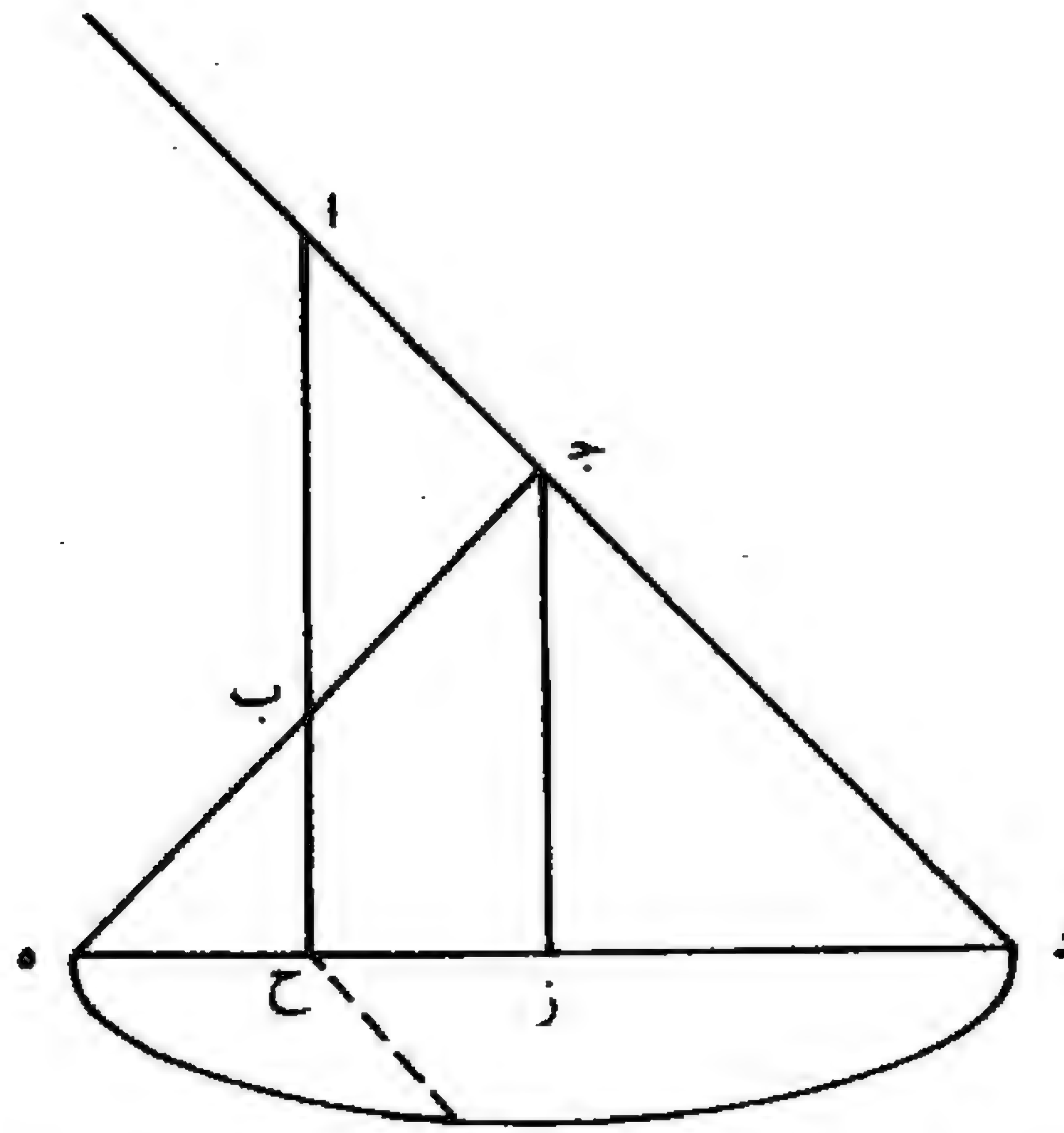
1 وأخرجناه: وأخرجنا [ل] – 2 نَ: ب [ف]، قد تقرأ بد أو به [ل] – 4 يلتقيان: يلقيان [ف] / فنخرج: فيخرج [ف] – 5 ع ب: ع ت [ل] – 8 يلتقيان: يلقيان [ف] – 11 مربعي: مربع [ل]

د س ن. لكن ضرب س ن في د س ن مثل مربع د ن، يبقى ضرب هـ س في د س ن مثل ضرب هـ م د في د ن، لكن ضرب هـ م د في د ن / مثل مربع هـ ب كما مرّ آنفاً. فضرب هـ س في د س ن مثل مربع هـ ب، فضرب هـ س في نصف د س ن – وهو د س – مثل نصف مربع هـ ب أعني مربع هـ ل، وهكذا نبيّن أن ضرب هـ ك في ك ج مثل مربع هـ ل، فيكون ضرب هـ س في د س مثل ضرب هـ ك في ك ج؛ وذلك ما أردنا بيانَه. ف – ٣ – و

نريد أن نعمل قطْعاً زائداً / مجانبه خط مفروض وهو خط ا ب. ل – ٤٠ – ظ

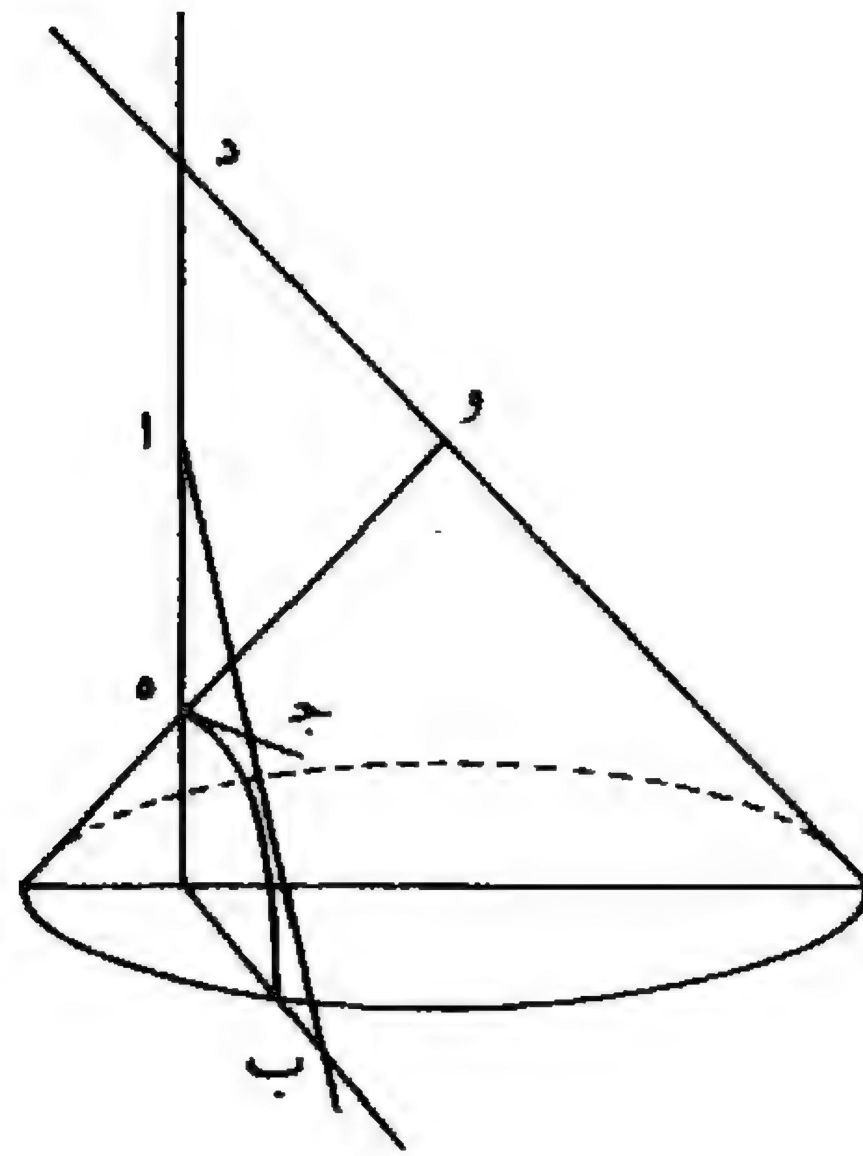
فنعمل عليه مثلثاً متساوي الساقين قائم الزاوية، بأن نعمل كلّ واحدة من زاويتي ا ب مثل نصف قائمة. فخطّا ا ج ب ج يلتقيان، وليكن على نقطة ج، وكلّ واحدة من زاويتي ا ب نصف قائمة، فزاوية ج قائمة وا ج ج ب متساويان، فمثلّث ا ب ج متساوي الساقين قائمُ الزاوية. ونُخرج ا ج ج ب على الاستقامة، ويُفْصل ج د ج هـ متساويين، ونصل د هـ، ونخرج ا ب على الاستقامة حتى يلقى د هـ وليكن على نقطة ح، ونُخرج من نقطة ج خطاً إلى منتصف د هـ فيكون عموداً عليه، فـ ا ح يوازي ج ز. ويُتوهّم حركة مثلث ج ز هـ مع ثبات ج ز حتى يُطابق مثلث ج د ز، فيرسم ‹ نصف › مخروط قاعدته نصف دائرة يرسمها هـ ز، ونتوهم سطحاً يمرّ بخط ا ب ح قائماً على سطح المثلث على زوايا قائمة، فيحدث في المخروط قطع زائد رأسه نقطة ب – ومجانبه ا ب المفروض؛ وذلك ما أردنا بيانه.

1 د س ن (الأولى والثانية): د س هـ ن [ف، ل] – 2 د س ن: د س هـ ن [ف، ل] – 2-3 لكن ضرب ... د ن: ناقصة [ل] – 3 آنفاً: أيضا [ل] – 5 نبين: يبين [ف] – 15 ونخرج: ويخرج [ل] – 16 يطابق: تطابق [ف، ل] – 17 فيرسم: فترسم [ف، ل] / مخروط: مخروطا [ف، ل] / يرسمها: ترسمها [ف] / ونتوهم: ويتوهم [ف]



نريد أن نجد قطعاً زائداً لايقع عليه خط ا ب ويكون مُجانبه مثل خط مفروض وهو خط م.

فنعمل على نقطة ا / من خط ا ب زاوية ه ا ب مثل نصف قائمة، ل - ٤١ - و ونخرج خط ا ه من الجهتين ونفصل منه ا د ا ه، كلٌ واحد منهما مثل ‹ نصف › خط م، ونخرج من نقطة ه عموداً على ا ه وهو ه ج.

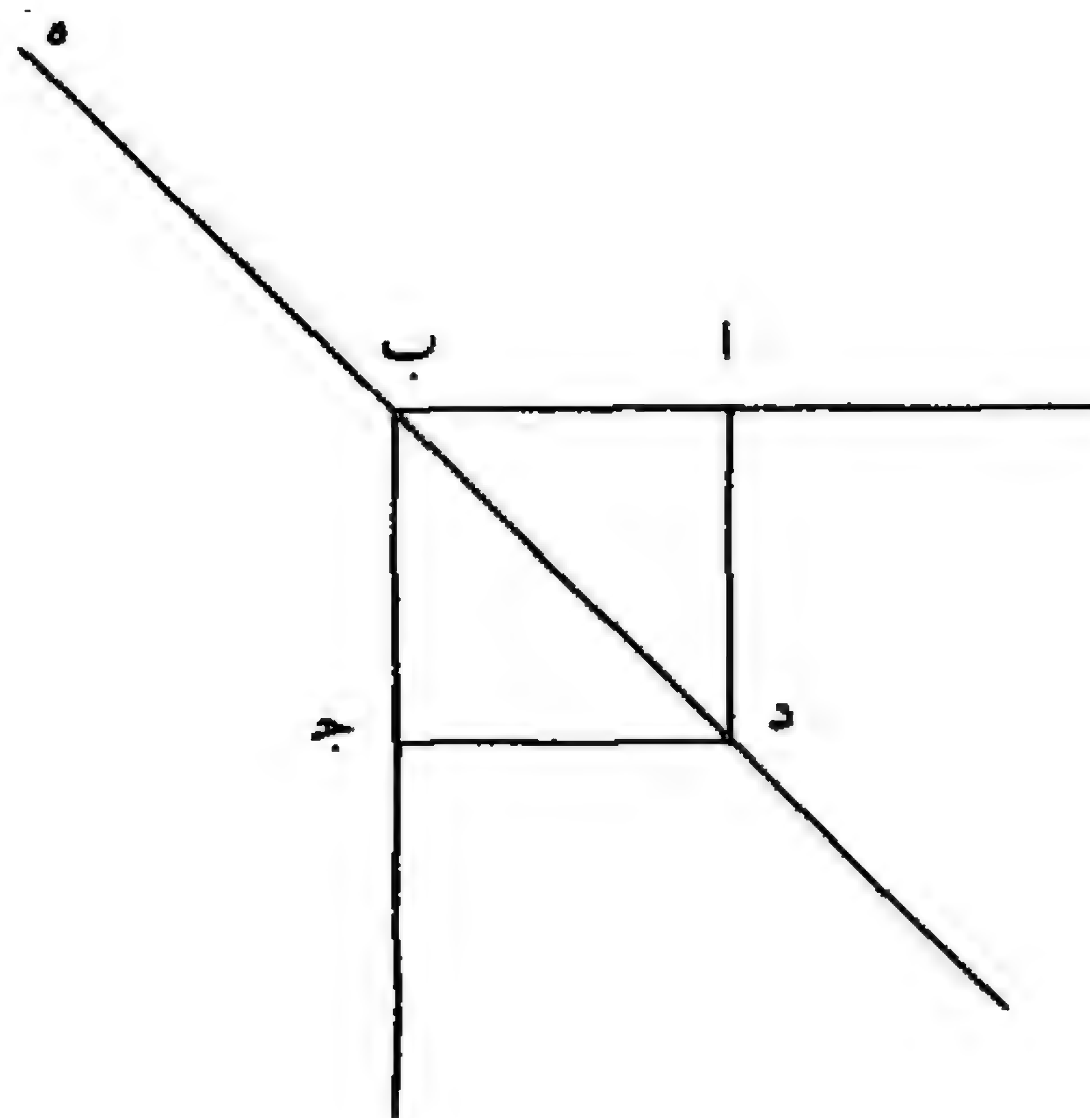




4 ونفصل: ويفصل [ل]

فلأن زاوية آ نصف قائمة، وزاوية ا هـ ج قائمة، يبقى زاوية ج نصف قائمة فـ ا هـ مثل هـ ج، ونعمل على د هـ مثلث د هـ و متساوي الساقين قائم الزاوية بالطريق الذي مرّ ونتمم العمل السابق، فيحصل قطع زائد، رأسه نقطة هـ ومُجانبُه هـ د. فلأن هـ ج عمود على ا د، ووصلنا ا ج، فمحيط القطع لا يلقى ا ب؛ وذلك ما أردنا بيانه.

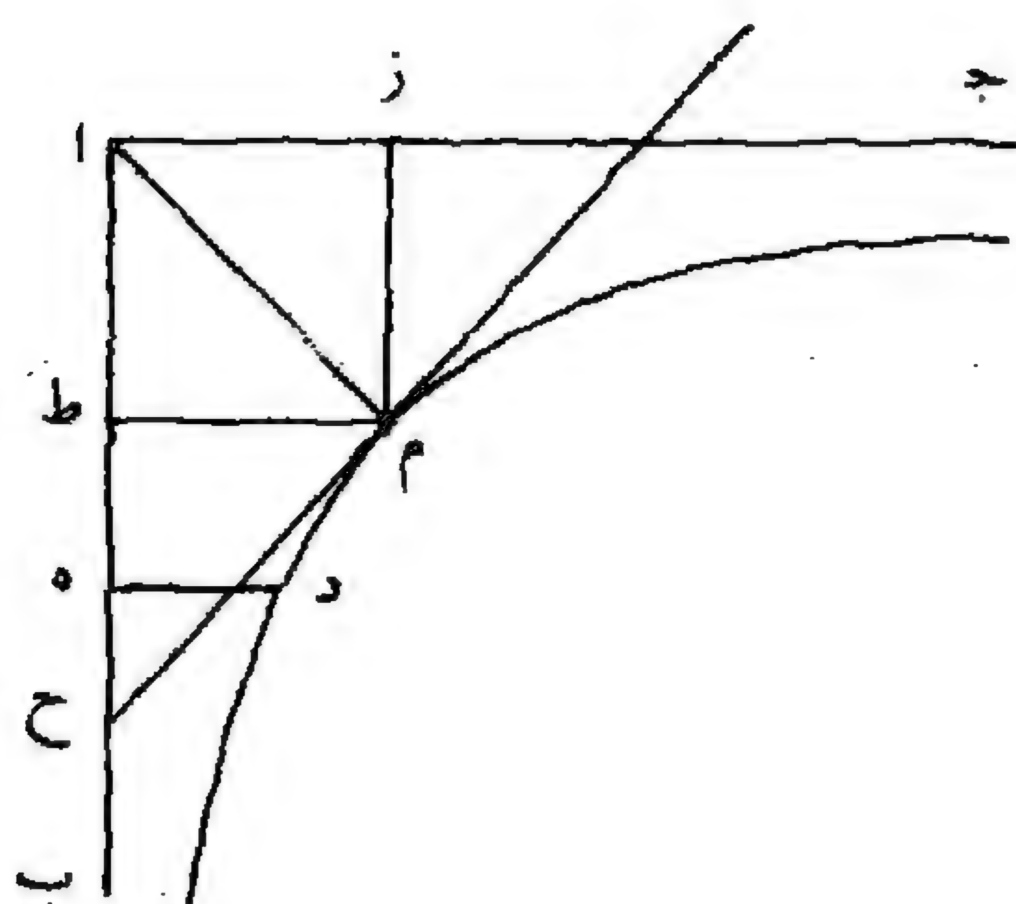
نريد أن نجد قطعاً زائداً لا يقع عليه خطّا ا ب ب ج، اللذان هما ضلعا مربع ا ب ج د، ويكون رأسه عند نقطة د.



2 د هـ و: د هـ ر [ف] – 3 ونتمم: ويتمم [ف] – 4 ا د: ا هـ [ف، ل] – 6 يقع: تقع [ل] – 7 د: ممحوة [ف]

فنخرج ب د على الاستقامة ونجعل ب ه مثل ب د ، ونعمل قطعاً زائداً مجانبه د ه ورأسه نقطه د بالعمل السابق، فلا يقع عليه خطا ا ب ب ج ؛ وذلك ما أردنا بيانه.

خطا ا ب ا ج محيطان بزاوية ب ا ج القائمة، ونقطة د مفروضة فيما بينهما وهي أقرب إلى ا ب ، فنريد أن نعمل قطعاً زائداً يمرّ محيطه بنقطة د ، ويكون منتصف مُجانبه ا ، ولا يقع عليه خطّا ا ب ا ج ، ويقاربان / محيط القطع أبداً. ل - ٤١ - ظ



2 مجانبه: مجانبة [ل] / السابق: للسابق [ل] – 6 مجانبه: مجانبة [ل]

فنخرج منها عموداً على أقرب الخطين إليها، وهو خط ا ب وليكن هو عمود د هـ، ونعمل مربعاً مثل ضرب ا هـ في هـ د، ونفصل ا ز مثل ضلع ذلك المربع، ونتمّم مربع ا ط م ز فهو مثل ضرب ا هـ في هـ د، ونعمل ‹قطعاً› زائداً رأسه نقطة م ومتصف مجانبه نقطة ا ولا يقع عليه خطّا ا ب ا ج فيمرّ محيطه بنقطة د، وإلّا لكان مربع ا ز مثل ضرب ا هـ في أطولَ من هـ د أو في أقصرَ منه، وهذا خُلف. فمحيط القطع يمرّ بنقطة د، ولأنّا نُخرج من نقطة م عموداً على قطر القطْع ونفصل منه م ح مثل م ا، فـ ا ب يقارب محيط القطْع أبداً، وأما أن ا ج يقارب محيط القطْع فلهذا بعينه؛ وذلك ما أردناه.

‹تصنيف المعادلات›

وإذا تقررت هذه المقدمات فاعلم أن الواحد الخطيّ هو خطٌّ ما مفروضٌ تُنسب إليه سائر الخطوط، والواحد السطحيّ هو مربعُ الواحد الخطيّ، والواحد / الجسميّ مجسّمٌ قاعدتُه الواحدُ السطحيّ وارتفاعه ف - ٣ - ظ
الواحدُ الخطيّ. والعدد في كل مرتبة أمثالُ الواحد في تلك المرتبة؛ والجذرُ الخطيّ هو ضلعُ مربع ما مُنْطَقاً كان أو أصمَّ؛ والجذرُ السطحيّ للمربّع هو سطحٌ طوله الجذْر الخطيّ وعرضه / واحدٌ خطيّ، والمربع يسمى مالاً ل - ٤٢ - و

1 فنخرج: فيخرج [ف] – 2 ونفصل: ويفصل [ل] – 3 ونتمم: ويتمم [ل] / ا ط م ز: ا ط م [ف، ل] – 4 ومتصف: وتنصف [ل] – 7 ونفصل: ويفصل [ل] – 8 يقارب: تقارب [ف]، تفاوت [ل] / يقارب: تقارب [ف، ل] – 12 تنسب: ينسب [ف] – 12-13 هو مربع ... الخطي: ناقصة [ل]

سطحياً. والمال المجسم هو مجسمٌ قاعدته المال السطحيّ، وارتفاعه واحدٌ خطيّ؛ والجذر الجسميّ لهذا المال هو مجسّمٌ قاعدتُه الجذرُ السطحيّ، وارتفاعه واحدٌ خطيّ. ويتولد من المعادلة بين الأعداد والجذور والأموال والمكعبات خمس وعشرون مسألة وهي هذه:

جذرٌ يعدِل عدداً، مالٌ يَعدل عدداً، مالٌ يعدل جذوراً، مُكعبٌ يعدل أموالاً، مُكعب يعدل جذوراً، مُكعبٌ يعدل عدداً، مالٌ وجذورٌ يعدل عدداً، جذورٌ وعددٌ يعدل مالاً، مالٌ وعددٌ يعدل جذوراً، مُكعبٌ وأموالٌ يعدل جذوراً، أموالٌ وجذورٌ يعدل مُكعباً، مكعبٌ وجذورٌ يعدل أموالاً، مكعبٌ وجذورٌ يعدل عدداً، مكعبٌ وعددٌ يعدل جذوراً، عددٌ وجذورٌ يعدل مكعباً، مُكعبٌ وأموالٌ يعدل عدداً، مكعبٌ وعددٌ يعدل أموالاً، عددٌ وأموالٌ يعدل مكعباً، مكعبٌ وأموال وجذورٌ يعدل عدداً، عدد وجذور وأموال يعدل مكعباً، مكعبٌ وعدد وجذور يعدل أموالاً، مكعب وأموالٌ وعددٌ يعدل جذوراً، عدد ومكعب يعدل / جذوراً ل – ٤٢ – ظ وأموالا، مكعبٌ وأموال يعدل جذوراً وعدداً، مكعب وجذور يعدل أموالاً وعدداً، فالست الأولى مفردة، والبواقي مقترنة.

أما المفردة:

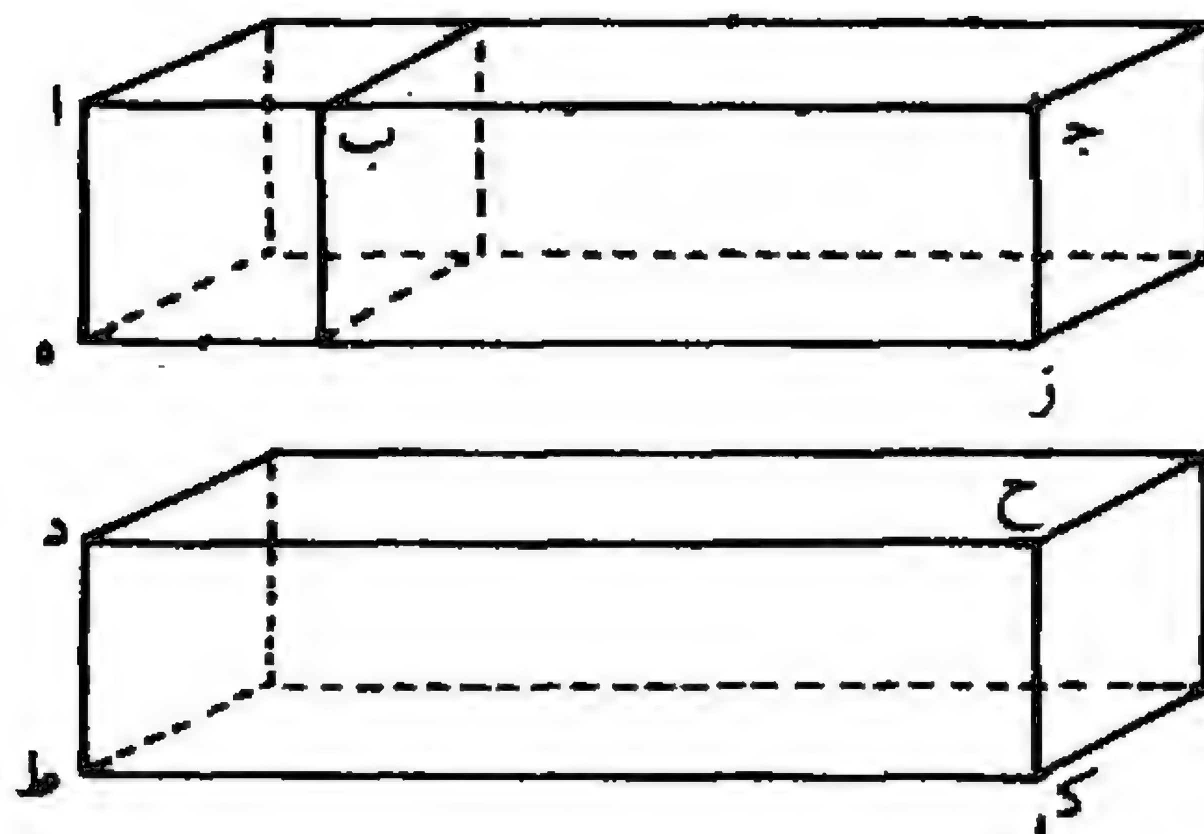
3 المعادلة: المقاولة [ل] – 4 خمس: خمسة [ف، ل] / مسألة: مسله [ف، ل]. ولن نشير لها مرة أخرى – 6 أموالا: أحوالا [ل] / مكعب يعدل جذورا: كتبها ناسخ ف قبل «مكعب يعدل أموالا» – 7-6 مال وجذور يعدل: يعني المجموع، ولهذا فإن الفعل «يعدل» يتعلق باسم مذكر هو المجموع. وسنأخذ بذلك في المواضع التالية دون أن نشيرله مرة أخرى – 11 وجذور: وجذورا [ل] – 12 وأموال: أموال [ل] – 15 فالست: فالستة [ف]

‹ المعادلات المفردة ›

فالمسألة الأولى: جذرٌ يَعدِل عدداً.

فليكن ا ب الواحدَ الخطيّ، و ا جـ آحادٌ خطيّة بعدّة العدد المذكور في السؤال، ونُخرج من نقطتي ا جـ عمودين على ا جـ، ونفصل منهما ا هـ جـ ز، كلٌّ واحدٍ منهما مثلُ الواحد الخطيّ. ونصل هـ ز، فسطح ا ز آحاد سطحيّة عدّتها مثل العدد المذكور في السؤال؛ ونجعل د ح مثل ا جـ فهو ضلع مربعٍ ما، فهو جذْر خطيّ. ونُخرج من نقطتي د ح عمودين على د ح، ونفصل منهما د ط ح ك، كلٌّ واحدٍ منهما مثلُ الواحد الخطيّ؛ ونصل ط ك، فـ د ك جذْر سطحيّ؛ ونعمل على كلّ واحد من سطحي ا ز د ك مجسماً ارتفاعه واحد خطّيّ؛ فالمجسّمان متساويان، والمجسّم الذي على سطح ا ز آحادٌ جسمية بعدّة العدد المذكور في السؤال، والمجسّم الذي على سطح د ك جذْر جسميّ.

فقد وجدنا جذراً خطياً، وجذراً سطحياً، وجذراً جسمياً، كلٌّ واحدٍ منها مساوٍ للعدد المذكور، وكلٌّ واحد منها معلوم لكونه مساوياً للعدد / المعلوم. ل – ٤٣ – و

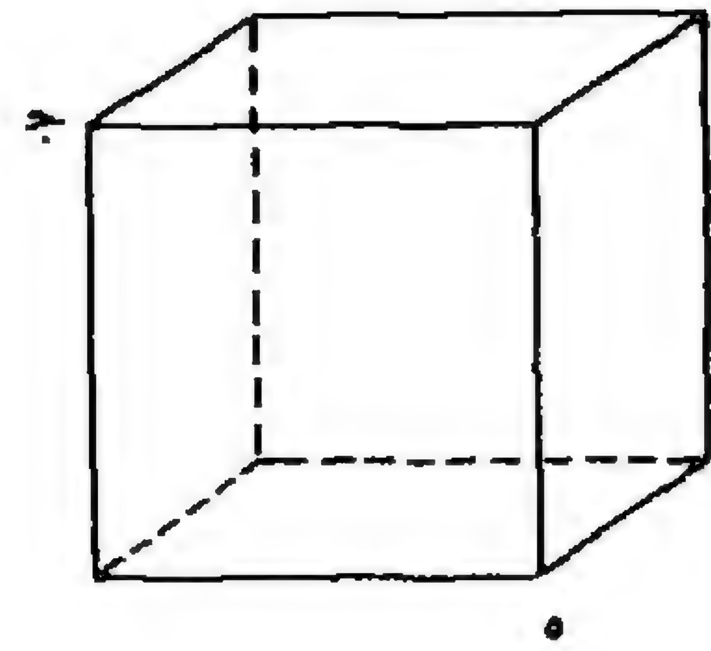


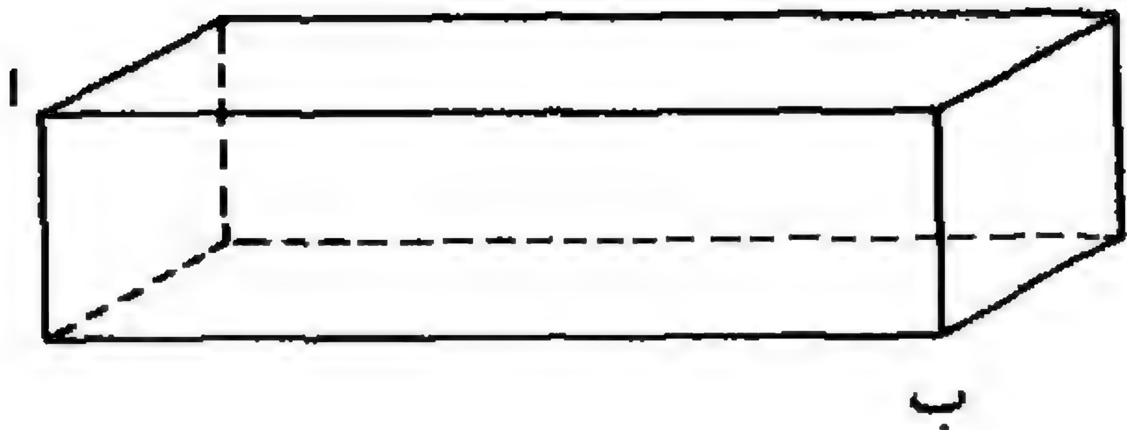
2 عدداً: عدد [ل] – 3 ا جـ: ا ر [ل] – 12 د ك: ر ك [ل] – 14 منها: منهما [ل] / مساوٍ: مساويا [ف، ل]

المسألة الثانية: مالٌ يعدل عدداً.

فليكن ا ب آحاداً سطحيّةً بعدّة العدد المذكور في السؤال، ونعمل مربع ج ه مثل سطح ا ب، ونعمل على كلّ واحد من سطحيّ ا ب ج ه مجسّماً ارتفاعُه واحدٌ خطّيّ؛ فقاعدتا المجسّمين مكافئتان لارتفاعيْهما، فهما متساويان، والمجسّم الذي على ا ب آحادٌ جسمية بعدّة العدد المذكور في السؤال، والمجسّم الذي على مربع ج ه مالٌ جسميّ.

فقد وجدنا مالاً سطحياً ومالاً جسمياً، كلّ واحدٍ منهما مساوٍ للعدد ‹المذكور›؛ فنضع العدد على التخت ونستخرج جذره؛ وهو المطلوب.



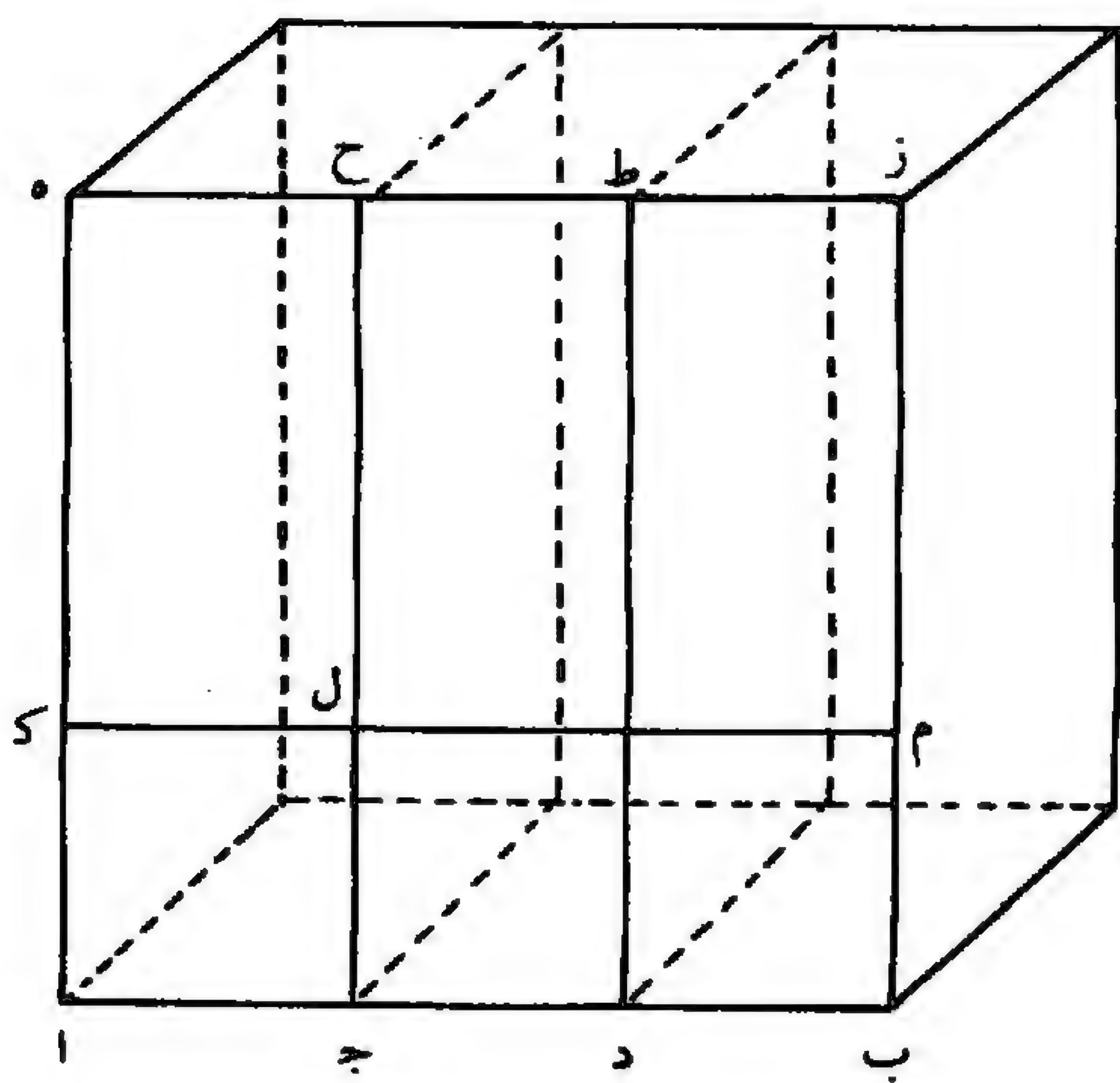


المسألة الثالثة: مال يعدل جذوراً.

فيرجع إلى مسألة: جذر يعدل عدداً. وليكن ا ب عددَ الجذور، وآحاده ا ج ج د د ب، ونعمل عليه مربع ا ز، ونُخرج عمودي ج ح د ط، ونفصل ا ك مثل الواحد الخطيّ، ونخرج عمود ك م، فسطوح ا ح ح د د ز جذورٌ سطحية بعدّة آحاد ا ب. فالمال السطحيّ – وهو

1 المسألة الثانية: ناقصة [ل] – 2 آحادا: احاد [ف، ل] – 4 مكافئتان: مكافيان [ف] – 7 مساو: مساويا [ف، ل] – 8 فنضع: فيضع [ل] / التخت: البحث [ل] / جذره: جلده [ل] – 9 المسألة الثالثة: ناقصة [ل] – 11 وآحاده: آحاده [ف] / ونخرج: ويخرج [ل] – 12 ونخرج: ويخرج [ل]

مربع ا ز – يعدل الجذور السطحية بالعدّة المذكورة في السؤال، و ا م آحاد سطحية بعدّة عدد الجذور، وهو جذْر واحد سطحيّ. فالجذر مساوٍ لآحادٍ سطحية مثل عدد الجذور. وإذا عملنا على ا ز مجسّماً ارتفاعُه بقدْر الواحدِ الخطيّ، حصل مالٌ جسميّ / يعدل جذوراً جسميةً بالعدّة ل - ٤٣ - ظ المذكورة في السؤال. والمجسَّم الذي على ا م آحادٌ جسمية بعدّة عدد الجذور المذكورة في السؤال. ونبيّن أن نسبة المال إلى الجذر كنسبة الجذر إلى الواحد، لأن نسبة مربع ا ز إلى ا م كنسبة ا ه إلى ا ك، / وهي ف - ٤ - و كنسبة ا ح إلى ا ل. فنسبةُ المال السطحيّ إلى الجذر السطحيّ كنسبة الجذر السطحيّ إلى الواحد السطحيّ. ولأن نسبة المجسّم الذي على ا ز إلى المجسّم الذي على ا م كنسبة ا ز إلى ا م، وهي كنسبة ا ه إلى ا ك، وهي كنسبة ا ح إلى ا ل، وهي كنسبة المجسَّم الذي على ا ح إلى المجسّم الذي على ا ل؛ فنسبة المال الجسميّ إلى الجذر الجسميّ كنسبة الجذر الجسميّ إلى الواحد الجسميّ.

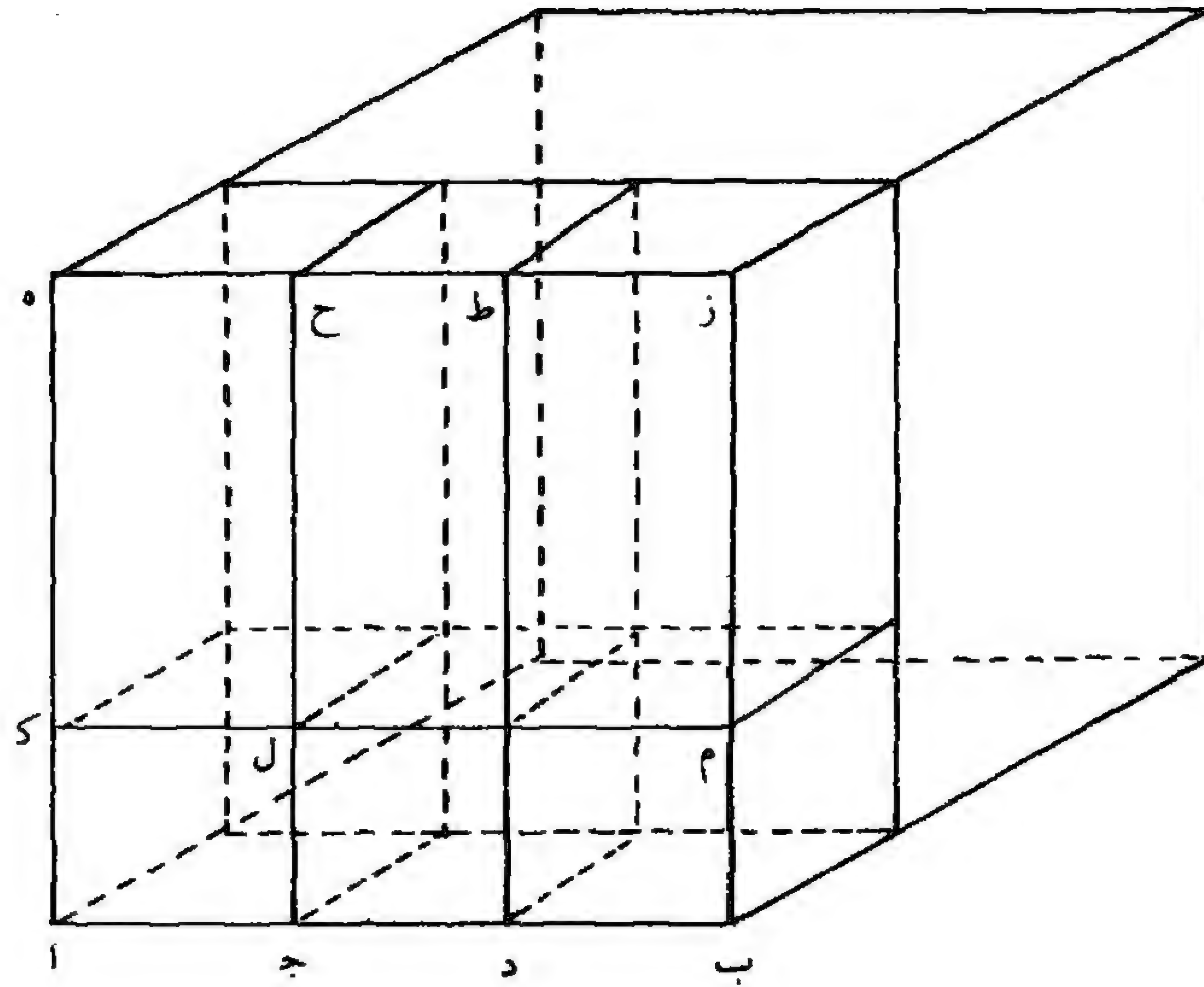


2 آحاد: ا ط ز (كذا) [ف] – 9 ولأن: وان [ل]

المسألة الرابعة: مكعب يعدل أموالاً.

فيُرجَع أيضاً إلى مسألة: جذر يعدل عدداً. وليكن ا ب عدد الأموال، وآحاده ا جـ جـ د د ب، ونُخرج عمودي جـ ح د ط؛ ونفصل ا ك مثل الواحد الخطيّ، ونعمل على مربع ا ز مكعباً. فالمجسّم الذي على ا م – وارتفاعه بقدر ا جـ – جذرٌ جسميّ، والمجسّم الذي على ا ز – وارتفاعه بقدر ا جـ – مالٌ جسميّ؛ والمكعب مساوٍ للمجسّمات التي على سطوح ا ح ح د د ز، وارتفاعها / ا ب، فيكون ل – ٤٤ – و مساوياً لأموالٍ ‹ جسمية › عدّتها مثل عدّة الأموال المذكورة في السؤال؛ والمجسّم الذي على ا ل – وارتفاعه ا جـ – واحد جسميّ، فالمجسّم الذي على ا م آحادٌ جسمية عدّتها مثل عدّة الأموال المذكورة في السؤال. فالجذر الجسمي مساوٍ لآحادٍ جسميةٍ عدّتها مثل عدّة الأموال المذكورة في السؤال. ونبيّن أن نسبة المكعب إلى المال كنسبة المال إلى الجذر؛ لأن نسبة المكعب إلى المجسّم الذي على ا م – وارتفاعه ا ب – كنسبة المال السطحيّ – وهو مربع ا ز – إلى الجذر السطحيّ وهو ا م، وهي كنسبة المجسّم الذي على ا ز – وارتفاعه ا جـ – إلى المجسّم الذي على ا م وارتفاعه ا جـ وهو الجذر الجسميّ. فنسبة المُكعب إلى المال الجسميّ كنسبة المال الجسميّ إلى الجذر الجسميّ. ولأن نسبة المكعب إلى المجسّم الذي على ا ل – وارتفاعه بقدر ا ب – كنسبة مربع ا ز إلى سطح ا ل، فنسبة المكعب إلى الجذر الجسميّ كنسبة المال السطحيّ إلى الواحد السطحيّ؛ وذلك ما أردنا بيانَه.

1 الرابعة: الرابع [ف] / المسألة الرابعة: ناقصة [ل] – 3 ونخرج: ويخرج [ل] – 16 وهو: ناقصة [ل]



المسألة الخامسة: مكعب يعدل جذوراً.

فيُرجع إلى مسألة: مال يعدل عدداً. لأن نسبة المكعب إلى المال كنسبة المال إلى الجذر، ونسبة المال إلى الجذر كنسبة الجذر إلى / الواحد، فنسبة المكعب إلى المال كنسبة الجذر إلى الواحد؛ فبالتبديل: نسبةُ المكعب إلى الجذر كنسبة المال إلى الواحد، فنسبة المكعب إلى جذورٍ بالعدّة التي في السؤال كنسبة المال إلى آحادٍ عدّتُها مثلُ عدّة الجذور المذكورة في السؤال؛ لكن المكعب مساوٍ لها، فالمال مساوٍ لآحادٍ بتلك العدّة، فهو معلوم، فنضع العدد المساوي له ‹على التخت› ونستخرج جذره؛ فما كان فهو المطلوب. ل - ٤٤ - ظ

1 المسألة الخامسة: ناقصة [ل] – 2 فيرجع: فنرجع [ف] – 4 فبالتبديل: فالتبدبل (كذا) [ل] – 8 فنضع: فيضع [ل] / ونستخرج: فيخرج، وكتب الناسخ واواً تحتها [ل]

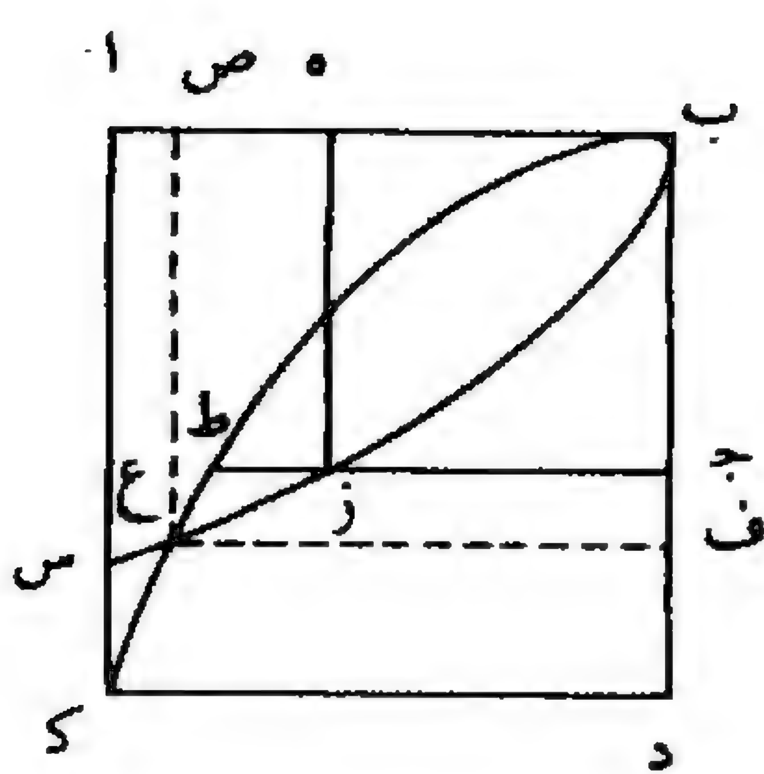
المسألة السادسة: مكعب يعدل عدداً.

ولْتُقدّم على ذلك مقدّمة وهي: إخراج خطين بين خطين لتتوالىَ الأربعة متناسبةً.

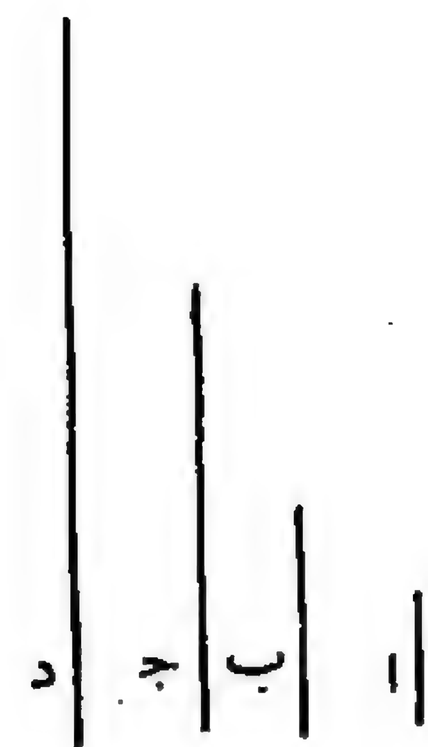
فليكن خطّا ا ب م ل مفروضين، و ا ب أطْولها، ونُخرج من نقطة ب عموداً على ا ب، ونفصل منه ب ج مثل م ل، ونعمل قطعاً مكافئاً رأسُه نقطة ب، وسهْمه ا ب، وقائمه مثل ب ج، ونعمل قِطعاً آخر مكافئاً رأسُه نقطة ب، وسهمه ب ج، وقائمهُ مثل ا ب، ونفصل ب ه مثل ب ج * ونخرج من نقطتي ه ج عمودين على السهمين، فيلتقيان؛ وليكن التقاؤهما على نقطة ز، فسطح ه ج مربع. فلأن ه نقطة على ا ب، فيخرج منها عمود، وينتهي إلى محيط القطع الذي سهمه ا ب وقائمه ب ج؛ وكذلك نقطة ج على خط ب ج فيخرج منها عمود، وينتهي إلى محيط القطع الذي سهمه ب ج وقائمه ا ب. فلأن ضرب ب ج في ب ه – أعني مربع ه ج – مثل مربع العمود الذي نخرج من نقطة ه وينتهي إلى محيط القطع الذي سهمه ا ب، وهو مثل مربع ه ز، فـ ه ز هو العمود المذكور، فنقطة ز على محيط ذلك القطع، وضرب ا ب في ب ج مثل مربع العمود الذي نخرج من نقطة ج وينتهي إلى محيط القطع الذي سهمه ب ج. لكن ضرب ا ب في ب ج أعظم من مربع ه ج، فالعمود الذي نخرج من نقطة ج وينتهي إلى محيط القطع الذي سهمه خط ب ج أطول من ج ز، فليكن مثل ج ط، فنقطة ط على محيط هذا القطع.* ونفصل ب د مثل ب ا، ونخرج من نقطتي ا د عمودين على

1 المسألة السادسة: ناقصة [ل] – 2 ولتقدم: وليقدم [ف] / بين خطين: ناقصة [ل] / لتتوالى: ليتوالى [ف] – 6 وقائمه: وقايمته [ل]، وكثيرا ما يكتب ناسخ ف: «وقايمة»، ولن نشير لهذا مرة أخرى – 8-20 ما بين النجمتين ناقص في [ل] – 15 المذكور: المذكورة [ف] – 20 ونفصل: ويفصل [ف]

السهمين؛ فيلتقيان، وليكن على نقطة ك، فسطح ا د مربّع؛ فلأن ضرب ا ب في ب د مثل مربّع العمود الذي يخرج من نقطة د وينتهي إلى محيط القطْع الذي / سهمه ب ج وهو مساوٍ لمربّع د ك، فـ د ك هو العمود ل - ٤٥ - و / الذي يخرج من نقطة د وينتهي إلى محيط القِطْع الذي سهمه ب ج. ف - ٤ - ظ فنقطة ك على محيط هذا القطْع. ولأن ضرب ب ج في ب ا مثل مربّع العمود الخارج من نقطة ا و ينتهي إلى محيط القطْع الذي سهمه ا ب – لكن ب ج في ا ب أصغر من مربّع ا د – فالعمود الخارج من نقطة ا إلى محيط القطْع الذي سهمه ا ب أصغر من ا ك. فليكن مثل ا س، فنقطة س على محيط القطْع الذي سهمه ا ب، فنقطة ك خارج هذا القطْع ونقطة ط في داخله. فمحيط القطْع الذي سهمه ب ج إذا خرج من نقطة ط إلى ك يقطع القطْع الذي سهمه ا ب ضرورة. وليكن التقاؤهما على نقطة ع. فنخرج من نقطة ع عمودين على السهمين، وهما ع ف ع ص، فضرب ا ب في ب ف مثل مربّع ع ف؛ فنسبة ا ب إلى ع ف – أعني ب ص – كنسبة ع ف – أعني ب ص – إلى ب ف. ولأن ضرب ب ص في ب ج مثل مربّع ص ع، فنسبة ب ص إلى ص ع – أعني ب ف – كنسبة ص ع – أعني ب ف – إلى ب ج. فخطوط ا ب ب ص ب ف ب ج متوالية على نسبة واحدة.



ل م



2 يخرج: نخرج [ل] / د: ا [ل] – 4 يخرج: نخرج [ل] – 10 فحيط: لمحيط [ف، ل] – 14 كنسبة ع ف: كنسبة ر ع [ف، ل]

وإذا تقرّر هذا، فليكن آ هو الواحد الخطيّ، ود آحادُ خطيّة بعدّة / الآحاد الجسميّة المفروضة، ونُخرج فيما بينهما خطّي ب ج لتتوالى الأربعة متناسبةً، حتّى يكون نسبة آ إلى ب كنسبة ب إلى ج. وج إلى د. فلأن نسبة مربع آ إلى مربع ب كنسبة آ إلى ب مثناة بالتكرير، وهي كنسبة ب إلى ج مثناة بالتكرير، ونسبة ب إلى د كنسبة ب إلى ج مثناة بالتكرير، فنسبة مربّع آ إلى مربع ب كنسبة خط ب إلى خط د. فضرْب مربع آ في خط د كضرْب مربع ب في خط ب. لكن مربع آ في د آحاد جسمية بالعدّة المذكورة في السؤال، ومربع ب في خط ب هو مكعب ب. فقد وجدنا مكعباً مساوياً للعدد المذكور في السؤال؛ وهو معلوم لكونه مساوياً للعدد المعلوم. فنضع العدد على التخت، ونستخرج ضلعه، فما كان فهو المطلوب. (ل - ٤٥ - ظ)

‹ معادلات الدرجة الثانية المقترنة ›

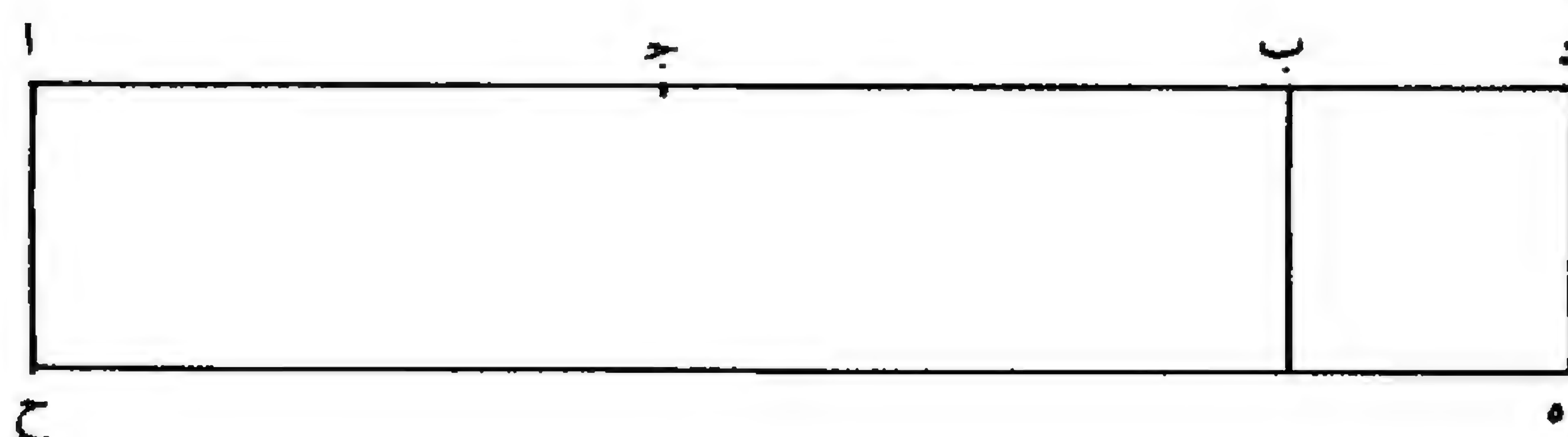
وأما المقترنة فمنها ما لا يجتمع فيها الكعب مع العدد ومنها ما يجتمع. أما التي لا يجتمع فست مسائل:

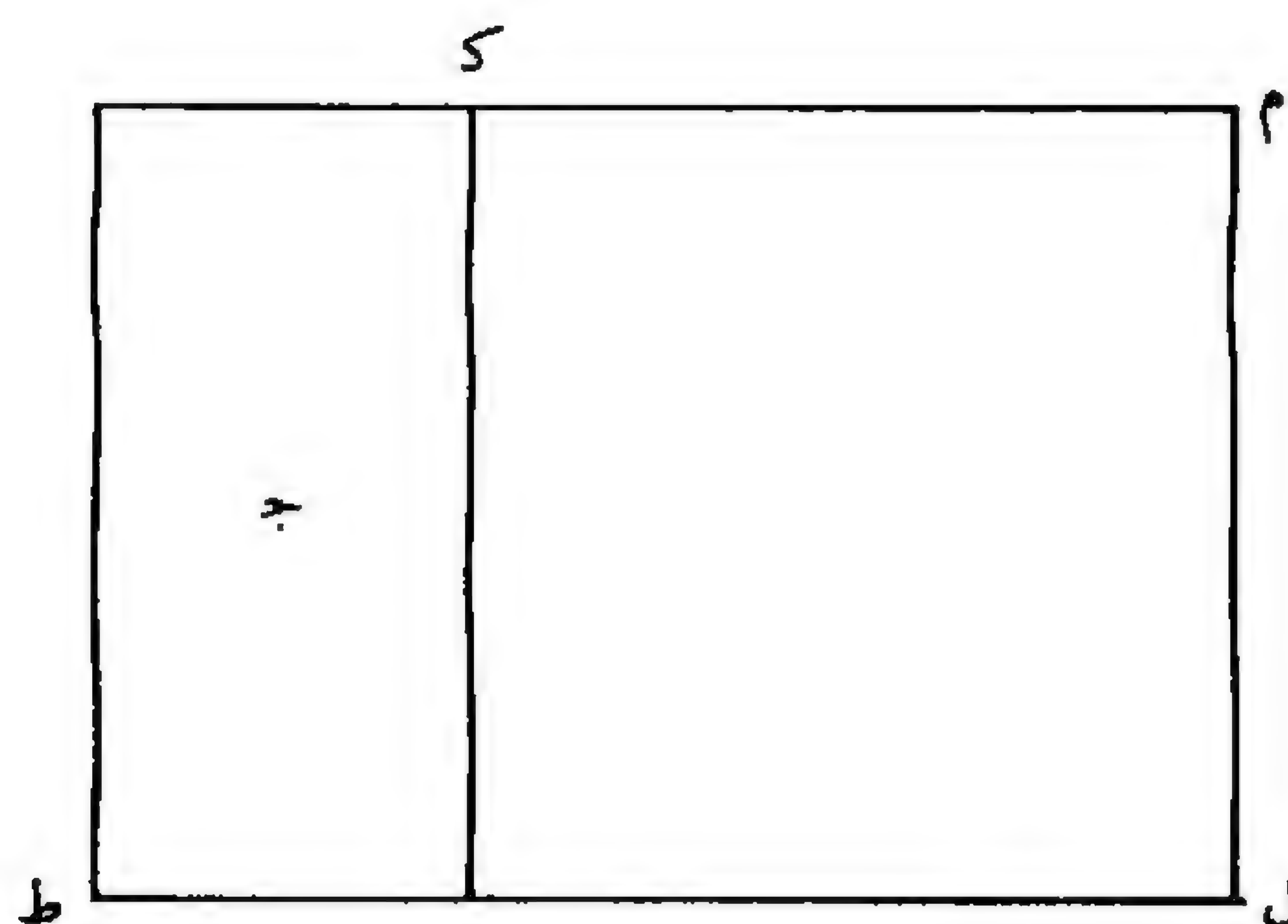
المسألة الأولى: مال وجذور يعدل عدداً.

فليكن ا ب عدد الجذور وننصّفه على ج. وليكن سطح لك ل عدداً مثل مربع ج ب وط ك العدد المذكور في السؤال. فنعمل مربعاً مساوياً

2 لتتوالى: ليتوالى [ف]) – 4 إلى ب: الباء ناقصة في [ل]، وفوق السطر في [ف] – 8 خط ب: خط ب ر [ل] – 10 فنضع: فيضع [ل] / ونستخرج: ويستخرج [ل] / فما: مما [ل] – 15 المسألة الأولى: ناقصة [ل] – 16 وننصفه: وينصفه [ف]، وبنصفه [ل] – 17 فنعمل: فيعمل [ف]

لعدد ط م، فضلعه أطول من جب فنخرج جب بالاستقامة؛ ويفصل جد مثل ضلعه، فمربع جد، أعني / العدد مع مربع جب، مثل مربعي ل - ٤٦ - و جب ب د وضعف ضرْب جب في ب د، أعني ضرب ا ب في ب د. فنسقط مربع جب المشترك، يبقى ضرب ا ب في ب د مع مربع ب د مثل العدد؛ فنعمل على ب د مربع ب ه، ونُخرج ه و بالاستقامة، ونفصل ه ح مثل ا د ونصل ا ح. فسطح ا ه الذي هو من ضرب ا د في د ه أعني د ب مثل العدد؛ فقد وجدنا سطحاً واحداً مساوياً للعدد، مؤلفاً من مالٍ وهو مربع ب د، ومن سطح مضافٍ إلى ه ب مساوٍ لعدّة الجذور.





وأمّا استخراج الجذر: فنضع العدد على التخت، ويعدّ مراتبه بجذْرٍ، ولا جذر، وحيث وقع عليه الجذر نضع صفراً، ونعرف المرتبة السميّة للجذر الأخير فيكون لها صورٌ ثلاث:

1 فنخرج جب: فيخرج ج ب [ف]، ناقصة [ل] – 4 فنسقط: فيسقط [ف] – 6 ونفصل: ويفصل [ف] – 8 ه ب مساوٍ: ا ب مساويا [ف، ل] – 10 فنضع: فيضع [ل] / التخت: البحث [ل] – 11 نضع: يضع [ل]

الصورة الأولى:

أن يكون المرتبةُ السّميةُ للجذر الأخير أرفع من آخر مراتب عدد الجذور، مثل قولنا: مالٌ وأحد وثلاثون جذراً يعدل عدد مائة واثني عشر ألفاً وتسعمائة واثنين وتسعين.

فيعدّ من المرتبة السّمية للجذر الأخير إلى الجذر الأخير. ونعدّ بتلك العدّة من أرفع مراتب عدد الجذور، فحيث ينتهي يُنقل إليه أولُ مراتب عدد الجذور، فيكون بهذه الصورة: ٠ ٠ ١١٢٩٩٢ ٣١ ؛ لأن المرتبة / السّميّة للجذر ل – ٤٦ – ظ الأخير إنما هي المئات، والمرتبة السّمية لأرفع مراتب عدد الجذور العشراتُ، فعددنا من المرتبة السّمية للجذر الأخير إلى / الجذر الأخير، ف – ٥ – و وكان مرتبتان؛ وعددنا من مرتبة العشرات التي هي أرفع مراتب عدد الجذور بتلك العدّة، فنقلنا إليه أولَ مراتب عدد الجذور. ثم نطلب أكثر عددٍ نضعه فوق المرتبة التي وقع عليها الجذر الأخير وننقص مربعه مما تحته، ونضربه في عدد الجذور، وننقص المبلغ من العدد؛ وهو الثلاثة. فنضعه مكان الصفر الأخير، ونعمل به العمل المذكور ليحصل بهذه الصورة: ٣ ٠ ٠ ١٣٦٩٢ ٣١ ، ونضع ضعف المطلوب وهو ستة بحذائه في السطر الأسفل، وننقل مراتب السطر الأسفل ‹والأعلى› بمرتبة، ونضع مطلوبا ثانياً في الجذر المتقدم على الجذر الأخير؛ وهو اثنان، ونعمل به ما عملنا بالمطلوب الأول، فيحصل بهذه الصورة: ٣٢ ٠ ٦٧٢ ٦٣١ ، ثم نزيد ضعف المطلوب الثاني على المرتبة التي بحذائه في السطر الأسفل، وننقل مراتب السطر الأسفل ‹والأعلى› بمرتبة؛ ونضع مطلوباً ثالثاً في الجذر / الأول، ‹وهو واحد›؛ ونعمل به ل – ٤٧ – و

1 الصورة الأولى: ناقصة [ل] – 4 واثنين: واثني [ف، ل] – 5 الجذر الأخير: الجذر لا يبق [ف] – 8 مراتب: ومراتب [ل] – 10 هي: تحت السطر [ف] – 11 نطلب: يطلب [ل] – 12 وننقص: وينقص [ف، ل] – 13 ونضربه: ويضربه [ف، ل] / وننقص: وينقص [ف، ل] – 15 ونضع: ويضع [ل] / وننقل: وينقل [ف، ل] – 16 ونضع: ويضع [ل] – 18 ضعف المطلوب: مكررة [ف، ل] – 19 وننقل: وينقل [ف، ل] – 20 ونضع: ويضع [ل] / ثالثا: بالثانى [ف]

العمل المذكور، فيرتفع العدد، ويحصل السطر الأعلى بهذه الصورة: ٣٢١، وهو الجذر المطلوب.

الصورة الثانية:

أن يكون آخر مراتب عدد الجذور أرفع من المرتبة السّمية للجذر الأخير؛ مثل قولنا: مالٌ وألفان واثنا عشر جذراً يعدل عدد سبعمائة ألف وثمانية وأربعين ألفاً وثمانمائة وثلاثة وتسعين.

فنضع عدد الجذور على رسم وضْع المقسوم عليه، فيكون بهذه الصورة: ٧٤٨٨٩٣ / ٢٠١٢، ونعمل العمل السابق إلى آخره.

الصورة الثالثة:

ألّا يكون المرتبة السّمية للجذر الأخير أرفع من آخر مراتب عدد الجذور ولا أنزل.

فنضع عدد الجذور على رسم وضْع المقسوم عليه، ونعمل به العمل المذكور.

وإنما وجب العمل على الوجه المذكور لأن العدد مركّب من المال الحاصل من ضرب الجذر في نفسه، ومن المسطح الحاصل من ضرب الجذر في عدد الجذور؛ وآخرُ مراتب المال إنما يحصل من ضرب آخرِ مراتب الجذر في نفسه، وآخرُ مراتب المسطح ‹ يحصل › من ضرب آخر مراتب

3 الصورة الثانية: ناقصة [ل] – 4 مراتب: المراتب [ف] – 9 الصورة الثالثة: ناقصة [ل] – 10 ألّا: كتبها ناسخ ف وكذلك ناسخ ل «أن لا»، ولن نشير لهذا مرة أخرى – 12 فنضع: فيضع [ل] – 13 المذكور: هذا العمل غير صحيح بوجه عام. مثال معاكس $x^2 + 111\,x = 128\,326$ وهنا $s = 307$. ومما يثير الدهشة أن نرى الطوسي خلال حله لمعادلات الدرجة الثالثة وفي موقف مماثل يعطي الحل الصحيح الكامل. انظر مثال $x^3 + a\,x = N$ – 16-17 مراتب الجذر: المراتب الجذر [ل]

الجذر في آخر مراتب عدد الجذور. لكنّ آخر مراتب الجذر / ل – ٤٧ – ظ إنما هو المرتبة السمية للجذر الأخير المقابل للعدد، ومنحطُّ ضرْب هذه * المرتبة في نفسها إنما يقع في مرتبة آخر الجذور المقابلة للعدد، وضربه في آخر عدد الجذور في الصورة الأولى أنزل من ضربه في نفسه، فيقع منحط هذا * الضرْب قبلَ مرتبةِ آخر الجذور المقابلة للعدد؛ فالحاصلُ مقابلَ الجذر الأخير إنما هو من المال وهو آخرُه؛ وآخره إنما هو من ضربِ آخر الجذر في نفسه. فنطلب عدداً يُنقص مربعه من المرتبة المقابلة لآخر الجذور المقابلة للعدد. وإذا استخرجنا المطلوب نعلم أنه آخرُ الجذر؛ وهو مضروب في مراتب عدد الجذور؛ فيُحتاج إلى ضربه في مراتب عدد الجذور ونقصانِه من العدد، فهو مطلوب القسمة بالنسبة إلى عدد الجذور، وعددُ الجذور هو المقسومُ عليه. فإذا علمنا [أن] مطلوب القسمة من أيّ مرتبة – وهو أرفعُ من جميع مراتب عدد الجذور – علمنا قدر انحطاط مرتبةِ آخرِ عدد الجذور عن مرتبته، فنقلنا آخر مراتب عدد الجذور إلى المرتبة المنحطّة عن المرتبة التي فيها المطلوبُ بقدر انْحطاطِ مرتبته، لأن ضرب المطلوب في آخر عدد الجذور يقع منحطاً عن ضربه في نفسه بقدر انحطاط مرتبة عدد الجذور عن مرتبته، ووضعنا ضعف المطلوب في السطر الأسفل، ونقلنا مراتب السطر الأسفل / ل – ٤٨ – و بمرتبةٍ لأن آخر المراتب الباقية في العدد من المسطح حاصلٌ من ضرب هذا المطلوب في آخر عدد الجذور؛ ويكون آخر المراتب الباقية ‹في العدد› من المال أرفعَ من آخر المراتب الباقية من المسطحِ، لما مرّ في المطلوب الأول. فالمطلوب الثاني – وهو المطلوب

1-2 آخر مراتب الجذر... للعدد: يعني هنا أن مرتبة آخر مراتب الجذر هي المرتبة السمية ... وهو تجاوز مقبول – 2-4 مابين النجمتين ناقص في [ل] – 5 الجذور: الحدود [ل] / للعدد: المقصود هنا أن مرتبة ضرب مرتبة آخر عدد الجذور في مرتبة آخر الجذر تقع قبل مرتبة الجذر الأخير (أي الثالث) المقابل للعدد – 7 فنطلب: فرطلب [ل] / لآخر: الآخر [ل] – 10 فهو: أي المطلوب الأول / مطلوب: المطلوب [ل] – 13 فنقلنا: فيقلنا [ل] – 18 هذا المطلوب: المقصود هنا المطلوب الثاني. ويبدو لنا أن في هذا النص بعض الاضطراب الذي قد يرجع إلى النساخ – 20 وهو المطلوب: هو مطلوب [ف]

‹ المضروب في ضعف آخر › الجذر، وهو بعينه المطلوبُ الذي يحصل منه آخر المسطح الباقي – ننقصُ مربعه وهو المال ونضربه في السطر الأسفل، ليحصل ضربه في ضعف المطلوب الأول، وفي مراتب عدد الجذور ‹ وننقص حاصل الضرب من الباقي ›. ثم عند النقل نزيد ضعفه على السطر الأسفل لأنّا نحتاج إلى ضرب المطلوب الثالث في ضعف المطلوب الأول والثاني، وفي عدد الجذور بعد نقصان مربعه. / وسائرُ المطالب يستمرّ بيان أعمالها على هذا القياس. ف - ه - ظ

وأما في الصورة الثانية: فلأن آخر مراتب عدد الجذور أرفعُ من المرتبة الأخيرة للجذر، فآخر مراتب المسطّح أرفع من آخر مراتب المال؛ فآخرُ العدد هو ‹ من › آخر المسطّح، فنقلنا آخر عدد الجذور إلى آخر العدد. وإذا علمنا [أن] آخر مراتب الجذر من أيّ مرتبة فنعلم أن مربعه في أيّ مرتبة، وهي المرتبة المقابلة للجذر الأخير، فيُنقص مربعه من تلك المرتبة ونضربه في مراتب عدد الجذور، وينقص حاصل الضرب من العدد؛ وبقية / البيان ما مرّ. ل - ٤٨ - ظ

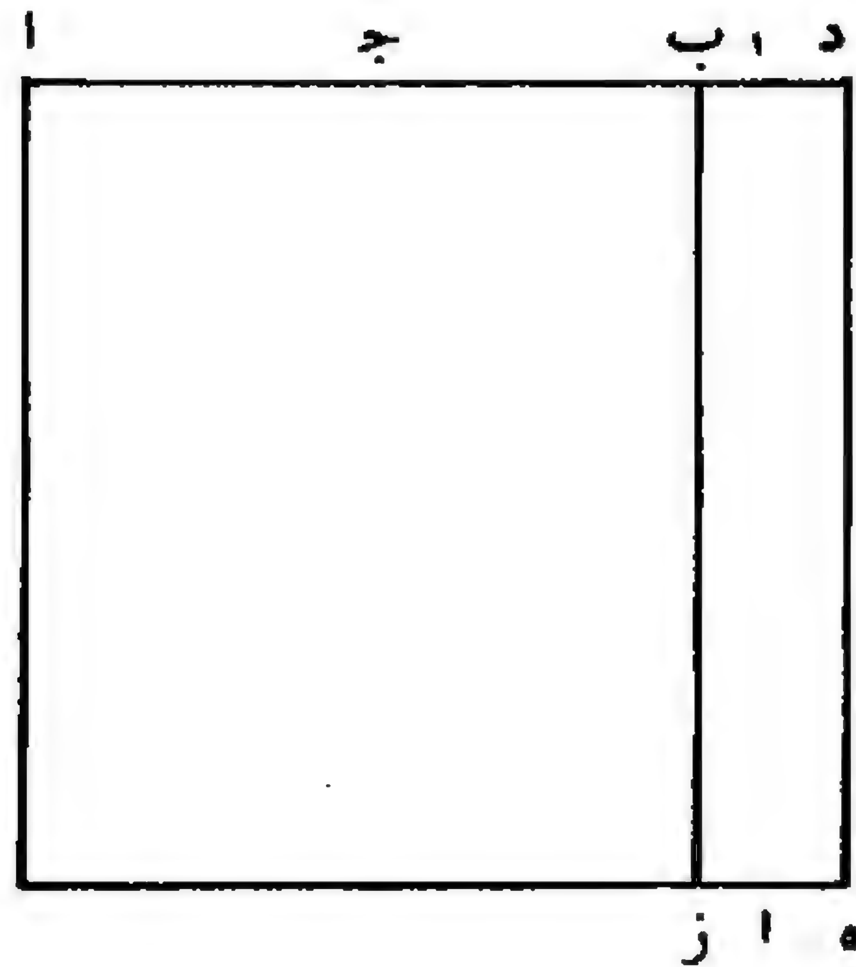
وأما الصورة الثالثة: فلأن الجذر هو بعينه من مرتبة آخرِ عددِ الجذور، لأنه لو كان مرتبةُ آخر الجذر أرفع لكان مرتبة آخر الجذور المقابلةِ للعدد أرفع، ولو كان أنزلَ لكان أنزلَ؛ و إذا كان كذلك كان ضربُ المطلوب في نفسه وضربُه في آخر عدد الجذور يقعان في مرتبةٍ واحدة، وهي مرتبة آخر

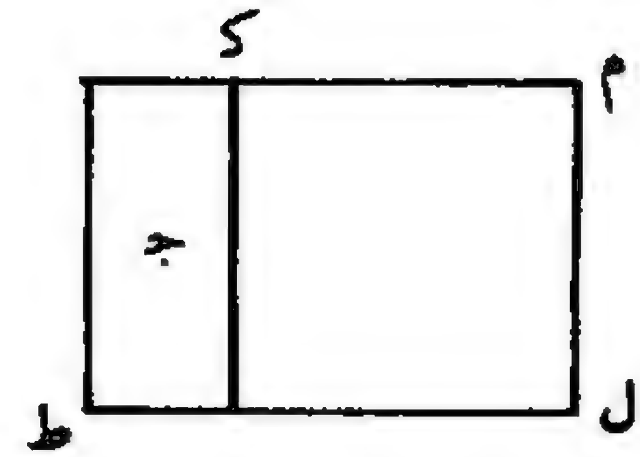
2 ننقص: فينقص [ف، ل]، والصواب حذف الفاء لأن الجملة خبر المبتدأ: المطلوب / وهو: من [ف، ل] / ونضربه: ويضربه [ل] – 4 نزيد: يزيد [ل] – 5 نحتاج: يحتاج [ف، ل] – 6 مربعه: مربعة [ل] – 10 أضفنا هنا «من» لنفي المساواة التي قد تبدو للوهلة الأولى قائمة في حين أنها ليست محققة في مثال الطوسي نفسه، هذه واحدة، والأخرى أن آخر العدد ينشأ أساسامن آخر المسطح وليس العكس، أوبعبارة أخرى، أن آخر المسطح هو المهيمن / فنقلنا: فيقلنا [ل] / العدد: المسطح [ف، ل] – 11 فنعلم: فيعلم [ل] – 12 وهي المرتبة: وهي المراتبه [ل] – 16 الجذر: الجذور [ف، ل] – 16 مرتبة آخر الجذور: آخر مرتبة الجذور [ف، ل] – 17 ولو: و [ل]

الجذور المقابلة للعدد؛ فينقل آخرُ عدد الجذور إلى تلك المرتبة؛ وبقية البيان ما مرّ.

المسألة الثانية: جذورٌ وعددٌ يعدل مالاً.

فليكن ا ب عددَ الجذور المذكورة في السؤال، و ط ك هو العدد، وينصف ا ب على نقطة جـ، ونعمل ك ل مساوياً لمربّع جـ ب، ونعمل مربعاً مساوياً لسطح ط م، فضلعه أطول من جـ ب، فنخرج جـ ب بالاستقامة، ويُفصل جـ د مثل ضلعه. فمربع جـ د – أعني العدد – مع مربّع جـ ب مثل مربعي جـ ب ب د، وضعف ضرب جـ ب في ب د، وهو ا ب في ب د، فنسقط مربّع جـ ب المشترك، يبقى ضرب ا ب في ب د مع مربّع ب د – أعني ضرب ا د في د ب – مثل العدد؛ ولأن ضرب ا د في د ب مع ضرب ا د في ا ب مثلُ مربع ا د، فقد وجدنا مالاً، وهو مربع ا د، مؤلفاً من العدد وهو ا د / في د ب ومن عدد ل – ٤٩ – و الجذور وهو ا د في ا ب..





2 ما مرّ: هنا أيضا لم يبيّن الطوسي كيفية إيجاد آخر مراتب الجذر، ذلك أنها قد تنتج من وضع عدد الجذور على رسم المقسوم عليه، وقد تنتج من البحث عن أكبر عدد لا يتجاوز مربعه العدد المفروض، وقد تأتي من الحدين معاً، انظر $x^2 + 111x = 138\,627$ ، $x^2 + 411x = 234\,972$ – 3 المسألة الثانية: ناقصة [ل] – 5 وينصف: وبنصف [ل] – 7 ضلعه: ضلعيه [ف] – 9 فنسقط: فيسقط [ف]

وأما استخراج الجذر: فليكن ا هـ مربع ا د، ونخرج ب ز موازياً لـ د هـ، ونجعل ب د شيئاً - أعني جذر مال مجهول - و ا ب عدد الجذور المذكورة في السؤال، فـ ا د عدد الجذور وشيء، فسطح ب هـ من ضرب عدد الجذور وشيءٌ في شيءٌ، لكنّ ضربَ شيءٌ في شيءٌ مالٌ مجهولٌ وعددَ الجذور في شيءٌ أشياءُ بعدّة الجذور. وهذا المجموعُ يعدل مسطح ب هـ، وهو العدد المذكور في السؤال، فيكون مالٌ وجذورٌ بالعدّة المذكورة في السؤال، يعدل العددَ الذي في السؤال؛ فيستخرج الجذر بالطريق المذكور في المسألة المتقدمة، فما خرج نزيد عليه عدد الجذور، فما حصل فهو الجذر المطلوب.

مثالها: أحدٌ وعشرون جذراً وعددُ ستةٍ وتسعين ألفاً وثلاثمائة يعدل مالاً. فنضع العدد على التخت، ونستخرج الجذرَ بالطريق المذكور في المسألة المتقدمة، فيحصل بهذه الصورة: ٣٠٠، فنزيد عليه عدد الجذور ‹المذكورة› في السؤال، فيحصل بهذه الصورة: ٣٢١، وهو الجذر المطلوب.

المسألة الثالثة: مالٌ وعددٌ يعدل جذوراً.

فليكن ا ب عدد الجذور / وسطح جـ هو العدد. فلأنّ الجذر إذا ل - ٤٩ - ظ
ضُرب في نفسه حصل المالُ فقط، وإذا ضُرب في ا ب حصل المال مع العدد؛ فـ ا ب أعظم من الجذر حتى يكون بعضُه على مثال ب د، وهو الجذر، ويكون ا ب في ب د هو ضرب الجذر في عدد الجذور. وليكن

6 مسطح: سطح [ل] - 11 فنضع: نضع [ل] / التخت: البحث [ل] / ونستخرج: وفنستخرج [ل] - 12 فنزيد: فتزيد [ف]، فيزيد [ل] - 15 المسألة الثالثة: ناقصة [ل] - 16 فلأن: فلض (كذا) [ل]

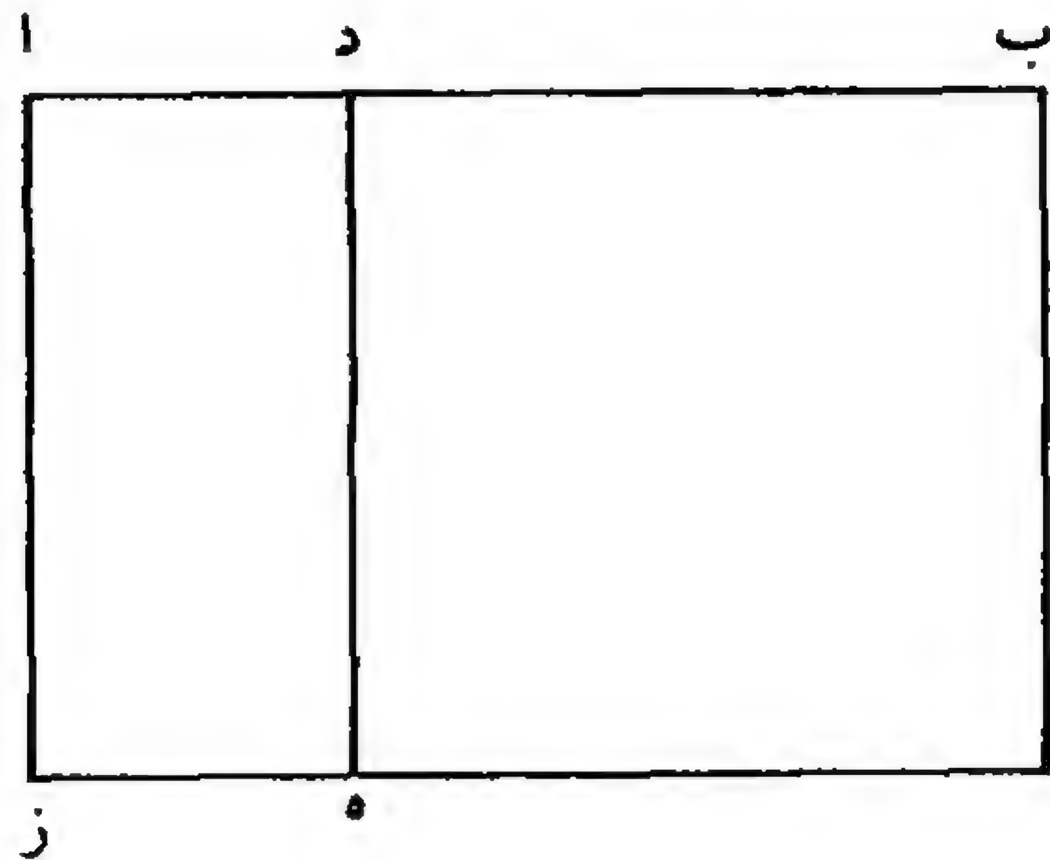
سطح ب ز معادلاً لمجموع المال والعدد. فإذا أخرجنا عمود د هـ ، فينفصل عن سطح ب ز مربع ب هـ المال. ولأن ب ز كان معادلاً للمال والعدد، وقد انفصل منه المال – وهو مربع ب د – فيكون سطح د ز معادلاً للعدد. فالعدد معادل لضرب ا د في د ب ، وهو من ضرب أحد قسمي عدد الجذور في الآخر. فمن ضرورة صحةِ هذه المسألة أن ينقسم عددُ الجذور إلى قسمين؛ يكون ضربِ أحدهما في الآخر مساوياً للعدد. فإن كان العدد أعظمَ من مربّع نصف عدد الجذور، كان أعظمَ أيضاً من ضرب أحد القسمين / المختلفين في الآخر، لأن مربع النصف أعظم من ضرب ف - ٦ - و أحد القسمين المختلفين في الآخر، فلا يمكن انقسام عدد الجذور بحيث يكون ضربُ أحد القسمين في الآخر يعادل العدد. فمن ضرورةِ صحةِ هذه المسألة ألّا يكون / العدد أعظم من مربع نصف عدد الجذور. فلو كان ل - ٥٠ - و أعظمَ كانت المسألةُ مستحيلةً. وإذا لم يكن أعظمَ فنقسم ا ب – وهو عدد الجذور – بنصفين على نقطة د. فإن كان مربع ب د مثل سطح جـ – وهو العدد – فـ ا ب قد قسم بقسمين على نقطة د، وضرب أحدهما في الآخر مثل العدد؛ وإن كان أقلّ من مربع ب د ، فليكن فضل المربع عليه هو سطح ط . فنعمل مربعاً مساوياً لفضل مربع ب د عليه، وليكن د ك مثلَ ضلعه؛ فيكون سطح جـ – وهو العدد – مع مربع د ك مساوياً لمربع د ب. لكنّ سطح ا ك في ك ب مع مربع د ك مثلُ مربع د ب . فإذا ألقينا مربع د ك المشترك، يبقى سطح جـ ، العددُ، مثل سطح ا ك في ك ب . وبهذا انقسم ا ب ، عددُ الجذور، على نقطة ك ‹إلى قسمين› ، وضرْبُ أحدهما في الآخر مثل العدد. فإذا عملنا على ا ك مربع

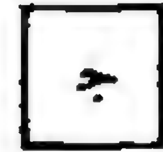
1 فينفصل: فنفصل [ل] – 8 أعظم: ناقصة [ل] – 12 فنقسم: فيقسم [ف] – 16 هو: من [ل] – 19 ألقينا: الفنا [ل] – 20 وبهذا: قد [ف]، هد [ل]

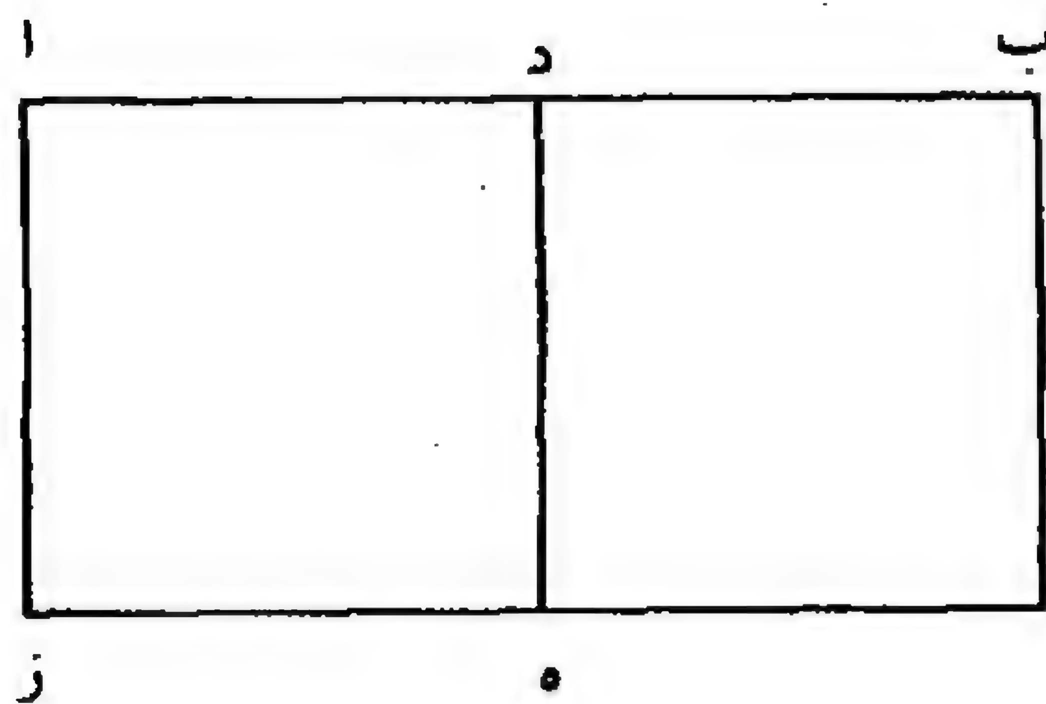
ا ز وتمّمنا سطح ا هـ متوازي الأضلاع، فهو من ضرب ا ب في ب هـ، أعني ز ك الذي هو مثل ا ك. وسطح ز ب من ضرب ب ك في ك ز أعني ا ك، فهو مثل العدد. فقد وجدنا مالاً – وهو مربع ا ز – مع العدد، وهو سطح ز ب، مساوياً لضرب الجذر في عدد الجذور.

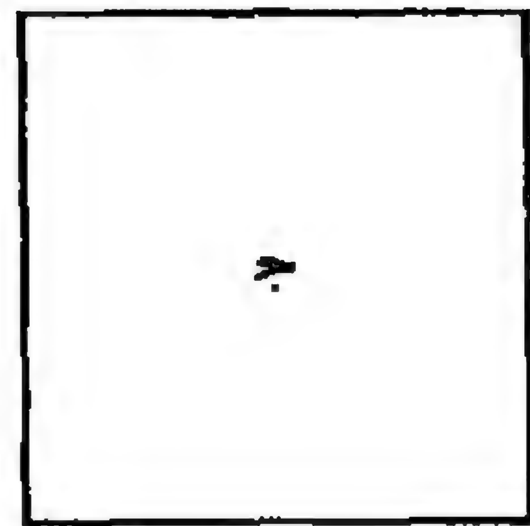
وأيضاً / إذا عملْنا على ب ك مربع ز ب، وتمّمنا سطح ا هـ متوازي الأضلاع، فقد وجدنا مالاً – وهو مربع ك هـ – مع العدد، وهو سطح ا ز، مساوياً لضرب الجذر في عدد الجذور. ل - ٥٠ - ظ

فقد تبين أن العدد المذكور في السؤال إن كان أعظمَ من مربع نصف عدد الجذورِ فالمسألة مستحيلة، وإن كان مساوياً له فالجذر نصف عدد الجذور، وإن كان أقل فلها جوابان: أحدهما أعظم من نصف عدد الجذور، والآخر أصغر. وإذا نُقص أحدهما من عدد الجذور بقي الآخر.

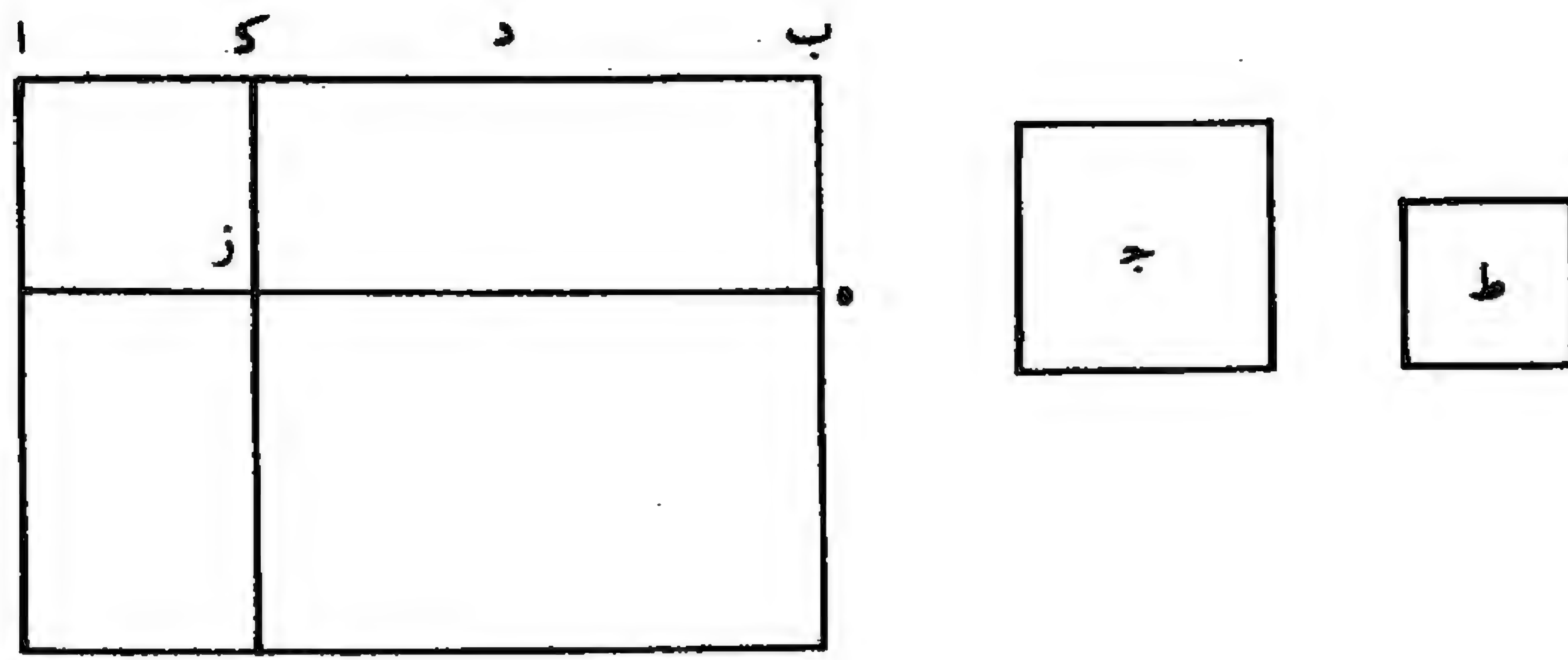








2 وسطح: فاسطح [ل] – 3 فقد: وقد [ف] – 4 ز ب مساويا: د ب مساويا [ف]، د ب متساويا [ل] – 6 فقد: وقد [ف] – 7 لضرب: يقرب [ل]



وأما استخراج الجوابين: فليكن مثال المسألة: مالٌ مع عددٍ خمسمائةٍ وسبعين ألفاً وثمانية آلافٍ وأربعمائةٍ واثنين وأربعين، يعدل جذوراً عددها ألفان ومائة وثلاثة وعشرون، فنضع العدد على التخت ونعد مراتبه بجذر، ولا جذر، ونضع أصفار الجذر، ونضع عدد الجذور تحت العدد على رسم وضعِ المقسوم عليه بهذه الصورة: ٥٧٨٤٤٢ / ٢١٢٣ ، ونطلب أكثر عددٍ نضعه في الجذر الأخير وننقصه من المرتبة التي تحاذيه من عدد الجذور، ونضربه في الباقي من السطر / الأسفل، وينقص المبلغ من العدد، وهو الثلاثة، ل – ٥١ – و
فنضعها في الجذر الأخير، ونعمل بها العمل المذكور فيحصل بهذه الصورة: ٣١٥٤٢ / ١٨٢٣ ، ثم يُنقص المطلوب من المرتبة التي تحاذيه من السطر الأسفل كرّة أخرى، وينقل مراتبُ السطر الأسفل ‹والأعلى› بمرتبة، ثم نضع المطلوب الثاني – وهو اثنان – في الجذر المتقدم على الجذر الأخير، ونعمل به العمل المذكور، ثم يُنقص المطلوبُ الثاني من السطر الأسفل كرّةً

1 الجوابين: الجوانبين [ل] – 2 وسبعين: وتسعين [ل] / واثنين: واثني [ف، ل] – 3 فنضع: فيضع [ف، ل] / التخت: البحث [ل] – 4 ونضع أصفار: ويضع أصفار [ل] – 5 ونطلب: ويطلب [ل] / نضعه: يضعه [ل] – 6 وننقصه: وينقصه [ف، ل] / تحاذيه: يحاذيه [ف] / عدد: ناقصة [ل] / ونضربه: ويضربه [ل] – 8 فنضعها: فيضعها [ل] / الأخير: الاخر [ل] – 9 تحاذيه: يحاذيه [ل] – 11 نضع: يضع [ف]

أخرى، ويُنقل الثاني بمرتبةٍ، ثم نضع المطلوب الثالث وهو الواحد، ونعمل به مثل العمل المذكور، فيحصل السطر الأعلى بهذه الصورة ٣٢١ وهو أحد الجوابين، فننقصه من عدد الجذور المذكورة في السؤال، فما بقي فهو الجواب الآخر.

وإنما وجب العمل هكذا لأن المسطّح الحاصل من ضرب الجذر في عدد الجذور مركب من المال والعدد. فالمسطّح أزيد من العدد بالمال، فيحتاج أن نزيد المال على العدد، ويقسم المجموع على عدد الجذور ليخرج الجذر. ومنحطُّ المال يقع مقابلَ الجذر الأخير، فنضع عدد الجذور على رسم المقسوم عليه، ونضع مطلوب القسمة في الجذر الأخير، ويحتاج أن نزيد / مربّعه على العدد، ونضربه في مراتب عدد الجذور ويُنقص حاصلُ ل – ٥١ – ظ الضرب من سطر العدد. لكنّا لو نقصنا المطلوبَ من عدد الجذور، ثم ضربناه في البقية، ونقصنا حاصل الضرب من العدد؛ كان ذلك مغنياً عن الضرب أولاً للزيادة، ثم الزيادةِ، ثم الضربِ للنقصان، ثم النقصانِ، لأنّا إذا / نقصنا المطلوبَ من عدد الجذور وضربناه في البقية كان حاصلُ ف – ٦ – ظ الضرب أقلَّ بمربع المطلوب. فالحاصلُ الناقص بمربع المطلوب إذا نقصناه من العدد يبقى في بقية العدد زيادةٌ بمربع المطلوب. وإذا لم نَزِدْ مربع المطلوب على العدد فقد نَقصنا مربّع المطلوب من المسطّح. فلهذا وضعنا المطلوب ونقصناه أولاً من عدد الجذور وضربناه في الباقي، ونقصنا حاصلَ الضرب من العدد. ثم إذا نقلنا المقسوم عليه ونقصنا هذا المطلوبَ كرّةً أخرى منه – لأنا نحتاج أن يزيد ضربُ المطلوب الثاني في ضعف المطلوب

3 فننقصه: فينقصه [ف، ل] – 5 الحاصل: الماصل [ل] – 6 مركب: تركب [ل] – 7 نزيد: يزيد [ل] – 8 مقابل الجذر: الجذر ناقصة [ف] / ومنحط ... الأخير: هذا القول يصح في هذا المثال وقد لايصح في أمثلة أخرى كما في المعادلة $455765x = 956655 + x^2$ وجذراها هما 21 و 45555. ومال 21 لا يقع مقابل الجذر الأخير / فنضع: فيضع [ل] – 9 ونضع: ويضع [ل] – 10 نزيد: يزيد [ل] / مربعه: مربعة [ل] – 12 مغنياً: معينا [ف] – 13 للنقصان: النقصان [ف] – 16 نزد: يزد [ل] – 18 وضربناه: ومرتباه [ل] – 19 ونقصنا: نقصنا [ف، ل] – 20 نحتاج: يحتاج [ف، ل]

الأول على العدد – فإذا حصل نقصانُ ضعفِ المطلوب الأول من عدد الجذور، ثم ضربنا المطلوبَ الثاني في البقية ونقصنا حاصلَ الضرب من العدد؛ فيكون في بقية العدد / أيضاً زيادة بمقدار ضرب المطلوب الثاني (ل – ٥٢ – و) في ضعف المطلوب الأول. وإذا لم نزدْ ضرب المطلوب الثاني في ضعف المطلوب الأول على العدد، نقصناه من المسطّح، ثم يُنقص المطلوب الثاني من السطر الأسفل؛ لأنه إذا كان منقوصاً منه، ثم نضربه في البقية ويُنقص المبلغُ من العدد، يبقى في بقية العدد زيادة بمقدار مربعه. وعملُ سائرِ المراتب بيانُها على هذا الوجه.

المسألة الرابعة: مكعبٌ وأموالٌ يعدل جذوراً.

فترجع المسألة إلى المسألة: مالٌ وجذورٌ يعدل عدداً.

وليكن آ هو الكعب، و ب أموالٌ جسميةٌ عددُها عددُ الأموال المذكورة في السؤال، و جـ جذور جسمية عددُها عددُ الجذور المذكورة في السؤال، و د مالٌ سطحي، و هـ جذورٌ سطحيةٌ عددُها مثل عدد الأموال الجسمية، و ز وحداتٌ سطحيّةٌ عددُها مثلُ عدد الجذور الجسمية التي في جـ. وليكن ح مالاً واحداً جسمياً، و ط جذراً واحداً جسمياً، و ل واحداً سطحيّاً، و ك جذراً واحداً سطحياً. فلأن نسبة المكعب إلى ‹ الجذر › الواحدِ الجسميّ – وهو نسبة آ إلى ط – كنسبة المال الواحد السطحيّ إلى الواحد السطحيّ، وهو نسبة د إلى ل، ونسبة ط إلى جـ – وهو نسبة الجذر الواحد الجسميّ إلى عدة الجذور الجسمية – / كنسبة ل (ل – ٥٢ – ظ)

4 نزد: يزد [ل] – 5 نقصناه: فنقصناه [ف. ل] – 9 المسألة الرابعة: ناقصة [ل] – 10 فترجع: فيرجع [ف. ل] / إلى المسألة: الى مسئلة [ف] – 14 وحدات: وحدان [ف. ل] – 19 ل: ا [ل]

إلى ز، فبالمساواة: نسبة ا إلى ج كنسبة د إلى ز. ولأن نسبة ب إلى ح كنسبة ه إلى ك ونسبةَ ح إلى ط كنسبة ك إلى ل، ونسبةَ ط إلى ج كنسبة ل إلى ز فبالمساواة: نسبة ب إلى ج كنسبة ه إلى ز. وقد كانت نسبة ا إلى ج كنسبة د إلى ز، فيكون نسبة مجموع ا ب إلى ج كنسبة مجموع د ه إلى ز. لكنّ مجموع ا ب – وهو المكعب والأموالُ الجسمية – يعدل ج، وهو الجذور الجسمية. فمجموع د ه – وهو المال السطحيّ والجذور السطحية – يعدل ز، وهي الآحاد السطحية على عدّة ج. فإذا كان ا كعبا و ب أموالاً جسمية و ج جذوراً جسمية، ومطلوبُنا الجذر الواحد الجسميّ، فنأخذ د مالا سطحيا، و ه جذوراً سطحية بعدّة أموال ب، و ز آحاداً سطحية بعدّة ج، واستخرجنا الجذر الذي ماله د، وعدّة جذوره بعدّة ه، يعدل عدد ز المسطّح. فقد استخرجنا الجذر الجسميّ الذي هو المطلوب؛ وذلك ما أردنا بيانه.

ا

ط

ب

ح

ج

د

ل

ه

ز

2 كَ (الأولى): ر [ف، ل] – 9 فنأخذ: فيأخذ [ف، ل]

المسألة الخامسة: أموالٌ وجذورٌ يعدل مكعباً.

فترجع المسألةُ إلى المسألة: جذورٌ وعددٌ يعدل مالاً.

فليكن ا جذوراً جسمية، و ب أموالاً جسمية، وجـ مكعباً، ود آحاداً سطحية بعدّة جذور ا، وهـ جذوراً سطحية بعدة أموال ب، و ز / مالاً ‹ سطحياً ›. فبمثل ما تقدم نبيّن أن نسبة مجموع ا ب إلى جـ كنسبة مجموع د هـ إلى ز. لكنّ مجموع ا ب يعادل جـ، فمجموع د هـ يعادل ز. فنستخرج المطلوب بمسألة: جذور وعدد يعدلُ مالاً؛ وذلك ما أردنا بيانه. ل - ٥٣ - و

ا

ب

جـ

د

ه

ز

المسألة السادسة: مكعبٌ وجذورٌ يعدل أموالاً.

/ فترجع المسألة إلى مسألة: مالٌ وعددٌ يعدل جذوراً. ف - ٧ - و

فليكن ا مكعبا، وب جذوراً جسمية، وجـ أموالاً جسمية، ود مالاً سطحياً، وهـ آحاداً سطحية بعدّة ب، وز جذوراً سطحية بعدّة جـ. فنبيّن بمثل ما تقدم أن نسبة مجموع ا ب إلى جـ كنسبة مجموع د هـ إلى ز، فيكون: مالٌ سطحي وآحادٌ سطحية بعدّة ب يعدل جذوراً سطحية بعدّة جـ. فإن خرج ‹ المطلوب › صحيحَ الوجود غيرَ مستحيلٍ فقد خرج الجواب

1 المسألة الخامسة: ناقصة [ل] – 2 فترجع: فيرجع [ف] / إلى المسألة: إلى مسئلة [ف] – 7 فنستخرج: فيستخرج [ل] – 9 المسألة السادسة: ناقصة [ل] – 10 فترجع: فيرجع [ف. ل] – 12 آحاد سطحية: آحاد [ل]

بمسألة: مالٌ وعددٌ يعدل جذوراً؛ وإن كان مستحيلاً فأصل السؤال مستحيلٌ؛ وذلك ما أردنا بيانَه.

〈معادلات الدرجة الثالثة〉

وأما المسائل التي يجتمع فيها الكعْب مع العدد؛ فمنها ما لا يقع فيها سؤالٌ مستحيل، ومنها ما يقع.

أما التي لا يقع فيها فهي ثماني مسائل:

المسألة الأولى: مكعبٌ وجذورٌ يعدل عدداً.

فليكن ا ب جذرَ عددِ الجذور، ومربّعُ هـ واحداً سطحياً، وم ن / بعدّة آحادِ العدد، حتى يكون مربع هـ في ارتفاع م ن هو العدد. وليكن ل - ٥٣ - ظ نسبةُ الواحد الخطيّ - وهو ضلع مربع هـ - إلى ا ب كنسبة ا ب إلى خط ع. فنسبة الواحد السطحيّ - وهو مربع هـ - إلى مربع ا ب كنسبة الواحد الخطيّ - وهو ضلع مربع هـ - إلى خط ع. ونجعل نسبة م ن إلى ا ج كنسبة ع إلى الواحد الخطيّ. فلأن نسبة ع إلى ضلع مربع هـ كنسبة

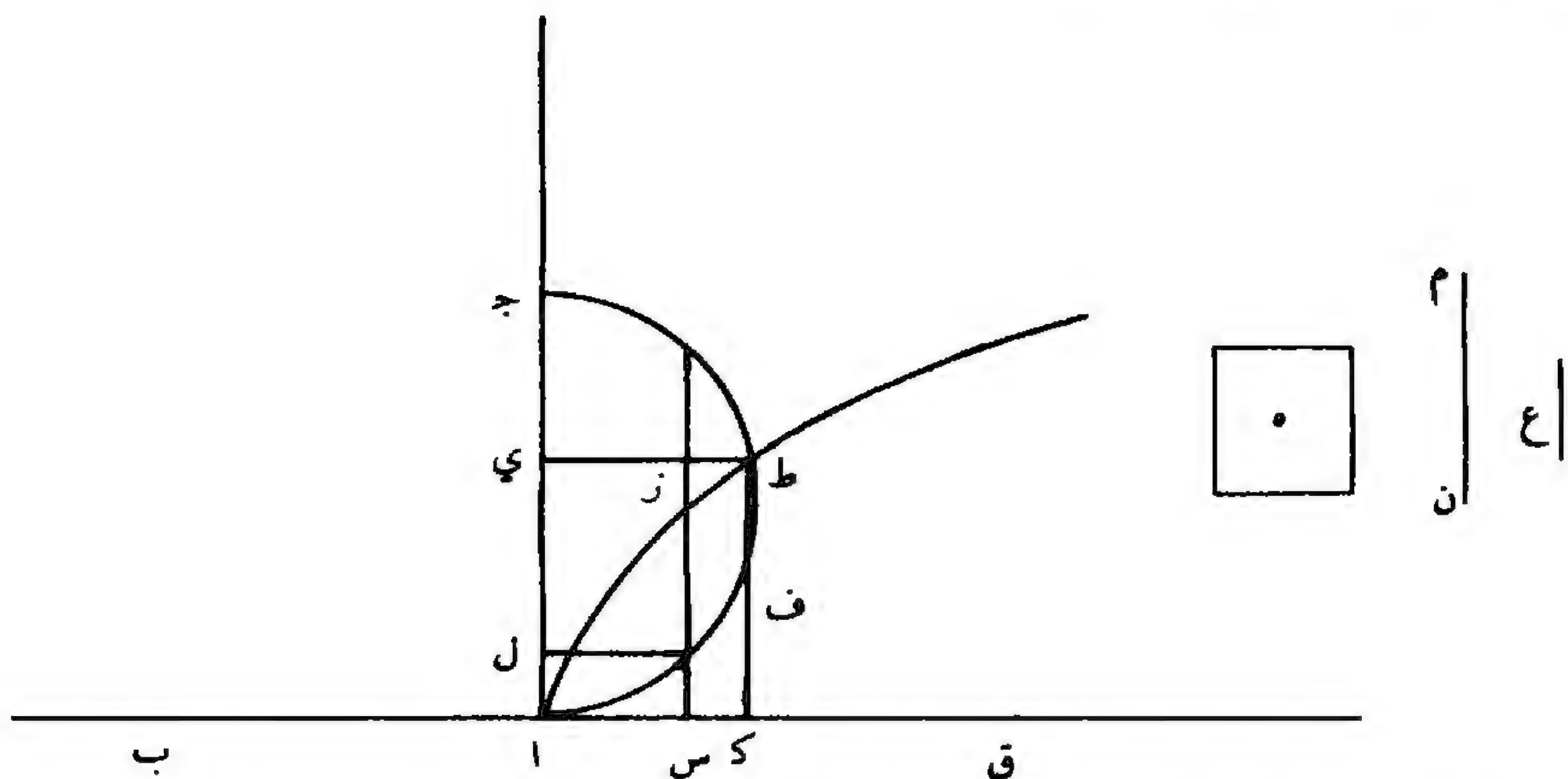
12 خط ع: ع ناقصة [ل]

مربع ا ب إلى مربع هـ ؛ فنسبة مربع ا ب إلى مربع هـ كنسبة م ن إلى ا ج ، فمربّع ا ب في ا ج مثلُ مربع هـ في م ن. فمربّع ا ب في ا ج مثل العدد.

فنعملْ على ا ج نصف دائرة، ونعمل قِطْعاً مكافئاً رأسُه نقطة آ ، وسهمه ا ق على استقامة ا ب ، وضلعه القائم مثل ا ب ؛ فيماسّه ا ج عند نقطة آ. ونفرض نقطة لَ بحيث يكون ا ل أقلَّ من كل واحدٍ من ا ب ل ج ، ونُخرج عمود ل ف على ا ج. فلأن ضرب ا ل في ل ج مثل مربع ل ف ، فنسبة ا ل إلى ل ف كنسبة ل ف إلى ل ج. فنسبة مربّع ا ل إلى مربع ل ف كنسْبة ا ل إلى ل ج ؛ وا ل أصغر من ل ج ، فمربّع ا ل أصغر من مربع ل ف. ولأنّا نُخرج من نقطة فَ عمود ف س على ا ب ؛ فلأن ا ب أعظم من ا ل وا ل أصغر من ل ف فنسبة ا ب إلى / ا ل أعظم من نسبة ا ل إلى ل ف ، بالخلْف. فضربُ ا ب في ل - ٥٤ - و ل ف - أعني ا س - أعظم من مربع ا ل ، أعني ‹ مربّع › ف س ، بالخلْف. لكن ضرْب ا ب في ا س مثلُ مربع خط الترتيب الذي يخرج من سَ. فخط ف س أصغر من خط الترتيب، فالعمود الذي يخرج من نقطة سَ حتى يلقى القطْع يجاوز نقطة فَ ويدخل الدائرة؛ وإلّا لكان ل ف ‹ نصف › قطر الدائرة. هذا خلْف. فيكون محيط القطع فى ذلك الموضع داخلاً في الدائرة، فإذا أخرج القطْع بغير نهاية قَطَع الدائرة. وليكن على نقطة طَ. ونُخرج عمود ط ك على السهم، وعمود ط ي على قطر الدائرة. فلأن ضرب ا ب في ا ك - أعني ي ط - مثل مربّع ك ط ، أعني مربّع ا ي ، فنسبة ا ب إلى ا ي كنسبة ا ي إلى ط ي.

4 آ : اب [ل] - 6 ونفرض: ويفرض [ل] - 6 ا ل : ناقصة [ل] - 8 ا ل : ا ن [ل] - 10 ف س : فيعد [ل] - 14 يخرج: نخرج [ف. ل] - 15 يخرج: نخرج [ف. ل] - 18 بغير: يصير [ف] يصر [ل] - 19 ط ي : ط جـ [ل]

ولأن ضرب ا ي في ي ج مثل مربّع ط ي فنسبة ا ي إلى ط ي كنسبة ط ي إلى ي ج. فخطوط ا ب ا ي ط ي ي ج الأربعة متوالية على النسبة، فضرب مربّع ا ب الأول في ي ج الرابع مثلُ مكعب ا ي الثاني، لِما مرّ في مسألة: مكعب يعدل عدداً. فإذا جعلنا خط ا ي جذراً فيكون ضرب مربّع ا ب في ا ي جذوراً بالعدّة المذكورة في السؤال. وقد تبيّن / أن مربّع ا ب في ي ج مثل مكعب ا ي؛ فيكون ضربُ مربّع ل - ٥٤ - ظ ا ب في ا ي وفي ي ج مثلَ مجموع الجذور مع مكعب ا ي. وقد تقدم أن مربّع ا ب في ا ج - أعني في ا ي وفي ج ي - مثلُ العدد المذكور في السؤال، فيكون مثلَ مكعب ا ي مع مجموع الجذور بالعدّة المذكورة في السؤال. / فقد وجدنا خطاً وهو ا ي يكون مكعبُه وضربه في عدد الجذور ف - ٧ - ظ مثلَ العدد المسؤول عنه.



وأما استخراج المطلوب، فنضع العدد على التخت، ونعدّ مراتبه بكعبٍ، ولا كعبٍ، وكعب، ونضع أصفار الكعب ونعدّ مراتبه أيضاً بجذرٍ ولا جذرٍ، إلى أن ننتهي إلى الجذر السَّميّ للكعب الأخير، ونعدّ

3 مربع: فربع [ل] / ا ي: ناقصة [ف] – 7 تقدم: يقدم [ل] – 10 مكعبه: مكعبة [ل] – 12 فنضع: فيضع [ل] – 13 ونضع: ويضع [ل] – 14 ننتهي: ينتهي [ف، ل]

عدد الجذور أيضاً بجذرٍ ولا جذرٍ، فالمرتبة السَّميّة للجذر الأخير من هذه الجذور هي آخر مراتب جذر عدد الجذور؛ فيكون للمسألة صور ثلاث:

الصورة الأولى:

أن يكون الجذر السّميّ للكعب الأخير أرفع من آخر مراتب جذر عدد الجذور مثل قولنا: مكعبٌ وستّة وثلاثون جذراً يعدل عدد ثلاثة وثلاثين ألفَ ألفٍ وسبعةٍ وثمانين ألفاً وسبعمائةٍ وسبعةَ عشرَ.

فنعدُّ ما بين الجذر السَّميّ للكعب الأخير وبين مرتبة آخر عدد الجذور، ونعدّ من مرتبة الكعب الأخير في جهة الانحطاط بتلك العدّة، فحيث نتهي ننقل إليه آخر مراتب عدد الجذور / فيكون بهذه الصورة ٣٣٠٨٧٧١٧ ٣٦، ل - ٥٥ - و
ثم نرد عدد الجذور إلى الثلث، أعني نأخذ ثلث عدد الجذور، ونضعه مكان عدد الجذور إن كان آخرُ مرتبته هو آخر مراتب عدد الجذور؛ وإلا فنحطّه عنه بقدر انحطاطه عنه. ونستخرج مطلوب الكعب ونضعه في الكعب الأخير، وهو ثلاثة؛ وينقص مكعبه من العدد، ونضربه في ثلث عدد الجذور، وينقص ثلاثة أمثال كلّ ضربةٍ من العدد؛ ثم نضع مربع المطلوب في السطر الأسفل بحذائه، وننقل المطلوب بمرتبتين، والسطرَ الأسفل بمرتبةٍ؛ ونضع المطلوب الثاني، وينقص مكعبه من العدد، ونضربه في المطلوب الأول، ونزيد المبلغ على الأسفل، ونضربه فى السطر الأسفل، ويُنقص ثلاثة أمثال كل ضربةٍ من العدد، فيحصل بهذه الصورة: ٣٢ ٣٠٨١٩٧ ١٢ ٩٦، ثم نزيد مربّع المطلوب الثاني على السطر الأسفل

2 فيكون ... ثلاث: ناقصة [ل] – 3-5 الصورة ... عدد الجذور: ناقصة [ل] – 7 فنعد: فنعده [ف]، فيعده [ل] / السميّ: المسمى [ل] – 9 نتهي: ينتهى [ف] / ننقل: ينقل [ف] – 10 نرد: نزد [ف]، يزد [ل] / نأخذ: يأخذ [ف] – 12 ونستخرج: وتستخرج [ل] – 13 ونضربه: ويضربه [ل] – 14 نضع: يضع [ل] – 15 وننقل: وينقل [ف، ل] – 17 ونزيد: ويزيد [ل] – 19 نزيد: يزيد [ل]

ونضربه في المطلوب الأول ونزيد المبلغ على الأسفل، ويُنقل السطر الأعلى بمرتبتين، والأسفلُ بمرتبة. ونضع مطلوباً آخر – وهو الواحد – ويُنقص مكعبه من العدد، ونضربه في المطلوب الأول والثاني، ونزيد المبلغ على الأسفل ونضربه في الأسفل، ويُنقص ثلاثة أمثال / كلّ ضربةٍ من العدد؛ ل – ٥٥ – ظ فيرتفع العددُ، ويحصل السطر الأعلى بهذه الصورة ٣٢١ وهو الجذر المطلوب.

الصورة الثانية:

أن يكون آخرُ مراتب جذر عددِ الجذور أرفعَ من الجذر السَّميّ للكعب الأخير، مثلُ قولنا: كعبٌ وجذور بهذه العدّة ١٢٠٣٣٢١ يعدل عدداً بهذه الصورة: ٤١٩٣٤٢٢٠٢.

فنضع ثلث عدد الجذور على رسمِ وضع المقسوم عليه، ونطلب أكثر عددٍ يمكن أن يُضرب في آخر ثلثِ عددِ الجذور، ويُنقص من ثلثِ ما فوقَه؛ وإن لم يمكن ذلك يُنقل مراتبُ ثلثِ عددِ الجذور بمرتبةٍ، فيحصل بهذه الصورة: $\frac{٤١٩٣٤٢٢٠٢}{٤٠١١٠٧}$، ثم يُطلب أكثر عددٍ شأنُه مما ذكرناه، وهو ثلاثة؛ ونضعه فى الكعب الأخير، ويُنقص مكعبه من العدد، ونضربه في مراتب ثلثِ عدد الجذور، ويُنقص ثلاثةُ أمثال كلّ ضربةٍ من العدد؛ ثم نزيد مربعه على الأسفل؛ ثم ننقل ‹السطر الأعلى› بمرتبتين، والسطرَ الأسفلَ بمرتبةٍ؛ ونعمل العمل السابق إلى آخرِه، فيحصل السطر الأعلى بهذه الصورة: ٣٢١.

1 ونزيد: ويزيد [ل] – 2 ونضع: ويضع [ل] – 3 ونزيد: ويزيد [ل] / المبلغ على: في هامش [ل] – 7 الصورة الثانية: ناقصة [ل] – 11 فنضع: فيضع [ل] / ونطلب: ويطلب [ل] – 15 ونضعه: ويضعه [ل] / الكعب: اللكعب [ف] – 17 نزيد: يزيد [ل] / ننقل: ينقله [ف. ل] – 19 الصورة ٣٢١: الصورة ٢٢١ [ف، ل]

الصورة الثالثة:

ألّا يكون الجذر السميّ للكعب الأخير أرفعَ من آخر مراتب جذر عددِ الجذور / [ل - ٥٦ - و]، ولا أنزَلَ منه.

فنضع آخر مراتب ثلثِ عدد الجذور مقابلَ الكعب الأخير، ونعمل العمل السابق.

وإنما سلكنا طريق العمل كذلك؛ لأن العدد مركب من مكعب الجذر المطلوب، ومن المسطّح الحاصل من ضرب الجذر في عدد الجذور؛ فيحتاج أن يتركّب العمل - الموصل إلى المطلوب - من القسمة ومن استخراج ضلع الكعب. فإذا كان / [ف - ٨ - و] الجذر السميّ للكعب الأخير أرفعَ من آخر مراتب جذر عدد الأجذار، كما في الصورة الأولى، فيكون مالُ آخر الجذر المطلوب أرفعَ من آخر عدد الجذور، ويكون حاصلُ ضربه في ماله أرفع من ضربه في آخر عدد الجذور. وضربُه في ماله - وهو مكعبه - يقع في المرتبة المقابلة للكعب الأخير. فضربُه في آخر عدد الأجذار - وهو آخر المسطح - يقع أنزَلَ منه؛ فآخر هذا العدد إنما هو آخر الكعب. فإذا استخرجنا مطلوب الكعب - وهو أرفع مراتب الجذر المطلوب - ووضعناه مقابلَ الكعب الأخير، وعلمنا أن هذا المطلوب من المرتبة السميّة للكعب الأخير؛ علمنا أن منحطّ مالِه من أيّ مرتبة يكون. ومعلومٌ أن أرفع مراتب عدد الجذور من أيّ مرتبةٍ، فنَقَلْنا أرفعَ مراتب عددِ / [ل - ٥٦ - ظ] الجذور إلى المرتبة

1 الصورة الثالثة: ناقصة [ل] - 2 مراتب: المراتب [ف] - 3 الجذور: في أسفل الصفحة تحت النص [ل] - 4 فنضع: فيضع [ل] / الكعب: كعب [ل] - 5 العمل السابق: هذا صحيح في حالات وغير صحيح في حالات أخرى، حيث يجب أن نستخدم في آنٍ واحد المكعب والمسطّح الناتج من ضرب الجذر في عدد الجذور، ويشرح الطوسي ذلك في أمثلة أخرى - 6 مركب: المركب [ل] - 8 يتركب: يركب [ف]، تركب [ل] - 11 من آخر: من اجزا [ف] - 12 في آخر: من آخر [ل] - 13 فضربه: فبضربه [ف] - 16 الأخير: الآخر [ل] - 18 فنقلنا: فيقلنا [ل]

المنحطة عن مرتبة المطلوب وبقدر انحطاط مرتبة آخرِ عددِ الجذور عن منحطّ مال المطلوب؛ لأن منحطّ ضربِ هذا المطلوبِ في منحطّ مالِه واقعٌ في المرتبة التي هو فيها، فيكون منحطُّ ضربِه في أرفع مراتبِ عددِ الجذور منحطاً عن المرتبة التي هو فيها بقدر انحطاط المضروبيْن فيهما، أحدِهما عن الآخر. ولأنّا نحتاج أن نضرب المطلوبَ الأول في مالِه، ونُنقصه من العدد، ونضربه بعينه في عدد الجذور، وننقصه منه، فلو نقصنا مكعبَ المطلوب الأول ووضعنا ثلث عددِ الجذور، وضربنا المطلوب الأول فيه، ونقصْنا ثلاثة أمثال كلّ ضربةٍ من العدد؛ كان كذلك. ولأنّا نحتاج أن نضرب المطلوب الثاني في مال المطلوب الأول، ونُنقص ثلاثة أمثال كل ضربةٍ من العدد، ونضربه في المطلوب الأول، ثم في الحاصل، وننقص ثلاثة أمثال كلّ ضربة منه، ونضربه في عدد الجذور وننقصه منه، فلو وضعنا مالَ المطلوب الأول وضرْبه فيه مع ثلث عدد الجذور، وضربناه في المجموع، ونقصنا ثلاثة أمثال كلّ ضربةٍ من العدد؛ كان كذلك. فلهذا جمعنا مال المطلوب الأول وضرْبَ المطلوب الثاني في الأول، مع ثلث / عدد الجذور في السطر الأسفل. ل – ٥٧ – و

وأما الصورة الثانية: فلأن آخر جذرِ عددِ الجذور إذا كان أرفعَ من الجذر السَّمِيّ للكعب الأخير، كان آخرُ مراتب عدد الجذور أرفعَ من مال الجذر المطلوب، وآخرُ المسطّح حاصلٌ من ضرب أرفع مراتب الجذر المطلوب في أرفع مراتب عدد الجذور، وآخرُ المكعب من ضربه في آخر مراتب مالِه، فيكون آخرُ المسطّح أرفعَ من آخر المكعب، فيكون آخرُ العدد إنما هو

1 المطلوب: المقصود هنا المرتبة التي وضع فيها المطلوب الأول / وبقدر: بقدر [ل] – 2 في: من [ل] – 3 المرتبة: مرتبة [ف] – 5 نحتاج أن نضرب: يحتاج أن يضرب [ف، ل] – 8-9 نحتاج أن نضرب: يحتاج أن يضرب [ف، ل] – 9 وننقص: وينقص [ف، ل] – 10 ثم في: «في» تحت السطر [ف] / وننقص: وينقص [ف، ل] – 11 وننقصه: وينقصه [ف، ل] – 19 عدد: ناقصة [ف]

آخر المسطّح. فإذا كان آخر المسطّح معلوماً: فإذا قسمنا آخر المسطّح على آخر عددِ الجذور، فيكون مطلوبُ القسمة هو آخرَ الجذر المطلوب. و إذا حصل لنا أرفعُ مراتب الجذر علمنا أنه من أي مرتبة هو، ونريد أن نُنقص مكعبه من العدد، ومكعبُه واقع في مرتبة الكعب السميّ لمرتبته، فنضعه مقابلِ ذلك الكعب؛ لأن منحطّ ضربه في ماله واقعٌ في تلك المرتبة، وكذا منحطٌّ ضربِه في الصورة التي في تلك المرتبة من عدد الجذور. فإذا ضربنا هذا المطلوب في عدد الجذور، ونقصْنا الحاصلَ من مراتب العددِ، ثم نقصنا مكعب المطلوب من مرتبته؛ يكون العمل جارياً على قانون القسمة والمكعب؛ وبقية البيان ما مرّ.

وأما الصورة / الثالثة: فآخر العدد ليس آخرَ المسطّح مفرداً، ولا آخرَ ل – ٥٧ – ظ المكعب مفرداً؛ بل هو مختلط منهما. فنستخرج المطلوب ونضعه مقابل الكعب الأخير؛ لأن مكعب المطلوب واقع في تلك المرتبة، وضرْبَهُ في آخر عددِ الجذور أيضاً واقعٌ في تلك المرتبة. فينبغي أن يكون المطلوب بحالةٍ يُمكن نقصانُ مكعبه من تلك المرتبة مع نقصان ضرْبِه في عدد الجذور، ونعمل العمل السابق؛ وذلك ما أردنا بيانه.

المسألة الثانية: عددٌ وجذورٌ يعدل مكعباً.

فليكن مربع ا ب مساوياً لعدد الجذور، وليكن مربع كَ واحداً سطحياً، وخط عَ بعدّة آحاد العدد، حتى يكون مربع كَ في عَ هو العدد. وليكن نسبةُ الواحد الخطّيّ إلى ا ب كنسبة ا ب إلى يَ. فنسبة الواحد

3 ونريد: وزيد [ف] / ننقص: ينقص [ف، ل] – 4 مكعبه: ومكعبه [ل] – 5 وكذا: وكذى [ف. ل] – 9 القسمة: القسمية [ل] – 11 فنستخرج: فيستخرج [ف. ل] – 12 الكعب: اللكعب [ف] – 15 وهذا مثال معاكس على الصورة الثانية $x^3 + 100\,000\,x = 66\,176\,161$ – 16 المسألة الثانية: ناقصة [ل]

السطحيّ – وهو مربع كَ – إلى مربع ا ب كنسبة الواحد الخطّيّ – وهو ضلع مربع كَ – إلى يَ. ونجعل نسبة عَ إلى ا ج كنسبة يَ إلى الواحد الخطّيّ. فلأن نسبة يَ إلى ضلع مربع كَ كنسبة مربع ا ب إلى مربع كَ، فنسبة مربع ا ب / إلى مربع كَ كنسبة عَ إلى ا ج. فمربع ا ب في ا ج ف - ٨ - ظ مثل مربع كَ في عَ، فمربع ا ب في ا ج مثل العدد. ونجعل ا ج عموداً على ا ب، ونعمل قِطْعاً مكافئاً، رأسُه عند نقطة آ /، وسهمه ا هـ، ل - ٥٨ - و وضلعه القائم مثل ا ب، وليكن هو قطْعَ ا ز. ونعمل قطْعاً زائداً، رأسُه عند نقطة آ، وسهمه ا ق، ومُجانبه ا ج وهو قطْع ا د. ويُفصل ا س مثل ا ب ويُخرج عمود س م، وهو خط الترتيب في المكافئ، ونقطة مَ على محيط القطع المكافئ، ونُخرج من نقطة مَ عموداً على ا ق، وهو م ن. فلأنّ ضرْب القائم في ا س، أعني مربع ا س، مثلُ مربع س م؛ فـ ا س – أعني ن م – مثل س م، أعني ا ن.

ولأن خط الترتيب الذي يخرج من نقطة نَ * في القطْع الزائد يكون مربعُه مثلَ ضرب ج ن في ا ن، فمربّع خط الترتيب الذي يخرج ⟨ من ⟩ ن أعظمُ من مربع ن م، فخطّ ن م هو بعضُ خطِ الترتيب الذي يخرج من نقطة نَ *، فلا بدّ أن يتجاوز خطّ الترتيب نقطة مَ حتى ينتهي إلى محيط القطع الزائد. فنقطة مَ في داخل القطع الزائد.

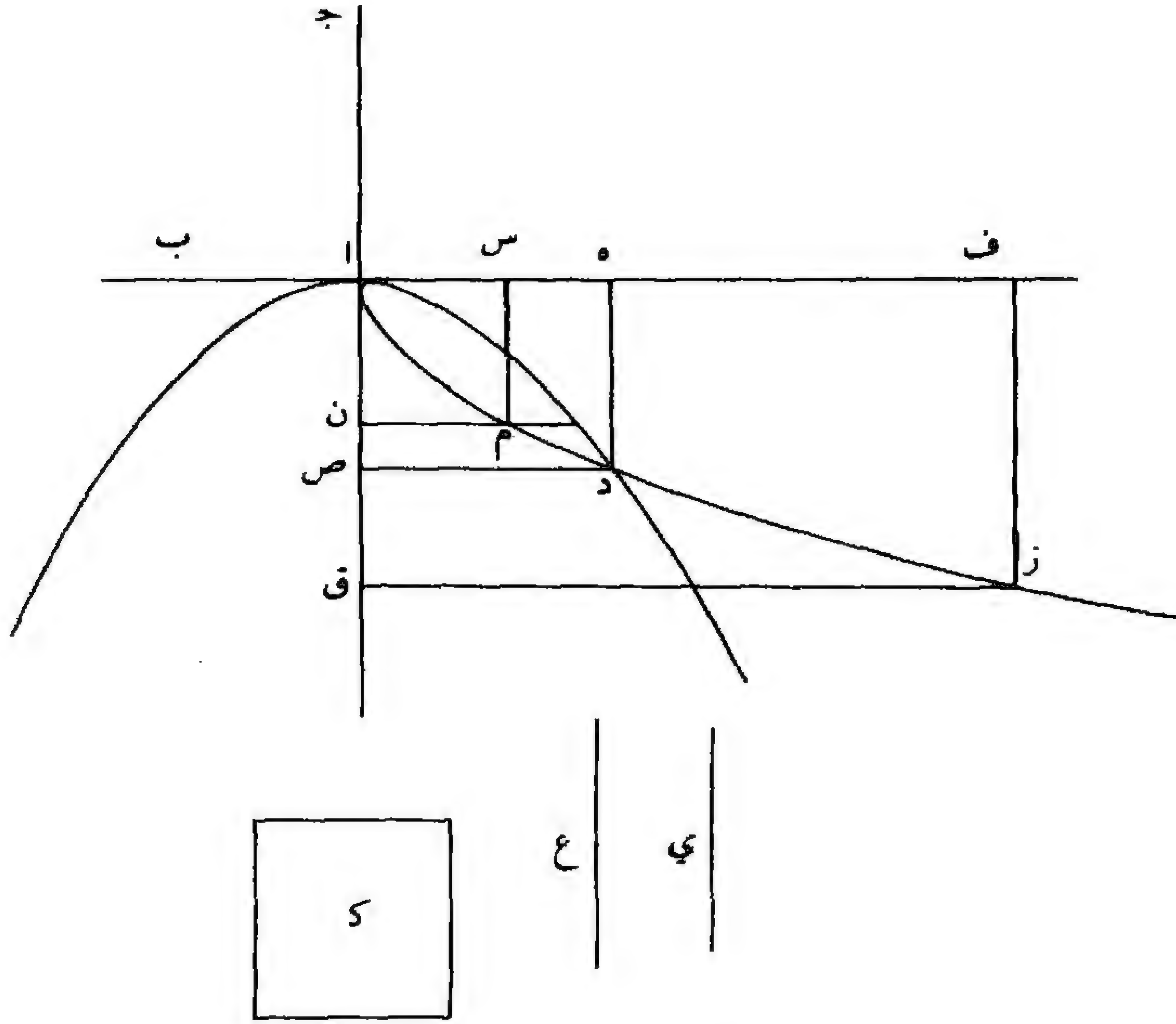
وأيضا فنفصل ا هـ أربعةَ أمثال ا ب ونزيد عليه زيادة حتى يبلغ ا ف، بحيث يكون ضرب ا ف في ا ب أعظمَ من مربع ا ج. ونخرج خط ترتيب ف ز إلى محيط القطْع المكافئ، ونخرج من نقطة زَ عموداً على

2 يَ: ك [ف] – 6 رأسه: هنا توقف ناسخ ف عن الكتابة. وحتى تبدأ مخطوطة ب سنعتمد على ل وحدها. ولهذا لن نلجأ إلى رمز ل في الصفحات التالية – 8 قطع ا د: قطع ا ه. وهو ممكن أيضا. وبدّلناه متابعة للأبجدية – 10 ونخرج: ويخرج – 11 م ن: م ق – 12 ا ن: ا ر – 13 ن: ق – 14 ن: ق – 16 ن: ق – 13-16 مابين النجمين أثبت مستدركاً في هامش المخطوط، ومذيلاً بكلمة «صح» مع بيان مكانه في السطر بالعلامة المتعارف عليها لدى النساخ – 16 فلا بد أن يتجاوز: فلا بد وأن تجاوز – 18 فنفصل: فيفصل – 19 ا ف (الأولى والثانية): ا ب

ا ق هو ز ق. فلأن ضرب ا ف في ا ب مثلُ مربع ز ف، فنسبة ا ف إلى ز ف كنسبة ز ف إلى ا ب. فنسبة مربع ا ف – أعني مربع ز ق – إلى مربع ز ف كنسبة ا ف إلى ا ب. فمربع ز ق أعظم من أربعة أمثال مربع ز ف. فخط ز ق أطول من مثليْ ز ف، أعني مثليْ ا ق. ولأن ضرب ا ب في ا ف أعظمُ من مربع ا ج، وهو مساوٍ لمربع / ز ف، ل – ٥٨ – ظ فمربع ز ف أعظمُ من مربع ا ج. فخط ز ف – أعني ا ق – أعظم من ا ج، فمِثْلا ا ق أعظم من ق ج، فخط ز ق – الذي هو أعظم من مثْلي ا ق – أعظم من ق ج، فمربّعه أعظم من مربع ‹ ق ج ›، فهو أعظم من ضرب ا ق في ق ج بكثير. لكن ا ق في ق ج مثلُ مربع خط الترتيب الذي يخرج من نقطة ق إلى محيط القطْع الزائد، فمربّع ز ق أعظم من ‹ مربع › خط الترتيب المذكور. فالعمود الذي يخرج من نقطة ق ينتهي أولاً إلى محيط القطْع الزائد، ويتجاوزه، ثم ينتهي إلى نقطة ز التي هي على محيط القطع المكافئ. فمحيط المكافئ عند نقطة ز خارجٌ عن القطع الزائد، وقد كان داخلاً فيه عند نقطة م، فلابد أن يقطعه؛ وليكن تقاطعهما على نقطة د. ونخرج عموديْ د ه د ص على السهمين. فنسبة ا ب القائم إلى د ه – أعني ا ص – كنسبة د ه إلى ا ه، أعني ا ص إلى د ص؛ ونسبة ا ص إلى د ص كنسبة د ص إلى ج ص. فخطوط ا ب ا ص د ص ج ص متوالية على النسبة. فضرْب مربع ا ب الأول في ج ص الرابع مثل مكعب ا ص الثاني، لما مرّ في مسألة: مكعب يعدل عدداً. لكن مربع ا ب في ج ص ينقسم إلى مربع ا ب في ا ج – وهو العدد المذكور في السؤال – وإلى مربع ا ب في ا ص وهو الجذر بالعدّة

2 ز ق: ا ز ق – 10 يخرج: نخرج – 11 يخرج: نخرج – 12 أولا: الاو / ويتجاوزه: وتجاوزه – 14 أن: وان – 15 فنسبة: فبقية – 19 الرابع: الواقع

المذكورة في السؤال. فقد وجدنا / خطاً وهو ا ص إذا جعلناه جذراً يكون ل – ٥٩ – و مكعبه مساوياً لضرب ذلك الجذر في عدد الجذور المذكورة في السؤال مع العدد، فالمكعب يعدل الجذور والعدد. وذلك ‹ ما › أردنا بيانه.



وأما استخراج المطلوب فنضع العدد على ‹ التخت ونعدّ مراتبه › بكعبٍ ولا كعبٍ وكعبٍ ونضع أصفار الكعب، ونعد العدد أيضاً بجذرٍ ولا جذرٍ، إلى أن ننتهي إلى الجذر السَّمِيّ للكعب الأخير، ثم نضع عدد الجذور ونعدّ مراتبه بجذرٍ ولا جذرٍ، فالمرتبة السَّمِيّة للجذر الأخير من هذه الجذور هي آخر مراتب جذرِ عددِ الجذور. فيكون للمسألة صور ثلاث :

3 فالمكعب: المكعبة – 4 فنضع: فيضع – 5 ونضع: ويضع – 6 ننتهي: ينتهي – 7 نضع: يضع

الصورة الأولى:

أن يكون الجذرُ السَّميُّ للكعب الأخير أرفعَ من آخرِ جذر عددِ الجذور، مثلَ قولنا: عددٌ بهذه الصورة: ٣٢٧٦٧٠٣٨، وتسعُمائة وثلاثةٌ وستون جذراً يعدل مكعباً. فنعدّ من الجذر السميّ للكعب الأخير إلى آخر مراتب عدد الجذور، ونعدّ من مرتبة الكعب الأخير بتلك العدّة في تلك الجهة. فحيث ينتهي ننقل إليه آخرَ عددِ الجذور ونردّه إلى الثلث فيكون بهذه الصورة: ٣٢٧٦٧٠٣٨ (٣٢١). ولأنّ الجذر السميّ للكعب الأخير هو الجذر الثالث، / وهو في مقابلة مرتبة عشرات الألوف، وهو أرفع من آخر ل - ٥٩ - ظ مراتب عدد الجذور الذي هو في المئات؛ عددنا من مرتبة الجذر السميّ للكعب الأخير إلى المئات. وعددنا أيضاً من مرتبة الكعب الأخير بتلك العدة فانتهى إلى عشرات الألوف؛ فوضعنا آخر ثلثِ عددِ الجذور في تلك المرتبة، ثم نضع مطلوب الكعب وهو الثلاثة مكان الصفر الأخير. وننقص مكعبه مما تحته. ونضربه في مراتب ثلث عدد الجذور، ونزيد ثلاثة أمثال كلّ ضربةٍ على العدد؛ ونضع مربع المطلوب تحت العدد بحذائه على هذه الصورة ٦٠٥٥٩٣٨ (فوقه ٣ ٥ ٥، وتحته ٣٢١) وننقص ثلث عدد الجذور من مربع المطلوب، فنبطل ثلث عدد الجذور فيبقى بهذه الصورة ٦٠٥٥٩٣٨ (فوقه ٩ ٣ ٥ ٥، وتحته ٨٩٦٧٩)، وينقل الأعلى بمرتبتين والأسفل بمرتبة؛ ثم نضع المطلوب الثاني اثنين وننقص مكعبه من العدد، ونضربه في المطلوب الأول، ونزيد المبلغ على الأسفل، ونضربه في الأسفل، وننقص ثلاثة أمثال كلّ ضربةٍ من العدد، ونزيد مربّعه على الأسفل، ونضربه في

6 ونرده: ويرده – 7 ولأن: لأن / هو: وهو، الواو فوق كلمة «هو» – 9 هو: فوق السطر / عددنا: فعددنا، التي تقرأ «فعددنا». ولا لزوم للفاء. وقوله «لأنّ...» متعلق بعددنا – 12 نضع: يضع / ننقص: وينقص – 15 وننقص: وينقص / فنبطل: ويبطل – 17 نضع: يضع / اثنين: اثنان / وننقص: وينقص / يمكننا أن نعطى هذا المثال المعاكس على الصورة الثانية $x^3 = 9999x + 7284142$، وهنا نجد: $x = 211$ / ونضربه: ويضربه – 18 ونضربه: ويضربه / وننقص: وينقص – 19 ونضربه: ويضربه

المطلوب الأول، ونزيد المبلغ على الأسفل / ، وننقل الأعلى بمرتبتين والأسفلَ بمرتبةٍ؛ ونضع مطلوباً آخر هو الواحد، وننقص مكعبه من العدد، ونضربه في المطلوب الأول والثاني، ونزيد المبلغ على الأسفل ونضربه في الأسفل وننقص ثلاثة أمثال كلّ ضربةٍ من العدد، فيحصل السطر الأعلى بهذه الصورة ٣٢١ وهو الجذر المطلوب. ل - ٦٠ - و

الصورة الثانية:

أن يكون آخرُ مراتب جذر عدد الجذور أرفعَ من الجذر السميّ للكعب الأخير، كما في قولنا: جذور بهذه العدة ١٠٢٠٢١ وعدد بهذه الصورة ٣٢٧٤٢٠ يعدل مكعباً. فنعدّ عدد الجذور بجذرٍ ولا جذرٍ، ونزيد في العدد مراتبَ بأن نضع قدّامه أصفاراً، ونطلب أرفع الجذور المقابلة لعدد الجذور، ثم نضع أصفار الكعب ونطلب الكعب السميَّ لذلك الجذْر ‹الأخير›، وننقل المرتبة المحاذية لذلك الجذر من عدد الجذور، إلى محاذاة الكعب السميّ له، ونضع سائر مراتب عدد الجذور على الترتيب، فيكون بهذه الصورة ٣٢٧٤٢٠٠٠ / ١٠٢٠٢١، لأن أرفع الجذور التي تقابلها هو الثالث، وهو في مقابلة عشرات الألوف، وسميُّه الكعب الثالث وهو في ألوف الألوف، فنقلنا مرتبة / عشرات الألوف من عدد الجذور إلى محاذاة الكعب الثالث، ونطلب أكثر عددٍ يمكن نقصانُ مربعه من عدد الجذور – وهو الثلاثة – فنضعه في الكعب الثالث، ونضربه في مراتب عدد الجذور، ونزيد المبلغ ل - ٦٠ - ظ

1 وننقل: وينقل – 2 ونضع: ويضع / وننقص: وينقص / مكعبه: مكعبة – 3 ونضربه: ويضربه – 4 ونضربه: ويضربه / وننقص: وينقص – 10 نضع: يضع / ونطلب: ويطلب / الجذور: الخدود / لعدد: العدد – 11 نضع: يضع / ونطلب: ويطلب – 12 وننقل: وينقل / المحاذية: المجاربته / محاذاة: مجازاه – 13 ونضع: ويضع – 14 تقابلها: يقابلها. والضمير هنا يعود على المرتبة المحاذية – 16 فنقلنا: فيقلنا / محاذاة: مجازاة – 17 ونطلب: ويطلب – 18 فنضعه: فبقيه / ونضربه: ويضربه

على العدد، وننقص مكعبه من العدد، ونرد عدد الجذور إلى الثلث فيكون مبتدئاً من مرتبة المئات على هذه الصورة ٣٩٣٣٧٧٢
٣٤٠٠٧
، ثم نضع مربع المطلوب بحذائه تحت العدد، وينقص منه ثلث عدد الجذور، ويبطل السطر الذي هو ثلث عدد الجذور، وننقل الأعلى بمرتبتين، والأسفلَ بمرتبةٍ؛ ونعمل العمل السابق إلى آخره.

الصورة الثالثة:

ألّا يكون الجذر السميّ للكعب الأخير أرفع من آخرِ جذرِ عدد الأجذار ولا أنزَل. فننقل آخر عدد الجذور إلى محاذاة الكعب الأخير، ونستخرج أكثر عدد نضربه في آخر مراتب عدد الجذور ونزيده على العدد، وننقص مكعبه مما تحته من سطر العدد، ونعمل العمل السابق إلى آخره.

وإنما عملنا كذلك لأن العدد بعضُ المكعب، والبعضُ الآخرُ من ضرْب الجذر في عدد الجذور؛ فعدد / الجذور بعضُ المال، وبعضُه الآخر هو ل - ٦١ - و
الذي ضُرب في الجذر المطلوب حتى حصل العدد. فبعضُ مال المطلوب وبعض مكعبِه معلومان، فنحتاج أن نستخرج المطلوب منهما. فإذا كانت المرتبة السميّة لجذر آخر عدد الجذور أنزلَ من المرتبة السميّة للكعْب الأخير كما في الصورة الأولى، فالعدد المقابل للكعب الأخير إنما هو من مكعبِ أرفعِ مراتب الجذر المطلوب، لأن أرفع مراتب المال ليس في عدد

1 وننقص: وينقص – 2 نضع: يضع – 3 تحت: نحث – 4 وننقل: وينقل – 8 أنزل: اندل / فننقل: فينقل / محاذاة: مجازاة – 9 ونستخرج: ويستخرج / نضربه: يضربه / ونزيده: ويزيده – 10 وننقص: وينقص / مكعبه: مكعبة – 12 بعض: يقض – 15 نستخرج: يستخرج – 16 لجذر آخر عدد الجذور: لعله أراد أن يقول: للجذر الأخير لعدد الجذور – 17 الأخير: الاخر – 18 الجذر المطلوب: هذا تفكير دائري، وهو من الأمور التي يقتضي تبريرها

الجذور؛ لأن ‹آخر› جذر عدد الجذور أنزلُ من المرتبة السميّة للكعب الأخير، فيكون آخر عدد الجذور أنزلَ من مربع المرتبة السميّة للكعب الأخير. فأرفعُ مراتب مال الجذر المطلوبِ ليس موجوداً في عدد الجذور. فهو موجود في القسم الذي ضُرب في الجذر المطلوب حتى حصل العدد ضرورةً. فيكون مكعب أرفعِ مراتبِ الجذر المطلوبِ حاصلاً في العدد، ويكون مقابلاً للكعب الأخير بالضرورة. ولأنّا إذا استخرجنا مطلوب الكعب ووضعناه مقابل الكعب الأخير، يكون هو آخرَ مراتب الجذر؛ لأن الأعداد الموجودة هناك هي أواخر المكعب، فمطلوب مكعبه / هو آخر ل - ٦١ - ظ الجذر؛ ثم نحتاج أن نضرب مراتب الجذر في مراتب عدد الجذور الذي هو بعض المال، ونزيد حاصل الضرب على العدد، حتى يحصل المكعب، ثم نعمل عمل الكعب. فإذا حصل لنا آخر الجذر المطلوب يجب أن نضربه في عدد الجذور، ونزيده على العدد، وننقص مكعبه منه. فإذا ضربناه في ثلث عدد الجذور وزدنا ثلاثة أمثال كلّ ضربةٍ على العدد، ونقصنا مكعبه منه، كان كذلك. والمطلوب الذي نستخرجه بعد ذلك ينبغي أن نضربه في مراتب عدد الجذور، ونزيد حاصل الضربات على العدد، ثم نضربه في مال المطلوب الأول ثم ننقص ثلاثة أمثال الضربات منه. فلو وضعنا مربّع المطلوب الأول تحت العدد، ونقصنا ثلث عدد الجذور منه، وضربنا المطلوب الذي نستخرجه في الباقي، ونقصنا ثلاثة أمثال الضربات من العدد، كان ذلك مغنياً عن الأمرين؛ لأنّا إذا نقصنا ثلث عدد الجذور

3 الجذر: الجذور – 5 مكعب: مكعبة – 7 ووضعناه: ووضعنا / الجذر: المقصود «الجذر المطلوب» – 8 مكعبه: مكعبة – 9 الجذر: المقصود «الجذر المطلوب» / نحتاج: يحتاج / نضرب: يضرب – 11 نضربه: يضربه – 12 وننقص: وينقص – 13 مكعبه: مكعبة – 14 ينبغي: ينتى / نضربه: يضربه – 16 ننقص: ينقص – 18 المطلوب: أي المطلوب الثاني / نستخرجه: يستخرجه

من مال المطلوب الأول؛ يكون المطلوب الذي نستخرجه ونضربه في الباقي؛ فثلاثة أمثال هذا الضرب يكون ناقصاً عن ثلاثة أمثال ضربه في المال – الذي لم ينقص منه ثلث عدد الجذور – بمقدار ضرب هذا / المطلوب في عدد الجذور. فإذا نقصناه من العدد، فبمقدار النقصان ل – ٦٢ – و
الذي يكون في المنقوص يبقى الزيادة في المنقوص منه؛ وإذا لم نزد ضرب المطلوب – الذي نستخرجه – في عدد الجذور على العدد؛ فقد نقصنا ثلاثة أمثال ضرب هذا المطلوب في المنقوص من مربع المطلوب الأول، فلهذا السبب ننقص ثلث عدد الجذور من مال المطلوب الأول، حتى إذا استخرجنا المطلوب الثاني، وعملنا معه عملَ الكعْب فعند ضربه في باقي مربع المطلوب الأول، ونقصان ثلاثة أمثال الضربات؛ يكون بمنزلة ضربه في عدد الجذور وزيادته على العدد، ثم عمله عملَ المكعب. وعلى هذا يستمر العمل إلى آخره.

وأما الصورة الثانية: فمربع آخر الجذر المطلوب يكون في عدد الجذور؛ لأنه لو كان في القسم الذي ضُرب في الجذر المطلوب حتى حصل العدد لكان مكعبه حاصلاً في آخر العدد، ويحصل من ضرب مربعه فيه، وليس كذلك. فهو موجود في عدد الجذور، ولابد أن يكون في أواخر مراتبه؛

1 المطلوب: أي المطلوب الثاني / نستخرجه: يستخرجه – يشرح الطوسي في آخر هذا النص القاعدة:

$$(a-b)+c = a-(b-c)$$

ومثال معاكس للحالة الأولى:

$$x^3 = 9876x + 60049600$$

(S = 400)

ومثال معاكس آخر

$$x^3 = 999x + 63600400$$

(S = 400)

4 المطلوب: أي المطلوب الثاني –

6 نستخرجه: يستخرجه – 8 ننقص: ينقص –

11 وزيادته: وزمان به. ولقد كتب الجزء الأخير فوق الأول – 13-16 تقوم مناقشة الطوسي هنا على المطابقة: $x^2 = ax + x(x-a)$ – 16 فهو: أي مربع آخر الجذر المطلوب / أن: وأن

لأن عدد الجذور أعظم قسمَيْ المال؛ وإلا لما كان مربعُ آخر الجذرِ المطلوب حاصلاً فيه، ومنحطُّ مربعِه يكون / مقابلاً لآخر الجذور المقابلة ل – ٦٢ – ظ لعدد الجذور. فمطلوبُ ذلك الجذرِ يكون آخرَ الجذر المطلوب، ويكون ‹ في › المرتبة السميّة لآخر الجذور المقابلة لعدد الجذور. فقد عرفنا بهذه الجملة آخر الجذر المطلوب. ولا شك أن منحطّ مكعبه يكون واقعاً في المرتبة المقابلة للكعب السميّ لمرتبته، فلذلك نقلنا المرتبة التي فيها عدد الجذور المحاذية لآخر الجذور المقابلة لعدد الجذور إلى مرتبة الكعب السميّ لذلك الجذر وسائرَ مراتبه على الترتيب، لأن منحط مربّع أرفع مراتب الجذر المطلوب موجودٌ فيه، ومنحطّات سائر ضرباته في سائر مراتب الجذر المطلوب موجودةٌ في سائر المراتب على الترتيب. ومعلومٌ أن ضرب آخر الجذر المطلوب في مربعه، يقع محاذياً للكعب السميّ الذي نقلنا إليه صور عدد الجذور، بحيث موضعه. فحاصلُ ضربات آخر الجذر المطلوب في سائر عدد الجذور يكون واقعاً في تلك المراتب التي حصلت فيها صورها بهذا النقل. وبقية البيان ما مرّ.

وأما في الصورة الثالثة: فربع آخر الجذر المطلوب ليس بكليته في عدد الجذور ‹ وليس بكليته في القسم الآخر من المال ›: إذْ لو كان كذلك لكان / مضروبُ آخر مراتب القسم الآخر من المال في آخر مراتب الجذْر المطلوب ل – ٦٣ – و إما أرفع أو أنزلَ من ضرب الجذر ‹ في › عدد الجذور في الصورة المحاذية لآخر الجذور المقابلة لعدد الجذور، وليس كذلك؛ لأن كلا المضروبين

1 أعظم: أي مرتبة أعظم – 2 ومنحط: ومنخط، والمقصود هنا موقعه تحت العدد – 4 عرفنا: غير واضحة – 5 واقعاً: وقعه – 6 لمرتبته: لمرتبه / نقلنا: نقليا / فيها: من – 7 المحاذية: المجازية – 8 وسائر مراتبه: وستاير مرتبة؛ والناسخ يرسم كلمة «سائر»: ستاير أوساير. ولن نشير إليها مرة أخرى – 11 مربعه: مربع / محاذيا: مجازيا / للكعب: أي لمرتبة الكعب / نقلنا: يقلنا – 18 الجذر: جذر – 19 لآخر: الاخر

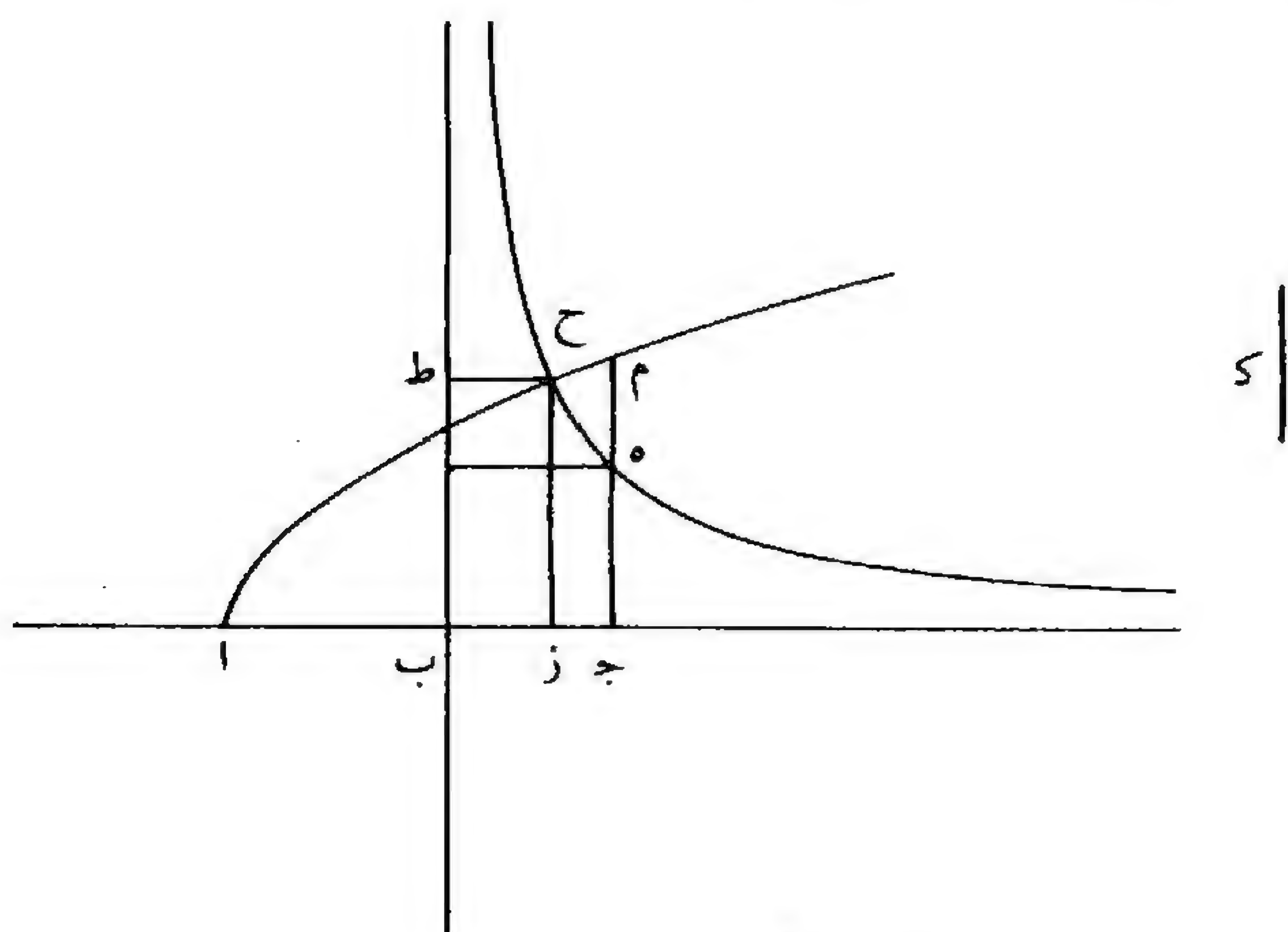
يقعان في المرتبة المحاذية للجذر الأخير من الجذور المقابلة لعدد الجذور؛ وليس بكليّته موجوداً في القسم الآخر من المال، لهذا الدليل بعينه. فبعضُ مربّع آخر الجذر المطلوب مقابلٌ آخرَ الجذور المقابلة لعدد الجذور، وبعضُ مكعبه مقابلٌ الكعبَ الأخير. فنقلنا من عدد الجذور المرتبةَ المحاذيةَ لآخر الجذور المقابلة لعدد الجذور إلى محاذاة الكعب الأخير، لأنّ ضرب سميّ ذلك الكعب في هذه المرتبة يقع في مرتبة ذلك الكعب. فيتبيّن لنا مكعبُ آخرِ الجذور، وهو الكعب الأخير؛ وبعضُ مكعبِه موجود في العدد المقابل لتلك المرتبة ومرفوعاتِها، وهو الذي كان من ضرب أحد قسميْ ماله فيه؛ والقسم الذي لم يضرب فيه، وهو آخر عدد الجذور. وقد انتقل إلى محاذاته في المرتبة التي يقع فيها مكعبه. فيطلب أكثر عددٍ: إذا ضربناه في مراتب عددِ الجذور وزدناه على العدد حصل مكعبه في العدد، وكان في المرتبة المحاذية للكعب الأخير ومرفوعاتِه. وبقية البيان / ما مرّ. ل - ٦٣ - ظ

المسألة الثالثة: مكعب وأموالٌ يعدل عدداً.

فنعمل مكعباً مساوياً للعدد، وليكن ضلعه خط ك. وليكن ا ب عددَ الأموال ونخرجه بالاستقامة، ونفصل ب ج مثل خط ك، ونعمل على ب ج مربع ب ه، ونعمل على نقطة ه قِطْعاً زائداً لا يقع عليه خطّا ب د ب ج، وليكن هو قطع ه ح. ونعمل على نقطة ا قِطْعاً مكافئاً ضلعه القائم مثل ب ج، وليكن هو قطع ا م. فلأن نقطة ج على السهم، فيُخرج منها عمود ‹على السهم› ينتهي إلى محيط القطْع المكافئ ويكون خطَّ ترتيبه،

2 بكليته: أي مربع الجذر المطلوب – 4 لآخر: الاخير – 5 المقابلة: المتقابلة / محاذاة: المحاذاة – 5-6 سميّ ذلك الكعب: أي الجذر السميّ للكعب الأخير من الجذور المقابلة لعدد الجذور – 6 فيتبيّن: فتبين – 10 فيها: فيه – 11 وزدناه: وزيادة / وكان: غير واضحة الحروف – 18 ا م: م / فيخرج: فنخرج – 19 ينتهي: وينتهي

ويكون مربعُه مثلَ ضرب ا ج، السهم، في ب ج القائم، فيكون مربعه أعظم من مربع ب ج، فهو إنما ينتهي إلى محيط القطع المكافئ بعد مجاوزة نقطة هـ. ولأن القطْع الزائد أبداً فيما بين خطي ب د جـ ب؛ فالعمود الخارج من نقطة جـ إنما يلقى محيطَ القطع المكافئ في داخل القطع الزائد، فالقطْعان يلتقيان بالضرورة، وليكن التقاؤهما على نقطة ح. ونخرج ط ح عموداً على ب د ط وح ز عموداً على ا ج. فلأن ضرب ا ز، السهم، في ب ج، القائم، مثلُ مربع ز ح؛ فنسبة ا ز إلى ز ح كنسبة ز ح إلى ب ج. ولأن ح ط بُعْدُ نقطة ح؛ فضرْب ب ط في ط ح مثل مربع ب د أعني ب ج. فنسبة ب ط – أعني ز ح – إلى ب ج / كنسبة ل – ٦٤ – و ب ج إلى ط ح، أعني ب ز. فخطوط ا ز ز ح ب ج ب ز متوالية على النسبة. فمربع ب ز، أحد الطرفين، في ا ز، الطرف الآخر، مثلُ مكعب ب ج المساوي للعدد. ولكن مربع ب ز في ا ز مثل مجموع مربع ب ز في ب ز، وهو مكعب ب ز، مع مربع ب ز في ا ب وهو الأموال. فقد حصل ب ز الضلعُ الذي يكون مكعبه مع ضرب ماله في عدد الأموال مثلَ العدد المفروض؛ وذلك ما أردنا بيانه.



2 مربع ب ج: مربعه ب – 6 ا ز: الألف مطموسة

وأما استخراج المطلوب فيضع العدد على التخت، ويضع فوقه أصفار الكعب، ويضع عدد الأموال، فيكون للمسألة ثلاث صور:

الصورة الأولى:

أن تكون المرتبة السميّة للكعب الأخير أرفعَ من آخر مراتب عدد الأموال، مثل قولنا: كعبٌ وثلاثون مالاً يعدل عدد ستةٍ وثلاثين ألفَ ألفٍ، ومائةٍ وسبعةٍ وستين ألفاً، وثلاثمائةٍ وأحدٍ وتسعين. فنعدّ من المرتبة السميّة للكعب الأخير إلى آخر مراتب عدد الأموال، ونعدّ من المرتبة المقابلة للكعب الأخير في جهة الانحطاط بتلك العدّة، فحيث ينتهي ننقل إليه آخر مراتبِ عدد الأموال، ونردّه إلى الثلث ونضع سائر المراتب على الترتيب، فيكون بهذه الصورة ٣٦١٦٧٣٩١؛ لأن المرتبة السميّة للكعب الأخير إنما هي المئات، وآخرُ مراتب عدد الأموال منحطٌّ / عنها بمرتبةٍ، والمرتبةَ ل – ٦٤ – ظ
المقابلة للكعب الأخير إنما هي ألوفُ الألوفِ، فنقلنا آخر ثلث عدد الأموال إلى المرتبة المنحطّة عنها بمرتبةٍ، ونضع مطلوب الكعب – وهو الثلاثة – في الكعب الأخير، وننقص مكعبه من العدد من المرتبة التي تحاذيه ومرفوعاتِها ونضربه في ثلث عدد الأموال ونضع الحاصل في سطرٍ أوسط بين العدد وبين ثلث عدد الأموال، ونضربه في السطر الأوسط، وننقص ثلاثة أمثال كلّ ضربةٍ من العدد، ونضع مربع المطلوب بحذائه في السطر الأوسط، ثم نضرب المطلوب في ثلث عدد الأموال، ونزيد الحاصل على الأوسط،

6 سبعة: تسعة / وستين: فاستين – 7 ونعد: وقعد – 8 ننقل: ينقل – 9 ونضع: ويضع – 12 هي: هو / فنقلنا: فوق السطر ومطموس بعضها – 13 ونضع: ويضع – 14 وننقص: وينقص – 15 ونضربه: ويضربه / ونضع: ويضع – 16 ونضربه: ويضربه / وننقص: وينقص – 17 ونضع: ويضع – 18 نضرب: يضرب

ونقل المطلوب وثلثَ عدد الأموال بمرْتبتين، والسطرَ الأوسطَ بمرتبةٍ، فيحصل بهذه الصورة: ٣٥ ٦٤٦٧٣٩١ ٩٦٠، ثم نضع المطلوب الثاني، وهو اثنان، وننقص مكعبه من العدد، ونضربه في المطلوب ‹ الأول › وفي ثلث عدد الأموال، ونزيد المبلغ على الأوسط ونضربه في الأوسط، وننقص ثلاثة أمثال كلّ ضربةٍ من العدد. ثم نزيد مربع المطلوب الثاني على السطر الأوسط، على المرتبة المحاذية له، ونضرب المطلوب الثاني في المطلوب الأول و / في ثلث عدد الأموال، ونزيد الحاصل على الأوسط، ونقل ل - ٦٥ - و الأعلى والأسفل بمرتبتين، والأوسط بمرتبة، فيحصل بهذه الصورة ٣٢٥ ٣٢٧٣٩١ ١٠٨٨، ثم نضع المطلوب الثالث، وهو الواحد، وننقص مكعبه من العدد، ونضربه في المطلوب الأول والثاني وفي ثلث عدد الأموال، ونزيد الحاصل على الأوسط، ونضربه في الأوسط. وننقص ثلاثة أمثال كلّ ضربةٍ من العدد، ويحصل السطر الأعلى بهذه الصورة ٣٢١، وهو الجذر المطلوب.

الصورة الثانية:

أن يكون آخر مراتب عدد الأموال أرفع من المرتبة السميّة للكعب الأخير: فنضع ثلث عدد الأموال على رسم وضْع المقسوم عليه، ونعرف مرتبة مطلوب القسمة ونعدّ العدد بجذرٍ، ولا جذرٍ، إلى مرتبة مطلوب القسمة؛ فإن كان الجذر الأخير منحطاً عن مكان مطلوب القسمة؛ فنَحُطُّ آخرَ مراتبِ ثلث عدد الأموال بقدر انحطاطه، وإلا فنتركها بحالها ونطلب الكعب السميَّ للجذر الأخير، فهناك مكان المطلوبِ الكعبِ.

1 ونقل: وينقل – 2 نضع: يضع – 3 وننقص: وينقص / ونضربه: ويضربه – 4 ونضربه: ويضربه / وننقص: وينقص – 6 المحاذية: المجارية / ونضرب: ويضرب – 7 ونقل: وينقل – 9 نضع: يضع / وننقص: وينقص / ونضربه: ويضربه – 11 ونضربه: ويضربه / وننقص: وينقص – 15 فنضع: فيضع – 16 القسمة: القسمية / ونعدّ: ويعد – 17 القسمة (الأولى والثانية): القسمية – 18 بقدر: يقدر / ونطلب: ويطلب

مثاله: مكعب وثلاثةُ آلافِ أموالٍ يعدل عدداً بهذه الصورة ٣٤٢١٩٩١٦١. فلأن آخرَ مراتب عدد الأموال في المرتبة الرابعة، والمرتبةَ السميّة للكعب الأخير / هي الثالثة، وهي أنزَلُ من آخر عدد الأموال؛ ‹ وضعنا ل - ٦٥ - ظ ثلث عدد الأموال › على وضع المقسوم عليه، فكان مطلوب القسمة واقعاً في مرتبة مئات الألوف؛ والجذورُ التي من الآحاد إلى مرتبته ثلاثة. والكعب السميّ للجذر الأخير منها هو الثالث، ومكان مطلوب القسمة لايقابله جذر؛ بل الجذرُ الأخير منحطّ عنه بمرتبةٍ، فحططنا آخر مراتب ثلث عدد الأموال ‹ بمرتبة ›، فحصل بهذه الصورة ٣٤٢١٩٩١٦١ ١٠٠٠. ثم نطلب عدداً نضعه فى الكعب الثالث، وننقص مكعبه مما تحته ومرفوعه. ونضربه في ثلث عدد الأموال، ونزيد الحاصل على السطر الأوسط. ونضربه فى المبلغ وننقص ثلاثة أمثال كل ضربةٍ من العدد، وهو الثلاثة. فنضعه مكان الكعب الثالث، ويُعمل به العملُ المذكور. ثم نضع مربعه في الأوسط ونضربه في ثلث عدد الأموال ونزيد الحاصل على الأوسط وننقل الأعلى والأسفل بمرتبتين، والأوسط بمرتبةٍ؛ ونعمل العملَ السابق إلى آخره.

الصورة الثالثة:

ألّا يكون آخر مراتب عدد الأموال أرفعَ ولا أنزلَ من المرتبة السميّة للكعب الأخير. فننقل آخر ثلث عدد الأموال إلى المرتبة السميّة للكعب الأخير؛ ونعمل به العمل المذكور.

1 أموال: كذا والأفصح مال – 2 ٣٤٢١٩٩١٦١: ٣٤٢١١٩٩١٦١ – 4 القسمة: فوق السطر ومطموسة قليلاً – 5 والجذور: المقصود الجذور المقابلة للعدد التي عددناها فيه / مرتبته: مرتبه – 7 فحططنا: فخططنا – 8 نطلب: يطلب – 9 وننقص: وينقص – 11 وننقص: وينقص / فنضعه: فيضعه – 13 ونزيد: ويزيد / وننقل: وينقل – 17 فننقل: فينقل – 18 المذكور: العمل المذكور لاينطبق هنا دائما كما سبق أن أشرنا إليه في مثال سابق

وإنما وجب العمل على الوجه المذكور؛ لأن / العددَ مركب من المكعب الحاصل من ضرب المال في الجذر المطلوب، ومن المسطّح الحاصل من ضرب المال في عدد الأموال، وآخرُ المكعب حاصلٌ من ضرب مربع آخر الجذر المطلوب في آخره، وآخرُ المسطح حاصلٌ من ضرب آخر المال، وهو مربع آخر الجذر المطلوب في آخر عدد الأموال. فإن كان آخرُ الجذر المطلوب أرفعَ من آخر عدد الأموال، فآخر المكعب أرفعُ من آخر المسطّح، ويكون آخر المكعب فى أواخر العدد، ويكون مطلوب الكعب الذى نستخرج لآخر العدد؛ وهو آخر الجذر المطلوب، فيكون أرفعَ من آخر مراتب عدد الأموال. ل - ٦٦ - و

وإن كان آخرُ عدد الأموال أرفعَ من آخر مراتب الجذر المطلوب، فآخر المُسطّح أرفع من آخر المكعب، ويكون آخرُ المُسطّح في آخر العدد. ولأن آخر المسطّح حاصل من ضرب مربعِ آخرِ الجذر المطلوب فى آخر عدد الأموال، فيكون ضرب مربع آخرِ عددِ الأموال في آخر عدد الأموال – وهو ‹ آخر › مكعبه – أرفع منه. فلو استُخرج مطلوب كعْبه يكون الخارجُ آخرَ عددِ الأموال. ولأن آخر المسطّح أنزلُ من مكعبه؛ فلو استُخرج مطلوب الكعب لآخر المسطح يكون أنزلَ منه. فقد تبيّن أنه إذا كان آخر عدد الأموال أرفعَ من آخر الجذر المطلوب يكون مطلوب كعبه لآخر المسطّح / أنزلَ من آخر عدد الأموال. فنعلم أن أحدهما – أعني آخر عدد الأموال أو آخرَ الجذر المطلوب – لو كان أرفع من الآخر ‹ حصل › – لكون ‹ آخر › الجذر المطلوب أرفعَ من آخر عدد الأموال – خاصيتان: إحداهما أن يكون آخر المكعب واقعاً فى آخر العدد، والأخرى ل - ٦٦ - ظ

8 لآخر: أي في آخر – 14 أرفع منه: يعود الضمير على آخر المسطح – 16 لآخر: الاخر – 17 مطلوب كعبه: أي مطلوب الكعب الذي يستخرج – 18 لآخر: اخر

أن يكون مطلوب الكعب لآخر العدد، وهو آخر الجذر المطلوب، أرفع من آخر عدد الأموال؛ وحصل – لكون آخر مراتب عدد الأموال أرفعَ – خاصيتان: إحداهما أن يكون آخر المسطّح واقعاً في آخر العدد، والأخرى أن يكون مطلوب الكعب الذى يستخرج لآخر المسطّح أنزلَ من آخر عدد الأموال. وإذا تحقق هذا فيُستخرج مطلوب الكعب لآخر العدد؛ فإن كانت مرتبته أرفعَ من آخر عدد الأموال، فنعلم أن الواقع في آخر العدد هو آخرُ المكعب، وأن آخرَ الجذر المطلوب أرفعُ من آخر عدد الأموال. وإن كانت أنزلَ من آخر عدد الأموال فنعلم أن الموجود فى آخر العدد هو آخرُ المسطّح، وأن آخر عدد الأموال أرفعُ من آخر الضلع. لكن المطلوب الخارج في الصورة الأولى أرفع مرتبةً من آخر عدد الأموال، فهو آخر الجذر المطلوب، ومكعبه موجود في آخر العدد. فينقص / مكعبه من تلك المرتبة، ل – ٦٧ – و
ثمَّ المرتبة السمية للكعب الأخير هي مرتبتُه وهي معلومة. ومعلوم أن آخر عدد الأموال من أي مرتبة هو، فانحطاطُ مرتبته عن المرتبة الحقيقية للمطلوب معلومٌ. فننقله إلى المرتبة المنحطة عن المرتبة التى وضعناه فيها بقدر انحطاطه عن مرتبته الحقيقية، وسائرِ المراتب على الترتيب، لأنا نحتاج أن نضرب مال المطلوب في مراتب عدد الأموال، وننقصه من العدد. ومالُ المطلوب مضروب في المطلوب، ومنحطُّ الضرب واقع في المرتبة التي وضعنا فيها المطلوب ‹ ومرفوعاتها ›. فإذا ضربنا مال المطلوب في مراتب عدد الأموال يكون منحطّاتُ تلك الضربات واقعةً في المراتب المنحطة عن هذه المرتبة بقدر انحطاط مراتبها الحقيقية عن المرتبة الحقيقية للمطلوب. فلهذا السبب

3 والأخرى: ولاخرى – 4 يستخرج: فيستخرج – 6 كانت مرتبته: كان مرتبه – 10 الأولى: الاول – 12 مرتبته: مرتبه – 14 فننقله: فتنقلى – 15 مرتبته الحقيقية: أي مرتبة المطلوب / نحتاج: يحتاج – 16 وننقصه: وينقصه

وضعناه على الوجه المذكور. ثم نحتاج أن نضرب مال المطلوب في كل واحدٍ من صور مراتب عدد الأموال، وننقص حاصل الضربات من العدد. فلو ضربنا المطلوب في كل واحدٍ من تلك الصور، ثم وضعنا حاصل الضربات مسطّحاً من تلك المراتب، ثم ضربنا المطلوب في مراتب المسطّح؛ يكون الحاصلُ بعينه مثلَ ما لو ضُرب مال المطلوب في كل واحد منهما. فلو وضعنا ثُلث صورِ عدد الأموال في تلك المراتب وضربنا المطلوب / في صور الثلث، ووضعناه مسطّحاً، ثم ضربنا المطلوب فى هذا المسطّح، وأخذنا ثلاثة أمثال كلّ ضربةٍ، يكون الحاصل أيضاً مثلَ ما لو ضُرب مال المطلوب في عدد الأموال. فلهذا السبب عملنا على هذا الوجه ليتأدّى إلى مثل عمل الكعب. ثم إذا ضربنا المطلوب في ثلث عدد الأموال ووضعنا المسطّح في تلك المراتب، ثم ضربناه في المسطّح ونقصنا ثلاثة أمثال الضربات من العدد؛ وقد نقصنا مكعبه ‹ من › العدد، فقد حصل ضربُ مال المطلوب الأول فيها، ونقصانها من العدد؛ ومالُه بعضُ مال الجذر المطلوب، فإذا استخرجنا المطلوب الثاني، فقد علمنا من مال الجذر المطلوب بعضاً آخر وهو مربع المطلوب الثاني، وضرْبَه في المطلوب الأول مرّتين؛ فنحتاج أن نضرب هذا البعض أيضاً في عدد الأموال وننقصه من العدد، فنحتاج أن نضرب المطلوب الثانى في المطلوب الأول مرّتين ‹ وفي عدد الأموال ›، ونضرب المال في عدد الأموال، وننقص المبلغ من العدد. لكنّا لو ضربنا المطلوب ‹ الأول › مرتين في عدد الأموال، ثم ضربنا الحاصلَ في المطلوب

ل - ٦٧ - ظ

1 وضعناه: الضمير يعود هنا على عدد الأموال / نحتاج: يحتاج / نضرب: يضرب – 2 وننقص: وينقص – 6 ثلث صور: الصحيح هو «صور ثلث» – 7 الثلث: قد تقرأ الثلاثة – 9 ليتأدى: لتادى – 12 وقد نقصنا: ونقصنا / مكعبه: مكعب، المقصود هنا مكعب العدد المطلوب – 15 فنحتاج: فيحتاج – 16 نضرب: يضرب / وننقصه: وينقصه / فنحتاج: فيحتاج – 17 نضرب: يضرب – 18 ونضرب: ويضرب / المال: قد تقرأ الحال: والمقصود مال المطلوب الثاني / وننقص: وينقص / العدد: العد

الثانى، ونقصنا المبلغ من العدد؛ يكون مثل ذلك. وكذلك لو ضربنا ثلث عدد الأموال فى المطلوب الأول مرّتين، ثم ضربنا المطلوب الثاني في الحاصل، وأخذنا ثلاثة أمثال الضربات؛ يكون مثل ذلك. فلهذا / السبب إذا ضربنا المطلوب الأول في ثلث عدد الأموال ووضعناه ل - ٦٨ - و سطحاً، فقبل النقل نضربه فيها كرّة أخرى ونزيده على المسطح ليحصل ضرب المطلوب الأول في ثلث عدد الأموال مرّتين، حتى إذا ضربنا فيها المطلوب الثانى يكون موافقاً لذلك. ونحتاج أيضاً أن نضرب مربع المطلوب الثاني في عدد الأموال، وننقص حاصلَ الضربات من العدد. فلو ضربناه فى ثلث عدد الأموال، ووضعناه ‹ مسطحاً › ثم ضربناه فيه؛ فثلاثة أمثاله يكون مثل ذلك. فلذلك نضرب هذا المطلوب في ثلث عدد الأموال [ونزيده على الأموال]، وقبل نقل هذا المطلوب نضربه أيضاً كرّةً أخرى في صور الثلث، ونزيده على المال والمسطّح بمثل ما قلناه في المطلوب الأول. وأعمال سائر المطالب على هذا القياس.

وأما الصورة الثانية فالمطلوبُ الذي يخرج أنزَلُ من آخر عدد الأموال. فالموجود في آخر العدد هو آخر المسطّح؛ فيكون ‹ مربع › المطلوب الأول الخارج من قسمة المسطح على عدد الأموال هو مالَ آخر الجذر المطلوب. وهو معلومُ المرتبة، فيُعلم منه مرتبةُ جذره وهو آخر الجذر المطلوب. فإذا علمنا أن آخر الجذر المطلوب من أيّ مرتبة هو، فنعلم أن مكعبه يكون واقعاً بحذاء الكعب السميّ / لمرتبته. ثم نحتاج أن نضرب ماله في عدد الأموال، ل - ٦٨ - ظ وننقص حاصل الضرب من العدد، وننقص مكعبه من العدد. فإذا نقصنا

5 نضربه: يضربه / فيها: أي ثلث عدد الأموال / ونزيده: ويزيده – 7 ونحتاج: ويحتاج / نضرب: يضرب – 8 وننقص: وينقص – 10 نضرب: يضرب – 11 ونزيده: ويزيده / نضربه: يضربه – 12 ونزيده: ويزيده / والمسطح: المسطح – 15 هو: وهو – 19 نحتاج: يحتاج / نضرب: يضرب – 20 وننقص (الأولى والثانية): وينقص

مكعبه ووضعنا ثلث عدد الأموال وضربنا المطلوب فيه ووضعناه مسطّحاً، ثم ضربناه فى المسطّح ونقصنا ثلاثة أمثال الضرب، يكون الحاصلُ مثلَ ذلك. فلهذا السبب يردّ عدد الأموال إلى الثلث. ولأن المرتبة الحقيقية التي لصورة هذا المطلوب معلومةٌ، وكذا المراتبُ الحقيقية لصور ثلث عدد الأموال معلومة، فتكون الصورةُ التي مرتبتها الحقيقية هي مرتبةُ المطلوب من مراتب ثلث عدد الأموال أيضا معلومةً. فتلك الصورة إن كانت واقعة مع المطلوب في مرتبةٍ؛ فمنحطُّ ضربِ مال المطلوب في المطلوب، في تلك المرتبة، وتلك الصورة والمطلوب من مرتبة واحدة، فيكون منحطُّ ضرب المطلوب في كل واحدٍ منهما واقعاً فى مرتبة واحدة. فلا حاجة إلى حطِّ مراتبِ ثلثِ عدد الأموال وإن لم يكن تلك الصورةُ في مرتبة المطلوب؛ بل ويتفق أن يكون في مرفوعه عند استخراج مطلوب القسمة؛ فنحطّ مرتبة آخر ثلثِ عددِ الأموال، وكذا سائر مراتبه، مرتبةً واحدة، ليحصل كل صورة في المرتبة التي إذا ضُرب مال المطلوب / ل – ٦٩ – و فيها يكون منحطُّ الضرب واقعاً في تلك المرتبة. وبقية البيان ما مرّ.

وأما الصورة الثالثة فآخرُ الجذر المطلوب وآخرُ عدد الأموال فيها من مرتبة واحدة. إذْ لو كانت إحداهما أرفع لكان مطلوبُ الكعب أرفعَ من آخرِ عددِ الأموال أو أنزلَ. فعلمنا أنه من تلك المرتبة. فلننقل المرتبة الأخيرة من عدد الأموال إلى محاذاة الكعب الأخير، وفيه المطلوب؛ لأنه والمطلوبَ: كلاهما من مرتبةٍ واحدة. ونردّ صور عدد الأموال إلى الثلث، للعلة التي سبقت، ونستخرج مطلوباً نضربه في ثلث عدد الأموال ونضعه

3 يرد: يزد – 5 فتكون: فيكون – 9 حطّ: خط – 12 الأموال: الجذور – 17 فلننقل: فلينقل – 19 ونردّ: ويزد – 20 ونستخرج: ويستخرج / نضربه: يضربه / ونضعه: ويضعه

مسطّحاً ونضربه في المسطّح، وننقص ثلاثة أمثال الضربات ‹من العدد› وننقص مكعبه من المرتبة التي هو فيها. وبقية البيان ما مرّ.

المسألة الرابعة: عددٌ وأموال يعدل مكعباً.

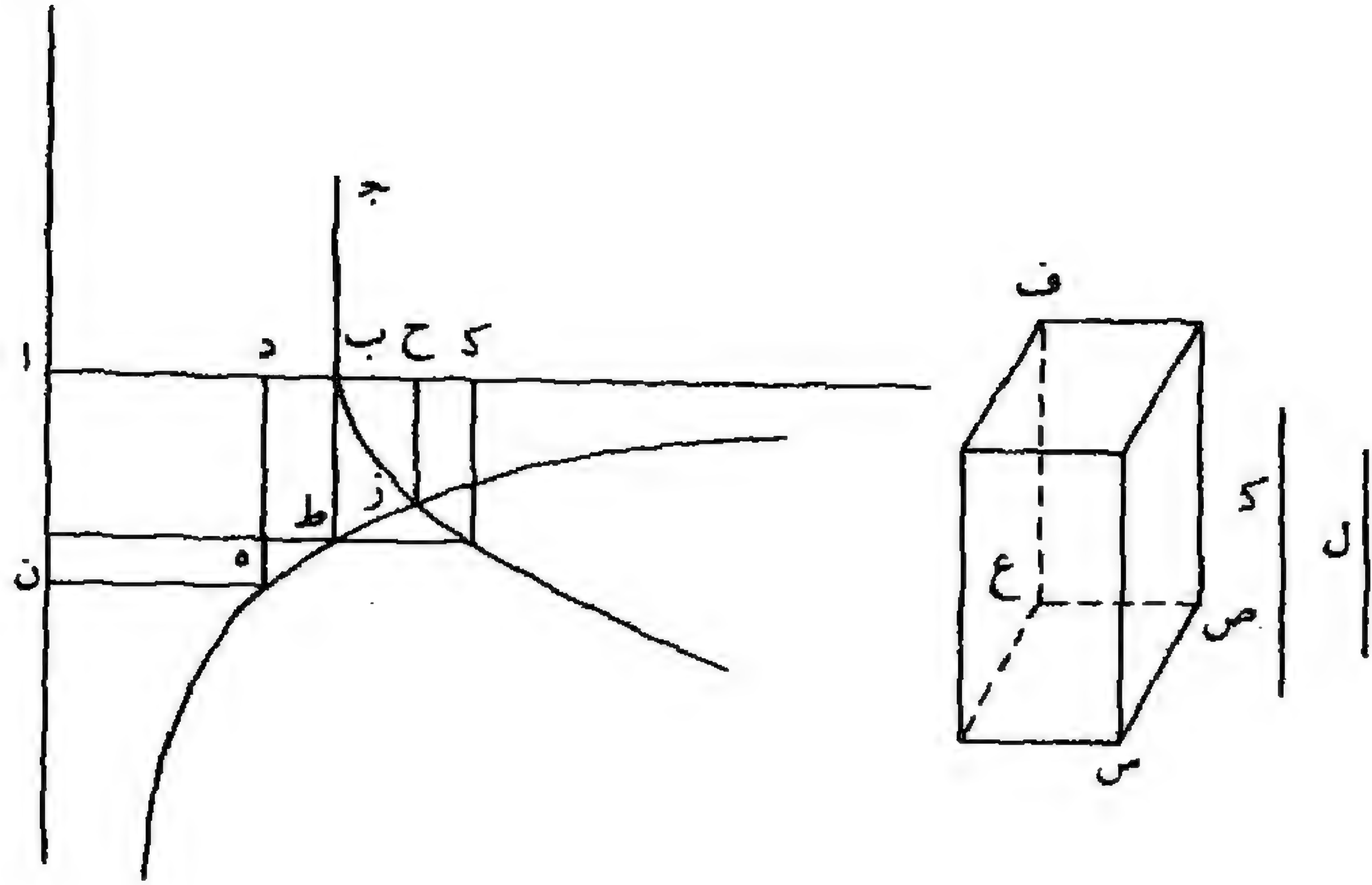
فليكن ا ب عددَ الأموال، وس ف هو العددَ المجسّم المذكور فى السؤال، وقاعدته س ع، وهو واحد سطحيّ، وارتفاعه ع ف. فيكون ع ف بعدّة آحاد العدد المذكور فى السؤال. فنستخرج فيما بين خطي ا ب ع ف وسطاً فى النسبة، وليكن هو خط كـ. ونجعل نسبة الواحد الخطي – وهو ع ص – إلى ب جـ كنسبة ا ب إلى كـ، فنسبة مربع ع ص – وهو س ع – إلى مربع ب جـ كنسبة مربع / ا ب إلى مربع كـ، وهي كنسبة ل – ٦٩ – ظ خط ا ب إلى ع ف. فنسبة مربع س ع إلى مربع ب جـ كنسبة خط ا ب إلى ع ف. فضرْب مربع ع س في خط ف ع – وهو العدد – مثل ضرب مربع ب جـ في ا ب. فضرْب مربع ب جـ في ا ب مثلُ العدد؛ ونجعل ب جـ عموداً على ا ب، ونعمل قطْعاً مكافئاً رأسُه نقطة ب، وسهمه ب ا، وضلعه القائم مثل ا ب. ونجعل خط لَ وسطاً في النسبة بين خطي ا ب ب جـ. فإن كان ا ب أعظم من ب جـ فهو أعظم من لَ ضرورةً. ونفصل ا د مثلَ لَ ونعمل عليه مربعاً، وليكن هو مربع ا هـ، فلأن ضرب ا ب في ب جـ مثل مربع لَ لكونِهِ وسطاً في النسبة بينهما، فضرب ا ب فى ب جـ مثل مربع ا هـ. ونفرض على ب جـ نقطة ط، بحيث يكون ب ط ‹مثل ب جـ أى› أقل من ا د. فلأن خطي ا ن

1 ونضربه: ويضربه / وننقص: وينقص / الضربات: الضربان – 2 وننقص: وينقص / فيها: فيه / مرّ: انظر التعليق على مثل هذه المسألة – 6 العدد المذكور في السؤال: العدد المسؤول عنه / فنستخرج: فيستخرج – 7 ونجعل: ويجعل – 13 ونجعل: ويجعل – 14 ب ا: ب م – 16 ونفصل: ويفصل – 18 ونفرض: ويفرض – 19 بحيث: فحيث / ا د: ا هـ

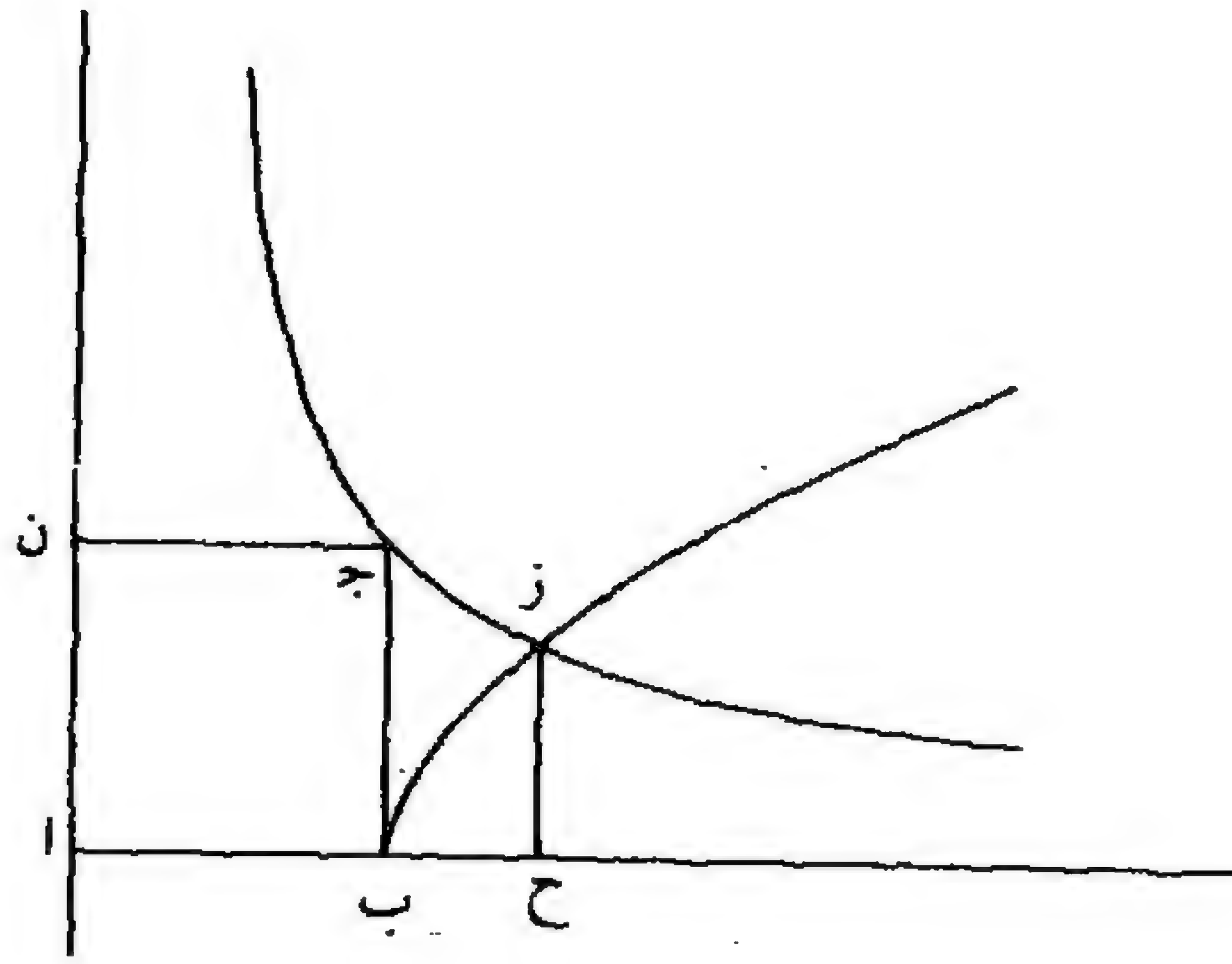
ا ب محيطان بزاويةٍ قائمة، ونقطة ط مفروضةٌ فيما بينهما، وهي أقرب إلى ا ب، فنعمل قطْعاً زائداً يمرّ محيطه بنقطة ط، ويكون منتصف مجانبه نقطة ا ولايقع في جهة نقطة جـ – فظاهرٌ أنه يوجد في القطع المكافئ خط ترتيب مثل ب جـ، وليكن ذلك الخط ‹ الذى › يخرج من نقطة ك أقرب إلى القطْع الزائد من نقطة ب؛ فالعمود الذي يخرج من نقطة ك إلى محيط القطع المكافئ يلقى القطع الزائد / أولاً ثم ينتهي إلى المكافئ، في ذلك ل – ٧٠ – و
الموضع قد دخل في القطع الزائد وهو خارج عنه عند نقطة ب، لأن نقطة ب على خط لايقع عليه، فالقطْعان يتقاطعان، وليكن تقاطعهما على نقطة ز. فنخرج عمود ز ح يلقى نقطة ز على محيط القطع الزائد؛ فضرب ا ح في ح ز مثل مربع ا هـ، وضرب ا ب في ب جـ أيضاً مثلُ مربع ا هـ لما مرّ؛ فضرب ا ح في ح ز مثلُ ضرب ا ب في ب جـ. فنسبة ا ح إلى ب جـ كنسبة ا ب الى ز ح لتكافُؤ الأضلاع. فنسبة مربع ا ح إلى مربع ب جـ كنسبة مربع ا ب إلى مربع ح ز. ولأن ضرب ا ب في ب ح مثل مربع ز ح، فنسبة ا ب إلى ح ز كنسبة ح ز إلى ب ح. فنسبة مربع ا ب إلى مربع ح ز كنسبة ا ب إلى ب ح، فنسبة مربع ا ح إلى مربع ب جـ كنسبة ا ب إلى ب ح. فضرب مربع ا ح في خط ب ح مثل ضرب مربع ب جـ في خط ا ب، المساوي للعدد. فإذا جعلنا خط ا ح ضلعاً، فيكون مربعه مالاً، ومربع ا ح في خط ا ب هو الأموال بالعدة المذكورة في السؤال. ومجموع مربع ا ح في ا ب الأموال، ومربع ا ح في ب ح العدد، مساوٍ لمربع ا ح في ا ح وهو مكعب ا ح. فالعدد والأموال مثل

2 فنعمل: فيعمل / يمرّ: تمر – 4 كَ: ق – 5 كَ: ق – 6 ففي: في – 9 فنخرج: فيخرج / يلقى: بعد / على: عن – 12 لتكافُؤ: ليكاف – 17 ضلعا: ضلعنا

المكعب. فقد وجدنا خطّاً يكون عدة أمواله / المذكورة مع العدد مثلَ مكعبه. ل – ٧٠ – ظ

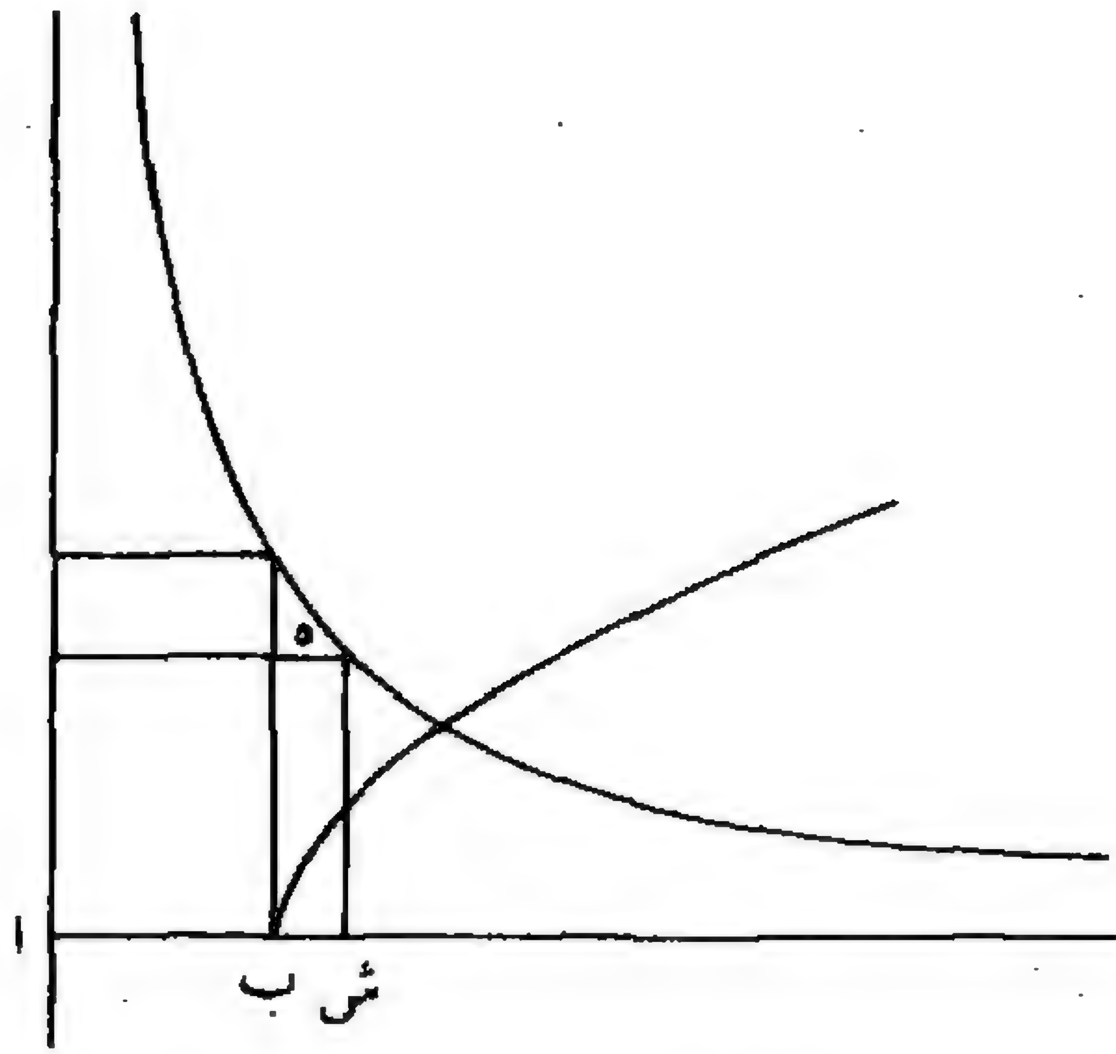


وإن كان ا ب مثل ب جـ فهو مثل ل. فنعمل على ا ب مربعاً ونفرض نقطة على خط ترتيب للقطع المكافئ؛ ونعمل قطعاً زائداً رأسه عند نقطة جـ ومحيطه يمرّ بتلك النقطة ولايقع عليه خطّا ا ب ا ن؛ وبقية البيان ما مرّ.



وإن كان ا ب أصغر من ب جـ فهو أصغر من ل، فنفصل ا ش مثل ل، ونعمل عليه مربعاً؛ وبقية البيان ما مرّ؛ وذلك ما أردنا بيانه.

5 ومحيطه: المقصود ولنفرض محيطه يمرّ بتلك النقطة – 7 فنفصل: فيفصل



وأما استخراج المطلوب فنضع العدد على التخت ونضع فوقه أصفارَ الكعبِ ونضع عدد الأموال، فيكون للمسألة صورٌ ثلاث:

الصورة الأولى:

أن يكون المرتبةُ السميّةُ للكعب الأخير أرفع من آخر ‹ مراتب › عدد الأموال، مثلَ قولنا: ثلاثون مالاً، وعددٌ: تسعةٌ وعشرون ألفَ ألفٍ وتسعُمائة ألفٍ وأربعةٌ وثمانون ألفاً وتسعُمائةٍ وأحدٌ وثلاثون، يعدل مكعباً. فنعرف انحطاط آخر مراتب عدد الأموال عن المرتبة السمية للكعب الأخير، ونطلب المرتبة التي يكون انحطاطها عن مرتبة الكعب الأخير بذلك المقدار، فننقل آخر مراتب عدد الأموال إليها، فيكون بهذه الصورة ٢٩٩٨٤٩٣١ ٣٠. لأن آخر مراتب عدد الأموال العشراتُ. والمرتبةَ السميةَ للكعب الأخير المئاتُ / وهي أرفع من آخر مراتب عدد الأموال بمرتبةٍ، فنقلنا آخر عدد الأموال إلى المرتبة المنحطة عن الكعب الأخير بمرتبة. ثم نضع مطلوب الكعب. وهو ثلاثة. ونضربه في عدد الأموال ونضعه في سطرٍ أوسط بينَ عددِ الأموال وبين العددِ. ونضربه في الأوسط، ونزيد المبلغ على العدد، ل - ٧١ - و

1 فنضع: فيضع / التخت: البحث / ونضع: ويضع – 2 ونضع: ويضع – 7 انحطاط: انخطاط / عن: غير – 8 ونطلب: ويطلب / انحطاطها: انخطاطها – 9 فننقل: فينقل – 11 فنقلنا: فقلنا – 12 نضع: يضع – 13 ونضربه: ويضربه / ونضعه: ونصفه – 14 ونضربه: ويضربه

ونُبطل السطر الأوسط. ونُنقص مكعب المطلوب من العدد من المرتبة التى تحاذيه. ونضع مربع ‹ المطلوب › في السطر الأوسط، ونردّ عدد الأموال إلى الثلث، فيكون بهذه الصورة ٣ ٥ ٥ ٥٦٨٤٩٣١ ؛ ثم نضرب المطلوب في ثلث عدد الأموال، وننقص ضعف المبلغ من مربعه ٩ ١٠، وننقص ثلث عدد الأموال من المطلوب فيحصل بهذه الصورة: ٢٩ ٣ ٥ ٥ ٥٦٨٤٩٢١ ؛ ثم ننقل السطر الأعلى بمرتبتين، والأسفل بمرتبة، فيحصل مرتبة من ٨٤ السطر الأعلى في مكان المطلوب الثانى، فنضع المطلوب الثاني فوقه، وهو اثنان، ونضربه في السطر الأعلى ونزيد المبلغ على الأسفل؛ ونضربه فى الأسفل، وننقص ثلاثة أمثال كلّ ضربةٍ من العدد، وننقص مكعب المطلوب أيضاً من العدد، فيحصل بهذه الصورة ٥ ٢ ٢٩ ٢٨٨٩٣١ ؛ ثم نضرب / المطلوب الثاني في بقية المطلوب الأول، ل – ٧١ – ظ ونزيد المبلغ على الأسفل، ونزيد مربع المطلوب الثانى على الأسفل أيضاً، ونزيد المطلوب الثاني على بقية المطلوب الأول، وننقل الأعلى بمرتبتين، والأسفل بمرتبة؛ ثم نضع المطلوب الثالث ونعمل به العمل المذكور، فيرتفع العدد ويحصل السطر الأعلى بهذه الصورة ٣١١، فنزيد عليه ثلث عدد الأموال، فيحصل بهذه الصورة ٣٢١ وهو الجذر المطلوب.

الصورة الثانية:

أن يكون آخر مراتب عدد الأموال أرفعَ من المرتبة السميّة للكعب الأخير، فيُطلب الكعب السميُّ لآخر مراتب عدد الأموال، ويُنقل آخرها إلى محاذاة ذلك الكعب، ويُجعل العدد الذي نضعه فى مرتبته مثلَ آخر

1 ونبطل: ويبطل / ونقص: وينقص – 2 ونضع: ويضع – 3 ونضرب: ويضرب – 4 وننقص (الأولى والثانية): وينقص – 5 في الأصل: ٥ ٥ ٢٩ ٥٦٨٤٩٢١ / ننقل: بنقل – 7 فنضع: فيضع / ونضربه: وبضربه – 8 ونضربه: وبضربه / وننقص: وينقص – 9 وننقص: وينقص – 10 نضرب: يضرب – 11 ونزيد (الأولى والثانية): ويزيد – 12 ونزيد: ويز / وننقل: وينقل – 13 نضع: يضع – 14 فنزيد: فيزيد – 19 نضعه: يضعه

عدد الأموال، مثل قولنا: ثلاثمائة واثنا عشر مالاً وعدد: تسعمائة ألفٍ وسبعةٌ وعشرون ألفاً وثلاثمائة وتسعة وستون يعدل كعباً. فآخر مراتب عدد الأموال المئاتُ، والكعب السميّ له الكعبُ الثالث، فنضع قدّام العدد أصفاراً ونضع فوقه أصفارَ الكعبِ، ويُنقل آخر مراتب عدد ‹ الأموال › إلى محاذاة الكعب الثالث فيكون بهذه الصورة ٩٢٧٣٦٩٠، ونجعل المطلوب
٣١٢
الذي نضعه في الكعب الثالث مثلَ آخر / ‹ مراتب › عدد الأموال، وهو ل - ٧٢ - و
ثلاثة، ونضربه في مراتب عدد الأموال، ونزيد المبلغ على سطرٍ أوسط، ونضرب المطلوب في الأوسط، ونزيد المبلغ على العدد، ونبطل الأوسط. وننقص مكعب المطلوب من العدد، ونضع مربعه في الأوسط، ونردّ عدد الأموال إلى الثلث، ونعمل العمل السابق إلى آخره، فيحصل السطر الأعلى بهذه الصورة ٢١٧، فنزيد عليه ثلث عدد الأموال، فيحصل بهذه الصورة ٣٢١ وهو الجذر المطلوب.

الصورة الثالثة:

أن يكون المرتبةُ السميّة للكعْب الأخير هي آخرَ مراتب عدد الأموال، فينقل آخر عدد الأموال إلى مقابلة الكعْب الأخير، ونستخرج مطلوب الكعب، ونعمل العمل الذى ذكرناه فيما إذا كانت المرتبة السمية للكعب الأخير أرفع؛ وذلك ما أردنا بيانه.

1 الأموال: ذلك أن آخر المكعب يأتي من عدد الأموال. فآخر المطلوب يأتي منها أيضاً – 3 فنضع: فيضع – 4 أصفارا: أصفادا / ونضع: ويضع / فوقه: فوق / أصفار: أصفاد / عدد: العدد – 6 نضعه: يضمه – 7 ونزيد: ويزيد – 8 ونزيد: ويزيد / ونبطل: ويبطل – 9 وننقص: وينقص / ونردّ: ويزد – 11 فنزيد: فيزيد – 17 بيانه: انظر التعليق على الحالات المماثلة، ولن نذكّر بهذا بعد الآن

وإنما عملنا كذلك؛ لأن المال ضُرب في الجذر المطلوب، فحصل العدد مع الأموال، وضُرب في عدد الأموال فحصل مبلغ الأموال. فالجذر المطلوب مركب من قسمين: أحدهما عدد الأموال، والآخر القسم الذي ضُرب فيه المال حتى حصل العدد. ثم إن كان آخر مراتب الجذر المطلوب في القسم الذي / ضُرب فيه المال حتى حصل العدد، ومربعُ آخر الجذر ل – ٧٢ – ظ موجودٌ في المال، والمالُ مضروب في القسم الذي فيه آخر الجذر، ومسطّحُها العددُ، فيكون مكعبُ آخرِ الجذرِ المطلوبِ موجوداً في العدد، وهو آخر المكعب، فيكون آخرُ العدد مقابلَ مكعبِ آخرِ الجذر المطلوب. فلو استُخرج مطلوب كعبه لخرج آخرُ الجذر المطلوب، ويكون أرفع من آخر عدد الأموال. وإن كان آخر الجذر المطلوب في القسم الذي فيه عددُ الأموال؛ فآخرُ المال يكون من مربع آخر عددِ الأموال؛ و‹ مربع › آخر الجذر المطلوب إذا ضُرب في آخر عدد الأموال حصل مكعبُ آخرِ الجذر المطلوب، أعني مكعبَ آخرِ عددِ الأموال. فإذا ضُرب في آخر القسم الآخر من الجذر المطلوب؛ يكون الحاصل أنزَلَ من مكعب آخر الجذر المطلوب، الذي هو آخر عدد الأموال.

فقد تبيّن أن المرتبة السميّة للكعب الأخير وآخرَ عدد الأموال إذا لم يكونا من مرتبة واحدة: فإذا استخرجنا مطلوبَ الكعب لآخر العدد، ووجدناه أرفع من آخر عدد الأموال – كما في الصورة الأولى – فنعلم أنه آخر الجذر المطلوب، ويكون مكعبه حاصلاً في تلك المرتبة وما بعدها. ثم إنا / نحتاج أن نضرب جملة مال المطلوب في عدد الأموال، ونزيده على ل – ٧٣ – و العدد، حتى نعمل عمل المكعب. فنحتاج أن نضرب مال المطلوب في عدد

1 الجذر: جذر / فحصل: فيحصل – 9 لخرج: نخرج – 14 الجذر (الثانية): فوق السطر – 17 لآخر: الآخر – 18 فنعلم: فيعلم – 20 نحتاج: يحتاج / ونزيده: ويزيده – 21 فنحتاج: فيحتاج / نضرب: يضرب

الأموال، فننقل آخر مراتب عدد الأموال إلى المرتبة المنحطة عن المطلوب بقدر انحطاط مرتبته عن مرتبته الحقيقية. وكذا سائر المراتب على الترتيب. ثم لو ضُرب المطلوب في عدد الأموال، ووُضع الضرب مسطحاً ثم ضرب المطلوب في المسطّح، ويزاد على العدد، يكون مثلَ ضرب مال المطلوب في عدد الأموال ‹ مع العدد ›. فلذلك إذا استخرجنا المطلوب نضربه في عدد الأموال ونضعه مسطحاً، ونضربه فى المسطّح ونزيده على العدد؛ ليقوم مقام ضرب مال المطلوب في عدد الأموال، ‹ فنزيده على العدد وننقص مكعب المطلوب من الحاصل. › ثم إذا استخرجنا المطلوب الثاني نحتاج أن نضرب ماله وضِعْف ضربِه فى المطلوب الأول، في عدد الأموال ونزيد المبلغ على العدد، ثم نعمل عمل الكعب بأن نضرب المطلوب الثاني في مال المطلوب الأول وفي [ضعْف] ضربه في المطلوب الأول، ثم ينقص ثلاثة أمثال الضربين. لكنّ ضرب المطلوب الثاني في الأول مرتين، ثم ضربَ الحاصل في عدد / الأموال مثلُ ضرب المطلوب الأول في عدد الأموال |ل – ٧٣ – ظ مرتين، ثم ضربِ الحاصل في المطلوب الثاني. فإذا نقصنا ضعفَ ضرب المطلوب الأول في ثلث عدد الأموال من مال المطلوب الأول، ثم ضربنا المطلوب الثاني في بقية مال المطلوب الأول؛ كان الحاصل ناقصاً من ضرب المطلوب الثاني في مال المطلوب الأول بمقدار ضرب المطلوب الثاني في الأول مرتين ثم ضربِه في ثلث عدد الأموال. وإذا أخذنا ثلاثة أمثاله كان ناقصاً من ‹ ثلاثة أمثال › ضرب المطلوب الثاني في مال المطلوب الأول بمقدار ضرب المطلوب الثاني في الأول مرتين، ثم ضربِ الحاصل في عدد الأموال؛ فإذا نقص ثلاثة أمثاله من العدد يبقى في العدد زيادةٌ بمقدار

1 فننقل: فينقل – 3 في: فوق السطر / الضرب: الضربان – 4 في: فوق السطر – 5 نضربه: يضربه – 6 ونضعه: ويضعه / ونزيده: ويزيد – 7 في: فوق السطر – 8 نحتاج: يحتاج – 9 نضرب: يضرب / ونزيد: ويزيد – 10 نضرب: يضرب – 12 الضربين: الضربان – 16 الأول: للاول – 18 ثم: فوق السطر

ضرب المطلوب الثاني في الأول مرتين، ثم ضربِ الحاصل في عدد الأموال. فلهذا نقصنا ضعفَ ضرب المطلوب الأول في ثلث عدد الأموال من ماله. وكذلك لو نقصنا ثلث عدد الأموال من المطلوب الأول ثم ضربنا المطلوب الثاني في البقية ووضعناه مسطّحاً، ثم ضربنا المطلوب الثاني في المسطّح؛ كان الحاصل ناقصاً من ضرب / ‹ مال › المطلوب الثاني في ل – ٧٤ – و المطلوب الأول بمقدار ضرب مال المطلوب الثاني في ثلث عدد الأموال. فإذا أخذنا ثلاثة أمثاله كان ناقصاً من ‹ ثلاثة أمثال › ضرب ‹ مال › المطلوب الثاني في المطلوب الأول بمقدار ضرب مال المطلوب الثاني ‹ في › عدد الأموال. فإذا نقصناه من العدد يبقى فيه زيادةٌ بمقدار ضربِ مالِ المطلوب الثاني في عدد الأموال. فلهذا نقصنا ثلثَ عدد الأموال من المطلوب الأول. وبعد تمام العمل على المطلوب الثاني، يحصل في مجموع المطلوبين نقصانٌ في الحقيقة بمقدار ثلث عدد الأموال، وفي المال الحاصل نقصانٌ بمقدار ضرب كل واحد من المطلوبين في ثلث عدد الأموال مرّتين. أما نقصان ضرب المطلوب الأول في الثلث مرتين فظاهرٌ. وأما نقصان المطلوب الثاني – فلأنّا ضربناه في المطلوب الأول ‹ الذى › كان ناقصاً بمقدار ثلث عدد الأموال – فوقع في الحاصل نقصان بمقدار ضربه في ثلث عدد الأموال، وضربناه فيه كرّة أخرى عند النقل، فوقع النقصان مرتين. ويستمر بقية العمل على هذا القانون. وبعد تمام العمل زدنا ثلث عدد الأموال على المستخرج؛ لأنا نقصناه من المطلوب / الأول بالفروض ل – ٧٤ – ظ المذكورة.

4 ووضعناه: ووضعنا – 15 فلأنا: ولأنا – 18 ويستمر: ويشمر / هذا: هذه – 19 بالفروض: الفرض

وأما الصورة الثانية، فلأن مطلوب الكعب المستخرج للعدد أنزَلُ من آخر عدد الأموال، فيكون آخر الجذر المطلوب إنما هو ‹من› آخر عدد الأموال. ومعلوم أنه من أي مرتبة هو فيكون مكعبه واقعًا في المرتبة المقابلة للكعب السميّ لمرتبته. فيُنقل آخر عدد الأموال إلى تلك المرتبة. وسائر المراتب على الترتيب، وصار حكم آخر عدد الأموال كحكم المطلوب الأول المستخرج في الصورة الأولى، فنعمل الأعمال المذكورة.

وقد يتفق بعد ضرب ثلث عدد الأموال في المطلوب - الذي هو ‹من› آخر عدد الأموال - امتناع نقصانِ ضعفِ الضرب من مال المطلوب؛ فيُضرب المطلوب في جميع مراتب الثلث، ونضع ضعف هذه الضربات ومراتبها مسطحاً، وينقصُ منها مالُ المطلوب ويُجعلُ بقية المسطّح مقامَ المال، ويُنقص ثلث عدد الأموال من المطلوب. فإذا ضربنا المطلوب الثاني في البقية، ونقصنا ثلاثة أمثال الضربات من العدد، أدى ذلك إلى المقصود؛ ولايخفى عليك شبيهُه.

وأما الصورة الثالثة فلا يخفيها شيءٌ زائد على ما في الصورتين المتقدمتين؛ وذلك / ما أردنا بيانه. ل - ٧٥ - و

المسألة الخامسة: مكعب وأموالٌ وجذور يعدل عدداً:

فليكن ا ب جذرَ عدد الجذور وا ج عدد الأموال. وليكن مربع ا ب في ا د مثلَ العدد المذكور في السؤال. وطريقُ عمله ماسبقَ غيرَ مرة. ونجعل

5 المراتب: مراتب - 6 الأولى: الاول / فنعمل: فيعمل - 9 ونضع: ويضع - 12 ونقصنا: وينقص - 13 شبيهه: شبيه - 17 ا ج: آخر

ا ب عموداً ‹ على جـ د › ، ونعمل على جـ د نصف دائرة، ونخرج عمودي ب هـ د هـ. فسطح ا ب د هـ قائم الزوايا، فإن لم يكن مربعاً فنقطة د أقرب إلى أحد خطّي ا ب ب هـ المحيطَيْن بزاوية ا ب هـ القائمة. فنعمل قِطْعاً زائداً لايقع عليه خطّا ا ب ب هـ ويقاربان محيط القطْع أبداً، ويمرّ محيطه بنقطة د، ويكون منتصف مجانبه نقطة ب، وليكن هو قطع ز د. وإن كان ‹ السطح › مربعاً فنعمل القطع المذكور، رأسُه عند نقطة د، وخطّا ا ب ب هـ يقاربان محيطه أبداً. ولأنا نخرج د هـ بالاستقامة إلى ي فخط هـ ي يُماسّ الدائرة. فإذا أخرجنا خطاً مستقيماً يقسم الزاوية التي بين محيط القطْع وبين خط د ي فلايقع فيما بين محيط الدائرة وبين خط د ي فيقع في الدائرة. وليكن هو خط د ع. فلأن قوس د ع فيما بين د ي د ع فنقطة – ع – في داخل القطع ونقطة جـ خارجة عنه. فيكون القطع في داخل الدائرة. فإذا أخرجناه بغير نهايةٍ يقطع الدائرة / على نقطةٍ، ل – ٧٥ – ظ وليكن على ك. فنخرج عمودي ك م ك ل. فضرب ك م في م ب مثل ضرب ا ب في ا د لأن كل واحد منهما مساوٍ لمربع الخط الذي يصل بين منتصف المجانب وبين العمود الذي يقع من رأس القطْع على الخط الذي لايقع على القطع. فنسقط المشترك – وهو سطح ا ب ل ق – فيبقى سطح ا م ق ك مثلَ سطح ل هـ د ق، فأضلاعهما متكافئة في النسبة. فنسبة ك ق إلى ق د كنسبة ق ل إلى ‹ ا ق، أيْ كنسبة › ا ب إلى ا ق. فنسبة مربع ك ق إلى مربع د ق كنسبة مربع ا ب إلى مربع ا ق. ولأن ك ق عمود على قطر الدائرة فضرب جـ ق في ق د مثل مربع ك ق،

1 ونخرج: ويخرج – 3 بزاوية: يزاده – 4 ويقاربان: ويقارنان – 6 فنعمل: فيعمل – 7 يقاربان: يقارنان / نخرج: يخرج – 9 فلا: لا. كتبت فوق السطر – 11 جـ: ا – 13 فنخرج: فيخرج – 15 القطع على: فوق السطر – 16 فنسقط: فتسقط / ا ب ل ق: ا ب ا ق

وك ق وسطٌ في النسبة بين خطّيْ ج ق ق د، فنسبة مربع ك ق إلى مربع د ق كنسبة ج ق إلى د ق. فنسبة مربع ا ب إلى مربع ا ق كنسبة ج ق إلى د ق. فضربُ مربع ا ب في د ق مثل ضرب مربع ا ق في ج ق. فإذا جعلنا / خط ا ق جذراً فيكون مربعه هو المالَ. فضربُ مربعه ب - ١ - و في ج ق ينقسم إلى ضرب المال في ج ا - وهو عدد الأموال - وإلى ضرب المال في ا ق، وهو مكعب ا ق. فيكون مربع ا ب في د ق مثلَ مكعب الجذر المطلوب وهو ا ق مع أمواله المذكورة فى السؤال. ولأن مربع ا ب - وهو عدد الجذور المذكورة في السؤال - في الجذر المطلوب - وهو ا ق - / هو الجذورُ المذكورة في السؤال، فإذا جمعنا ل - ٧٦ - و مربع ا ب في ا ق - وهي الجذور المذكورة - مع مربع ا ب في د ق - وهو مثل المكعب والأموال المذكورة - يحصل مربع ا ب في ا د مساوياً للمكعب ‹والأموال› والجذور المذكورة. وقد كان مربع ا ب في ا د مساوياً للعدد. فيكون جذور ا ق بالعدّة المذكورة في السؤال مع أمواله بالعدّة التي في السؤال، ومكعبه مساوياً للعدد المذكور؛ وذلك ما أردنا بيانه.

4 خط: هنا تبدأ المخطوطة الثانية التي سنرمز لها بالحرف ب كما رمزنا للأخرى بالحرف ل - 5 وهو: الواو غير واضحة [ل] - 7 ولأن: لأن [ب، ل] - 9 جمعنا: حصلنا [ب، ل] - 13 بالعدة: بالعدد [ل] - 14 المذكور: المذكورة [ل]

وطريق استخراج الجذر المطلوب أن نضع العدد على التخت، ونضع فوقه أصفار الكعب، فيكون للمسألة ثلاث صور:

الصورة الأولى:

أن يكون المرتبةُ السمية للكعب الأخير أرفعَ من آخر مراتب عدد الأموال، وأرفعَ من آخر مراتب جذر عدد الجذور أيضاً، مثل قولنا: مكعب مع أموال بهذه الصورة ١٢ وجذورٌ بهذه الصورة ١٠٢ يعدل عدداً بهذه الصورة ٣٤٣٤٥٣٩٥؛ فنعدّ العدد أيضاً بجذرٍ ولاجذر، ونعرف قدر انحطاط مرتبة آخر عدد الأموال عن المرتبة السميّة للكعب الأخير، وننقل آخر مراتب عدد الأموال إلى المرتبة المنحطة عن الكعب الأخير بذلك القدر؛ ونعرف قدر انحطاط آخر مراتب جذر عدد الجذور عن الجذر السميّ للكعب الأخير، وننقل آخر مراتب عدد الجذور إلى المرتبة المنحطة عن الجذر السميّ للكعب الأخير بذلك القدر؛ ثم نردّ عدد الأموال / وعدد الجذور إلى الثلث، فيكون بهذه الصورة ٣٤٣٤٥٣٩٥ ٣٤، ثم نستخرج مطلوب الكعب – وهو ثلاثة – ونضعه في الكعب ٤ الأخير، وننقص مكعبه من العدد، ونضربه في ثلث عدد الأموال، ونزيد الحاصل على السطر الأوسط – وهو الذي فيه ثلث عدد الجذور – ونضربه في السطر الأوسط، وننقص ثلاثة أمثال كلّ ضربة من العدد، ونزيد مربع المطلوب على السطر الأوسط على المرتبة التي بحذائها، ونضربه في ثلث عدد الأموال كرّة أخرى، ونزيد الحاصلَ على الأوسط، فيكون بهذه الصورة

ل – ٧٦ – ظ

1 نضع: يضع [ل] – 3 ناقص: [ل] – 7 فنعدّ: فيعد [ل] – 7-10 ونعرف قدر... بذلك القدر: ناقصة [ل] – 11 وننقل: وينقل [ل] – 12 نرد: يردّ [ل] – 13 كتب ناسخ [ل] أعداد السطر الثاني – أي ٣٤ – في سطر بعده كعادته. ولم ينسخ السطر الثالث للعدد – أي ٤ – ولن نشير لهذا مرة أخرى – 14 وننقص: وينقص [ل] – 16 ثلث: ثلث ٣٤ [ل] – 17 ونزيد: ويزيد [ل] – 19 ونزيد: ويزيد [ل]

٣ ٥ ٥
٦٢٣٤٧٩٥
٩٢٤٣٤

، ثمّ ننقل الأعلى والأسفل بمرتبتين، والأوسط بمرتبة، ثمّ نضع مطلوباً آخر – وهو اثنان – وننقص مكعبه من العدد، ونضربه في المطلوب الأول، وفي ثلث عدد الأموال، ونزيد حاصل الضرب على الأوسط، ونضربه في الأوسط، وننقص ثلاثة أمثال كلّ ضربةٍ من العدد، ثمّ نزيد مربعه على السطر الأوسط، ونضربه في المطلوب الأول وفي ثلث عدد الأموال ونزيد الحاصل على السطر الأوسط، فيصير بهذه الصورة

٣٢ ٥
٣١٥٩٥٥
١٠٤٩٩٤

. ثم ننقل الأعلى والأسفل بمرتبتين، والأوسط بمرتبةٍ، ونضع المطلوب / الثالث – وهو واحد – وننقص مكعبه من العدد، ونضربه في ل – ٧٧ – و المطلوب الأول والثاني جميعاً وفي ثلث عدد الأموال، ونزيد المبلغ على الأوسط ونضربه في الأوسط. وننقص ثلاثة أمثال كلّ ضربةٍ من العدد، فيرتفع العدد ويحصل السطر الأعلى بهذه الصورة ٣٢١.

الصورة الثانية

أن يكون المرتبة السميّة للجذر الأخير من الجذور المقابلة لعدد الجذور أرفعَ من آخر ‹ مراتب › عدد الأموال ومن المرتبة السميّة للكعب الأخير أيضاً كما في قولنا: مكعب مع ستة أموال، وجذورٌ عددُها بهذه الصورة ٣٠٠٠٠٠٠ يعدل عدداً بهذه الصورة ٩٩٦٦٩٤٤٠٧. فالجذر الأخير من الجذور المقابلة لعدد الجذور إنما هو الجذر الرابع، والمرتبة السميّة له هي الألوف، وسميّ الكعب الأخير إنما هو المئات، فالمرتبة السميّة للجذر الأخير من الجذور المقابلة لعدد الجذور أرفع من آخر مراتب عدد الأموال ومن المرتبة

2 وهو: هو ناقصة [ل] / وننقص: وينقص [ل] / ونضربه: ويضربه ٩٢٤٣٤ [ل] – 3 ونزيد: ويزيد [ل] – 4 ونضربه: ويضربه [ل] / وننقص: وينقص [ل] – 5 ونضربه: ويضربه [ل] / وفي: في [ل] – 6 ونزيد: ويزيد [ل] – 7 لم يكتب ناسخ [ل] السطرين الثالث والرابع من العدد – 8 وننقص: وينقص [ل] – 9 ونزيد: ويزيد [ل] – 10 وننقص: وينقص [ل] – 17 هي: هو [ب، ل]

السميّة للكعْب الأخير. فنضع عدد الجذور كالمقسوم عليه والعدد كالمقسوم، ونعرف موضع مطلوب القسمة وهو في المئات، ونطلب الكعبَ السميَّ لمرتبته، وهو الكعب الثالث، فهناك مكان المطلوب. ثم نعرف قدر انحطاط آخر مراتب عدد الأموال / أو ارتفاعِه عن مرتبة مطلوبِ القسمة. ل - ٧٧ - ظ ويَنقل إلى المرتبة المنحطة أو المرتفعة عن الكعب الذي هو مكان المطلوب بذلك القدر، ونعرف قدر انحطاط مرتبة آخر مراتب عدد الجذور عن مرتبة الجذر السمي للكعب ‹ الأخير › الذي هو مكان المطلوب، أو ارتفاعِه عنه؛ وننقل آخر مراتب عدد الجذور إلى المرتبة المنحطة عن المطلوب أو المرتفعة عنه بذلك القدر. لكنّ آخر مراتب عدد الأموال في المثال وقع في الآحاد وهي منحطة عن مرتبة مطلوب القسمة بمرتبتين، / فنقلنا آخر عدد ب - ١ - ظ الأموال إلى المرتبة المنحطة عن مرتبة الكعب الذي هو مكان المطلوب بمرتبتين. والجذر السميّ للكعب الذي هو مكان المطلوب إنما هو الجذرُ الثالث، وهو في عشرات الألوف، وآخرُ مراتب عدد الجذور مرفوعٌ عنه بمرتبتين، لأنه في ألوفِ الألوف. فرفعنا آخر مراتب عدد الجذور عن مرتبة الكعب الذي هو مكان المطلوب بمرتبتين، ثم نردّ عدد الأموال وعدد الجذور إلى الثلث، فيحصل بهذه الصورة ٩٩٦٦٩٤٤٠٧ / ١٠٠٠٠٠٠، فنستخرج مطلوب الكعب وهو ثلاثة في المثال، ونضعه مكان الكعْب الثالث ونقص مكعبه من العدد ونضربه / في ثلث عدد الأموال، ونزيد المبلغ على السطر ل - ٧٨ - و الأوسط ونضربه في الأوسط، وننقص ثلاثة أمثال كلّ ضربةٍ من العدد.

1 فنضع: فيضع [ل] / كالمقسوم عليه والعدد: ناقصة [ل] – 2 ونطلب: ويطلب [ل] – 4 أو ارتفاعه: وارتفاعه [ب، ل] – 5 وينقل: وينقلى [ل] / المنحطة: المنحط [ل] – 7 هو: فوق السطر [ل] – 8 الجذور: الأموال [ب، ل] / المرتبة: ناقصة [ل] – 10 فنقلنا: نقلنا [ل]، مطموسة [ب] – 13 وهو: وهي [ب، ل] – 14 عن: من [ب، ل] – 15 نرد: يزد [ل] – 16 لم يكتب ناسخ ل إلا السطر الأول من الجدول، ولكنه كتب السطر الثاني من الجدول كجزء من السطر التالي من النص / فنستخرج: فتستخرج [ل] – 17 وننقص: وينقص [ل] – 18 ونضربه: ونضربه .....١ [ل] / ونزيد: ويزيد [ل] – 19 وننقص: وينقص [ل]

ونتمم العمل المذكور كما في الصورة الأولى، فيخرج الجذر المطلوب بهذه الصورة ٣٢١.

الصورة الثالثة:

أن يكون آخرُ مراتب عدد الأموال أرفعَ من المرتبة السميّة للكعب الأخير، ومن المرتبة السميّة للجذر الأخير من الجذور المقابلة لعدد الجذور، كما في قولنا: مكعبٌ وثلاثون جذراً، وأموال عدّتُها بهذه الصورة ٣٠٠٠٠، يَعدِل عدداً بهذه الصورة ٣١٢٤٣١٥٧٩١. فنضع عدد الأموال كالمقسوم عليه، والعَددَ كالمقسوم، ونستخرج مطلوب القسمة، ونعرف مرتبته ونعدّ الجذور من الآحاد إلى مرتبة مطلوب القسمة، ثم نعدّ الكِعاب من الآحاد بتلك العدّة، فيكون هناك مكان المطلوب. ونحطّ آخر عدد الأموال أو نرفعه عن مكان المطلوب بقدْر انحطاط مرتبته عن المرتبة السميّة للكعب الذي هو مكان المطلوب، أو ارتفاعِه عنه. ونحطّ آخر عدد الجذور عن الكعب الذي هو مكان المطلوب أو نرفعه عنه بقدر انحطاط مرتبته عن مرتبة الجذر السميّ للكعب الذي هو مكان المطلوب / أو ارتفاعِه عنه. فاستخرجنا مطلوب ل - ٧٨ - ظ القسمة في المثال، وكان في مرتبة مئات الألوف؛ وعددُ الجذور من مرتبة الآحاد إلى مرتبته ثلاثةٌ. فعددنا الكِعاب بتلك العدّة فانتهى إلى الكعب الثالث، فهناك مكان المطلوب. ولأن المرتبة السميّة لهذا الكعب إنما هي المئات، وآخرَ عدد الأموال في عشرات الألوف، فهي مرفوعة عنها بمرتبتين. فرفعنا آخر عدد الأموال من الكعب الذي هو مكان المطلوب بمرتبتين،

1 ونتمم: ويتمم [ل] – 3 ناقصة [ل] – 5 من: ناقصة [ل] – 6 وثلاثون: وعشرون [ب، ل] – 7 فنضع: فيضع [ل] – 8 والعدد: والعده [ل] / ونستخرج: ويستخرج [ل] / مرتبته: مرتبه [ل] – 10 ونحط: ويحط [ل] / نرفعه: يرفعه [ل] – 13 نرفعه: رفعه [ل] – 16 فعددنا: بعددنا [ل] – 18 عدد: فوق السطر [ل]

فحصل آخر عدد الأموال في مئات ألوف الألوف. ولأن آخر عدد الجذور من مرتبة العشرات – وهي منحطة عن الجذر السميّ للكعب الذي هو مكان المطلوب بثلاث مراتب – نقلنا آخر عدد الجذور إلى المرتبة المنحطّة عن الكعب الذي هو مكان المطلوب بثلاث مراتب؛ ثم رددنا عدد الأموال والجذور إلى الثلث فحصل بهذه الصورة: ٣١٢٤٣١٥٧٩١ ١٠ ١٠٠٠٠، ونضع مطلوب الكعب – وهو ثلاثة في المثال – مكانَ الكعب الثالث، وننقص مكعبها من العدد ونضربه في ثلث عدد الأموال، ونزيد المبلغ على الأوسط فيكون بهذه الصورة / ٣٠٩٧٣١٥٧٩١ ٣٠٠٠٠١٠، ثم نضرب المطلوب في السطر ل - ٧٩ - و الأوسط، وننقص ثلاثة أمثالٰ كل ضربةٍ من العدد، ونزيد مربعه على العدد، ونضربه في الأسفل كرّةً أخرى، ونزيد المبلغ على الأوسط، ثم ننقل الأعلى والأسفلَ بمرتبتين والأوسطَ بمرتبةٍ ونعمل العملَ السابق إلى آخره، فيخرج الجذر المطلوب بهذه الصورة ٣٢١.

وأما بيان جهة العمل: فلأن العدد مركبٌ من ثلاثة أصنافٍ وهي المكعب والمسطّح الذي من ضرْب الجذر المطلوب في عدد الجذور ونسمّيه المسطَّحَ الأول، ومن ضرْب المال في عدد الأموال ونسمّيه المسطّحَ الثانى؛ فهذه المسألة مركبة من المسألة الأولى والثالثة، واجتمع فيها خاصةُ كلْتيهما، فإن كان آخر الجذر المطلوب أرفعَ من جذر آخر عدد الجذور ومن آخر عدد

1 في: فوق السطر [ل] – 3 نقلنا: فنقلنا [ب، ل] – 4 رددنا: دورنا [ل] – 5 كالعادة كتب ناسخ ل السطرين الأخيرين من الجدول في سطور النص التالية / كتب ناسخ ب السطر الثاني تحت ٧٩ – 6 وننقص: وينقص [ل] – 7 ونضربه: ونضربه ١٠ ١٠٠٠٠ [ل] / ونزيد: ويزيد [ل] – 8 انظر التعليق على الجدول السابق / نضرب: يضرب [ل] – 9 وننقص: وينقص [ل] / ونزيد: ويزيد [ل] – 10 العدد: العدد ٣٠٠٠٠١ – [ل] / ونضربه: ويضربه [ل] / ونزيد: ويزيد [ل] – 11 ننقل: ينقل [ل] / بمرتبتين: بمرتبتين ١٠ [ل] – 14 المكعب: الكعب [ل] / ونسميه: وقسمته [ل] – 15 ونسميه: وقسمته [ل] – 16 الأولى: الاول [ل] / الأولى والثالثة: أي من مسألتي: مكعب وجذور تعدل عدداً، ومكعب وأموال تعدل عدداً – 17 عدد: ناقصة [ل] / ومن: من [ل]

الأموال، فيكون آخر المكعب أرفع من آخر كل واحدٍ من المسطحين، فيكون واقعاً فى آخر العدد كما في الصورتين الأوليين من المسألة الأولى والثالثة؛ وإن كان جذر آخر عدد الجذور أرفع من آخر الجذر المطلوب ومن آخر عدد الأموال فيكون آخر عدد الجذور، أرفعَ من آخر المال، وضربُه في آخر الجذر المطلوب يكون أرفعَ من ضرب مالِ آخرِ الجذر المطلوب في آخر الجذر، وهو آخر المكعب، كما تبيّن في المسألة الأولى. فيكون / آخر ل – ٧٩ – ظ المسطّح الأول أقربَ إلى آخر العدد من آخر المكعب. ولأن جذر آخر عدد الجذور أرفعُ من آخر عدد الأموال فيكون نسبةُ هذا الجذر إلى آخر الجذر المطلوب أعظم من نسبة آخر عدد الأموال إلى آخر الجذر المطلوب، ونسبة مال هذا الجذر إلى مالِ آخرِ الجذرِ المطلوبِ أعظمَ من نسبة هذا الجذر إلى آخرِ الجذرِ المطلوبِ؛ لأنه إذا كان مقدارٌ أعظم من مقدارٍ أصغرَ فإن نسبة مربع الأعظم إلى مربع الأصغر أعظمُ من نسبة الأعظم إلى الأصغر. لأن / المسطّح الحاصل من ضرْب الأعظم في الأصغر أعظمُ من مربع ب – ٢ – و الأصغر؛ فنسبةُ مربع الأعظم إلى مربع الأصغر أعظمُ من نسبته إلى هذا المسطّح، وهي كنسبة الأعظم إلى الأصغر، فنسبة مربع الأعظم إلى مربع الأصغر أعظمُ من نسبة الأعظم إلى الأصغر، فنسبة مال ⟨آخر⟩ هذا الجذر إلى مال آخرِ الجذر المطلوبِ أعظمُ من نسبة آخر عدد الأموال إلى آخر الجذر المطلوب. فيكون ضربُ آخر عدد الجذور في آخر الجذر المطلوب – وهو آخر المسطّح الأول – أعظمَ من ضرب مال آخرِ الجذر المطلوب في آخر عدد الأموال، وهو آخر المسطّح الثاني. فقد تبين في هذه الصورة أن آخر / المسطّح الأول يكون في آخر العدد. ولأن آخر عدد ل – ٨٠ – و

2-4 العدد كما ... الأموال فيكون: ناقصة [ل] – 12 الأعظم: مكتوبة في كثير من الأحيان في ب، ل، للأعظم وهي طريقة بعض النساخ في كتابة أداة التعريف – 20 تبين: نبين [ل]

الأموال معلوم، وكذا آخر عدد الجذور مع آخر جذره، فنعلم من ذلك أن مرتبة آخر جذره أرفعُ من آخر عدد الأموال. ولأن في هذه الصورة قد وقع آخر المسطّح الأول في آخر العدد؛ فمطلوب كعبه يكون أقل من جذر آخر عدد الجذور. فإذا استخرجنا مطلوب الكعب يكون أنزلَ من جذرِ آخرِ عدد الجذور، ويكون مع ذلك جذرُ آخرِ عددِ الجذور أرفعَ من آخر عدد الأموال. فنعلم أن آخر العدد إنما هو ⟨ من ⟩ المسطّح الأول. ولأن ⟨ آخر ⟩ المسطّح الأول حاصلٌ من ضرب آخر عدد الجذور في آخر الجذر المطلوب؛ فإذا قسمناه على عدد الجذور فالمطلوب الأول يكون آخر الجذر المطلوب، ويكون مكعبه واقعاً في المرتبة السميّة لهذا المطلوب، فنزيد ثلث عدد الجذور بحسب مكان مالِه، وثلثَ عدد الأموال بحسب مكانه؛ وبقية البيان يرجع إلى ماتقدم.

وإن كان آخرُ عدد الأموال أرفعَ من جذر آخر عدد الجذور ومن آخر الجذر المطلوب، فلا يجب أن يكون آخرُ المسطّح الثاني واقعاً في آخر العدد. فإن هذه الثلاثة إن كانت متناسبةً: أعظمُها آخرُ / عدد الأموالِ، وأصغرُها ل – ٨٠ – ظ آخرُ الجذرِ المطلوب، وجذرُ آخر عددِ الجذور متوسطٌ؛ فيكون آخر العدد مركباً من آخر كلا المسطحين، لأنه حينئذ يكون نسبةُ مربع آخرِ الجذر المطلوب إلى مربع جذر آخرِ عدد الجذور كنسبةِ آخر الجذر المطلوبِ إلى آخر عدد الأموال، فضرْب مربع آخر الجذرِ المطلوبِ في آخر عدد الأموال يكون مثلَ ضرب مربع جذرِ آخرِ عددِ الجذور في آخر الجذر المطلوب. وإن كانت متناسبة وأصغرُها آخرُ عددِ الأموال، وأعظمُها آخرُ الجذرِ المطلوب؛

4 يكون: ويكون [ب. ل] – 9 فنزيد: فيزيد [ل] – 13 آخر العدد: المقصود آخر العدد وحده – 16 المسطحين: السطحي [ل] – 18 الجذر: جذر [ل] – 20 وأصغرها: أصغرها [ل]

فيكون آخرُ المكعب وهو مكعبُ آخرِ الجذر المطلوب واقعاً في آخر العدد، وآخرُ كلا المسطّحين في مرتبة واحدة. فإذا وجدنا آخر عدد الأموال أرفعَ من جذرِ آخر عدد الجذور، يكون مطلوب الكعب المستخرج أنزَلَ من آخر عدد الأموال، وآخرُ الجذر المطلوب مجهول، فيكون آخر العدد مجهولاً. فلأن آخر المسطّح الثاني إذا قُسم على عدد الأموال يكون المطلوبُ الأول هو مال آخرِ الجذرِ المطلوب أبداً، وإذا كان الواقعُ في آخر العدد إنما هو المسطّح الأول، لكونه أزْيدَ من آخر المسطّح الثاني: / فإذا قُسم المسطّح ل - ٨١ - و الأول على عدد الأموال يكون المطلوب الخارجُ أزْيد مما إذا قسم عليه المسطّح الثاني؛ فيكون المطلوب الخارج من القسمة أكثرَ من مال آخرِ الجذرِ المطلوب. ومعلومٌ أن هذا العدد الحاصل وآخره إذا اجتمع من مكعب آخر الجذر المطلوب، ومن ضرْبه في عدد الجذور، ومن ضرب ماله في عدد الأموال: فإذا وُضع عددٌ أكثرُ من آخر الجذر المطلوب فلا يحتمل هذا العددُ أن نعمل به العمل المذكور.

فإذا استمر العملُ المذكور على مطلوب الكعب، فيتعين أن آخر العدد إنما هو ‹ من › المسطّح الأول. فليُقسم على عدد الجذور، فيخرجُ المطلوب آخر الجذر المطلوب ويتمّم العمل. وإذا قسمنا على عدد الأموال واستخرجنا المطلوب، وعملنا على القانون واستمر العمل المذكور، فنعلم أن آخر العدد قد كان آخر المسطّح الثاني.

وأما إذا كان آخر المسطّحين وآخرُ المكعب جميعاً واقعاً في آخر العدد — وذلك عندما يكون المرتبةُ السميّة للكعب الأخير وآخرُ عدد الأموال وجذرُ عددِ الجذور كلُّها من مرتبة واحدة — فسواء استخرجنا مطلوب الكعب أو

1 وهو: و [ل] — 3 يكون: ويكون [ب، ل] — 5 المسطح: السطح [ل] — 17 فنعلم: فيعلم [ل]

مطلوب القسمة على عدد الأموال، أو على عدد الجذور يكون / أكثر من ل - ٨١ - ظ الواجب، فننقص منه واحداً واحداً ونمتحنه حتى نتمكن من تمام العمل.

وبيانُ ضربات سائرِ هذه الأعمال إنما هي مفصلة في المسائل المتقدمة؛ وذلك ما أردنا بيانه.

المسألة السادسة: عددٌ وجذورٌ وأموالٌ يعدل مكعباً.

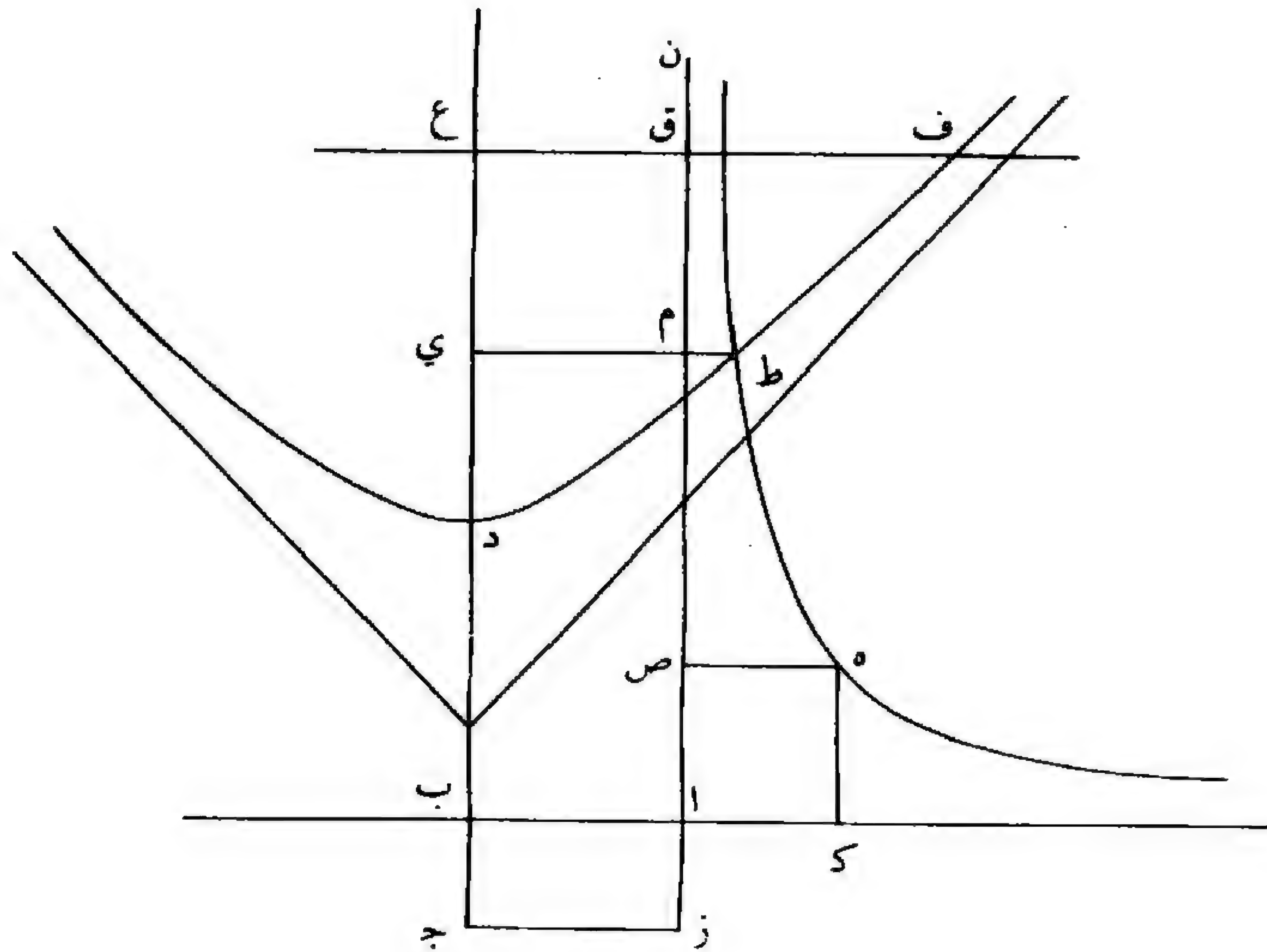
فليكن ا ب جذرَ عددِ الجذورِ وب د عدد الأموال. وليكن مربع ا ب في ب ج مثلَ العدد كما سبق غيرَ مرةٍ. ونجعل ب د قائماً على ا ب ونخرج ب ج على استقامة ب د، ونخرج عمودي ا ز ج ز، ونخرج ا ب بالاستقامة، ونعمل سطح ا هـ مثل ا ج، ونعمل فيما بين خطي ا ك ا ن المحيطين بزاوية ك ا ن القائمة قطْعاً زائداً يمرّ محيطه بنقطة هـ ولايقع عليه خطّا ا ن ا ك، ويقاربان محيط القطْع، ويكون منتصف مجانبه نقطة آ، وليكن هو قطْع ل هـ. ونعمل قطْعاً آخر زائداً، رأسه عند نقطة د، ومجانبه ج د، ونفصل د ع مثلَ ب ك، ونخرج عمود ع ف ‹على د ب›. فلأن ضرب د ع في ع ج مثل مربع ع ف، فـ ع ف وسط في النسبة بين د ع ع ج، فـ ع ف أطول من ع د، أعني ب ك، وع ق مثل ا ب،

1 يكون: ويكون [ب، ل] – 2 فننقص: فينقص [ل] / ونمتحنه: ونمتحنه [ل] / نتمكن: يتمكن [ل] – 3 ضربات: ضروبا [ل] / مفصلة: مفصلى [ب، ل] – 5 المسألة السادسة: ناقصة [ل] – 7 كما: لما [ب، ل] / غير: عشر [ل] – 8 ونخرج (الأولى والثانية والثالثة): ويخرج [ل] / ا ب: ب ا ر [ب، ل] – 9 ونعمل: ويعمل [ل] / سطح: المقصود هنا مربع / ا ن: قد تقرأ النون باءً مهملة في [ب، ل] – 10 بزاوية ك ا ن: بزاوايه [ب] / يزادايه [ل] – 11 ويقاربان: يقارنان [ل] – 12 ومجانبه: ومجانبته [ل] – 13 ونفصل: ويفصل [ل] / ب ك: ب س [ب، ل] / مع ملاحظة أن ناسخ [ل] لا يخط فوق الحروف، ولن نشير لهذا مرة اخرى – 13-15 فلأن ... مثل ا ب: ناقصة [ل] – 15 ب ك: ب س [ب]

فخط ق ف أطول من ا ك. ولأن خط ا ن دائماً يقرب من محيط قطع ل هـ، فنخرج من نقطة ق عموداً ‹على ا ن› إلى محيط القطع ‹ل هـ› ويكون أصغرَ من ص هـ، أعني ا ك، فيكون محيط قطع ل هـ في ذلك الموضع داخلَ قطعِ ف د، وقد كان خارجاً عنه عند نقطة ل. فالقطْعان يتقاطعان، وليكن تقاطعهما على نقطة ط /، فنخرج ط ي عموداً على د ع ل - ٨٢ - و
فيكون عموداً على ا م أيضاً؛ فسطح ا ط مثل ا هـ، لأن كل واحد منهما مثلُ / مربع الخط الذي يصل بين منتصف المُجانب وبين العمود الذي ب - ٢ - ظ
يقع من رأس القطع على الخط الذي لايقع على القطع. و ا هـ مثل ا ج، فـ ا ط مثل ا ج. فنجعل سطح ا ي مشتركاً، فسطح ب ط مثل ج م. فأضلاعهما متكافئة في النسبة. فنسبة ط ي إلى ج ي كنسبة م ي – أعني ا ب – إلى ب ي. فنسبة مربع ط ي إلى مربع ج ي كنسبة مربع ا ب إلى مربع ب ي. ولأن ضرب ج ي في ي د مثلُ مربع ي ط، فنسبة ج ي إلى ط ي كنسبة ط ي إلى ي د. فنسبة مربع ط ي إلى مربع ج ي كنسبة خط د ي إلى ي ج. فنسبة مربع ا ب إلى مربع ب ي كنسبة خط د ي إلى ج ي. فضرب مربع ا ب في ج ي مثلُ ضرب مربع ب ي في د ي. فإذا جعلنا ب ي جذراً يكون مربعُ ا ب في ب ي جذوراً بالعدّة المذكورة في السؤال، ومربع ا ب في ب ج مثل العدد المذكور في السؤال، ومجموعهما مساوٍ لمربع ا ب في ي ج المساوي لمربع ب ي في د ي، فمربع ب ي – وهو المال – في

1 فخط ق ف: ناقصة [ل] / ق ف: د ف [ب] / ا ك: ا س [ب، ل] – 2 فنخرج: فيخرج [ل] – 3 أصغر: ناقصة [ل] / ا ك: ا س [ب، ل] – 4 ف د: قد تقرأ الفاء باءً [ب، ل] – 5 فنخرج: فيخرج [ل] / ط ي: ط ب [ل] – 8 و ا هـ: هـ [ل] – 9 سطح: ناقصة [ل] – 14 د ي: ناقصة في [ب] / وهناك علامة النقصان في مكانها، وأضافها الناسخ في الهامش على ما يبدو وإن لم تخرج بوضوح في التصوير / ي ج: ب ج [ب، ل] – 18 ا ب: لـ [ب، ل] – 19 د ي: د [ب، ل] / فمربع: لمربع [ل]

ب د – وهو عدد الأموال – يكون مبلغ الأموال المذكورة في السؤال. ومجموع / مربع ب ي المال في ي د وفي ب د، وهي الجذور والعدد ل – ٨٢ – ظ والأموال مثل مربع ب ي في ب ي، وهو مكعب ب ي. فقد وجدنا خطّ ب ي يكون مكعبُه مثلَ مجموع أمواله وجذورِه المذكورةِ والعددِ المذكور؛ وذلك ما أردنا بيانه.



وأما استخراج المطلوب فنضع العدد على التخت ونضع فوقه أصفار الكعب. وللمسألة صور كثيرة يُعرف كيفية عملها من ثلاث صور:

الصورة الأولى:

أن يكون المرتبةُ السميّة للكعب الأخير أرفع من آخر ‹ مراتب › عدد الأموال ومن المرتبة السميّة للجذر الأخير من الجذور المقابلة لعدد الجذور. مثل قولنا: ثلاثون مالاً وستمائة جذرٍ وعددٌ بهذه الصورة ٢٩٧٩٢٣٣١ يعدل

6 فنضع: فيضع [ل] / ونضع: ويضع [ل] – 8 ناقصة [ل]

مكعباً. فينقل آخر مراتب عدد الأموال إلى المرتبة المنحطة عن الكعب الأخير بقدر انحطاط مرتبته عن المرتبة السميّة للكعب الأخير، وينقل آخر عدد الجذور إلى المرتبة المنحطة عن الكعب الأخير بقدر انحطاط الجذر الأخير من الجذور المقابلة لعدد الجذور عن الجذر السميّ للكعب الأخير، ونردّ عدد الأموال والجذور إلى الثلث فيحصل بهذه الصورة ٢٩٧٩٢٣٣١ / ٢٠٠، ثم نضع / مطلوب الكعب – وهو ثلاثة – مكان الكعب الأخير، ونضربه ل – ٨٣ – و في ثلث عدد الأموال ‹ونزيد ثلث عدد الجذور› ونضع المبلغ في الأوسط، ونضربه في الأوسط ونزيد ثلاثة أمثال كل ضربة على العدد، وننقص مكعب المطلوب من العدد، ونُبطل المسطّح الحاصل من ضرب المطلوب في ثلث عدد الأموال، ونضع مربع المطلوب فيما بين العدد وثلثِ عدد الجذور، فيكون بهذه الصورة ٣ / ٥٦٧٢٣٣١ / ٩٠٠ / ٢٠٠، ثم ننقص ثلث عدد الجذور من مربع الثلاثة ونُبطل السطر الذي فيه ثلثُ عدد الجذور، ثم نضرب المطلوب في ثلث عدد الأموال، وننقص ضعف المبلغ من بقية مربع المطلوب، وننقص ثلث عدد الأموال من المطلوب، ونبطل السطر الذي فيه ثلث عدد الأموال، وننقل الأعلى بمرتبتين، والأسفلَ بمرتبةٍ، فيصير بهذه الصورة ٢٩ / ٥٦٧٢٣٣١ / ٨٣٨، ثم نضع المطلوب الثاني فوق التسعة التي تحت مكان المطلوب الثاني، وهو اثنان، وننقص مكعبه من العدد ونضربه في بقية المطلوب الأول ونزيد المبلغ على الأسفل ونضربه في / الأسفل وننقص ل – ٨٣ – ظ

2 مرتبته: مرتبه [ل] – 5 ونردّ: ويزد [ل] – 6 كتب ناسخ [ل]. كعادته سطري الجدول الأخيرين في سطور النص / نضع: يضع [ل] / ونضربه: ويضربه [ل] – 7 في: في ٣٠٠ [ل] – 8 ونضربه في الأوسط: في الهامش [ب] / ونزيد: ويزيد [ل] – 9 وننقص: وينقص [ل] / ونبطل: ويبطل [ل] – 10 المطلوب (الأول): كتب ناسخ ل ١٠ فوقها، وهي عشرة الجدول / ونضع: ويضع [ل] – 11 نفس التعليق للسطور الثلاثة الأخيرة من الجدول [ل] / ننقص: ينقص [ل] – 12 ونبطل: ويبطل [ل] / نضرب: نضرب ٩٠٠ [ل] – 13 وننقص: وينقص [ل] / من: من ٢٠٠ [ل] – 14 ونبطل: ويبطل [ل] – 15 وننقل: وينقل [ل] / فيصير: كتب ناسخ ل العدد ١٠ – وهو آخر سطر من الجدول السابق – عليها – 16 الصورة: وضع ناسخ ب علامة نهاية الفقرة بعدها، ولم يكتب ناسخ ل إلا السطرين الأولين من الجدول / نضع: يضع [ل] / المطلوب: مطلوب [ك] – 17 وننقص: وننقص [ل] / العدد: العدد ٨٣٨ [ل] / ونضربه: ويضربه [ل] – 18 ونزيد: ويزيد [ل] / ونضربه: ويضربه [ل] / وننقص: وينقص [ل]

ثلاثة أمثال كل ضربةٍ من العدد، ثم نضرب المطلوب الثاني في بقية المطلوب الأول كرّةً أخرى، ونزيد المبلغ على الأسفل، ثم نزيد مربع المطلوب الثاني على الأسفل، ونزيد المطلوب الثاني على ماتحته من بقية المطلوب الأول؛ ليحصل في مكانه الواجب له، وننقل الأعلى بمرتبتين، والأسفلَ بمرتبةٍ، ثم نضع المطلوب الثالث – وهو الواحد – ونعمل به العمل السابق، فيخرج الأعلى بهذه الصورة ٣١١، فنزيد عليه ثلث عدد الأموال فيصير بهذه الصورة ٣٢١، وهو الجذر المطلوب.

الصورة الثانية:

أن يكون المرتبةُ السميّة للجذر الأخير من الجذور المقابلة لعدد الجذور أرفع من المرتبة السميّة للكعب الأخير، ومن آخر مراتب عدد الأموال، كما في قولنا: تسعة وتسعون مالاً وجذورٌ عددها بهذه الصورة / ٧٠٢٠٠ وعددٌ ب - ٣ - و
بهذه الصورة ٣٤٠٩٠٢ يعدل مكعباً. فنطلب الكعب السميّ للجذر الأخير من الجذور المقابلة لعدد الجذور، فهناك مكان المطلوب. فإن كان آخر مراتب عدد الجذور في المرتبة المرفوعة / عن الجذر الأخير من الجذور ل - ٨٤ - و
المقابلة لعدد الجذور فينقل آخر مراتب عدد الجذور إلى المرتبة المرفوعة عن مرتبة الكعب الذي هو مكان المطلوب بذلك القدر. وإن كان مقابلاً له فننقله إلى مقابلة الكعب الذي هو مكان المطلوب. ونعرف المرتبة السميّة للكعب الذي هو مكان المطلوب، ونعرف قدر انحطاط آخر مراتب عدد الأموال أو ارتفاعه، وننقله إلى المرتبة المنحطة أو المرفوعة عن مكان

1 نضرب: يضرب [ل] – 2 ونزيد: ويزيد [ل] / نزيد: يزيد [ل] – 3 ونزيد: ويزيد [ل] – 4 وننقل: وينقل [ل] – 5 نضع: يضع [ل] – 6 فنزيد: فيزيد [ل] – 8 ناقصة [ل] – 9 لعدد: بعدد [ل] – 12 فنطلب: فيطلب [ل] – 13 آخر: ناقصة [ل] – 14 عن: من [ب، ل] – 17 فننقله: فينقله [ل] / هو: فوق السطر [ل] – 18 قدر: ناقصة [ل] – 19 وننقله: وينقله [ل]

المطلوب بذلك القدر. لكن الجذر الأخير من الجذور المقابلة لعدد الجذور في المثال إنما هو الجذر الثالث وآخر ‹ مراتب › عدد الجذور في مقابلته وسميُّه الكعبُ الثالث، فنقلنا آخر مراتب عدد الجذور إلى مقابلةِ الكعبِ الثالث. ولأن المرتبة السميّة للكعب الذي هو مكان المطلوب إنما هي المئات وآخر عدد الأموال منحطٌّ عنه بمرتبة، فنقلناه إلى المرتبة المنحطة عن الكعب الذي هو مكان المطلوب بمرتبةٍ، فحصل بهذه الصورة ٠٣٤٠٩٠٢ ٧٠٢، ثم نطلب عدداً يمكن نقصان مربعه من آخر مراتب عدد الجذور ونزيد ٩٩ عليه واحداً ونضربه في عدد الأموال، ونزيده على الأوسط ونضربه / في الأوسط ل - ٨٤ - ظ

ونزيد الحاصل على العدد، ثم ننقص مكعبه من العدد. فإن أمكن ذلك فهو مطلوب الكعب، وإن لم يمكن نقصانُ مكعبه منه فنستأنف العمل ونضع عدداً يمكن نقصان مربعه من آخر مراتب عدد الجذور ولانزيد عليه واحداً. لكن العدد المقابل لمكان المطلوب في المئات عددُ السبعة وليس فى عشراتها شيء، فالعدد الذي يمكن نقصان مربعه منه عددُ الاثنين، فزدنا عليه واحداً فصار ثلاثةً فوضعنا الثلاثة مكان الكعب الثالث وضربناه في مراتب عدد الأموال وزدناه على سطر عدد الجذور، وضربناه في الأوسط وزدنا المبلغ على العدد، ثم نقصنا مكعب الثلاثة من العدد، فأمكن النقصان فالمطلوب صحيحٌ، وصار بهذه الصورة ٣٣١٠٩٠٢ ٩٩٩، فنبطل السطر الذي فيه عددُ الجذور مع السطر الذي فيه عدد الأموال ٩٩٤، ونضع ثلث عدد الجذور في السطر الأسفل، ونضع مربع المطلوب في السطر الأوسط،

2 مقابلته: مقابلة [ل] – 3 فنقلنا: فيقلنا [ل] – 5 فنقلناه: فيقلناه [ل] – 6 هو: فوق السطر [ل] / نفس التعليق على الجدول، انظر ماسبق / نطلب: يطلب [ل] – 7 ونزيد: ويزيد [ل] – 8 على: على ٧٠٢ [ل] – 9 ننقص: ينقص [ل] – 10 الكعب: الكعب ٩٩ [ل] / فنستأنف: فيستأنف [ل] – 11 ونضع: ويضع [ل] – 17 نفس التعليق على الجدول / فنبطل: فيبطل [ل] – 18 ونضع: ويضع [ل] – 19 السطر: السطر ٩٩٩٠٠ [ل] / ونضع: ويضع [ل]

ونقص ثلث عدد الجذور من مربع المطلوب، ثم نبطل ثلث عدد الجذور / ونضع ثلث عدد الأموال مكان عدد الأموال على هذه الصورة ل - ٨٥ - و ٣٣١٠٩٠٢ (٥ ٢ / ٦٦٦)، ونضرب المطلوب في ثلث عدد الأموال، وننقص ضعف المبلغ من السطر الأوسط (٣٣)، وننقص ثلث عدد الأموال من المطلوب، ونبطل ثلث عدد الأموال، فيصير بهذه الصورة ٣٣١٠٩٠٢ (٢٦٧٥ ٥ / ٤٦٨)، وننقل الأعلى بمرتبتين والأسفل بمرتبة، ثم نضع المطلوب الثاني، وهو اثنان فوق الستة التي حصلت في مكانه، ونضربه في بقية المطلوب ونزيده على الأسفل ونضربه في الأسفل، وننقص ثلاثة أمثال كلّ ضربةٍ من العدد، ونُنقص مكعبه من العدد أيضاً، ونضربه كرّةً أخرى في الأعلى ونزيد المبلغ على الأسفل، ونزيد مربعه على الأسفل، ونزيد المطلوب الثاني على المرتبة التي تحته من بقية المطلوب الأول، ليحصل في مكانه الواجب له، وننقل الأعلى بمرتبتين والأسفلَ بمرتبةٍ ونتمّم العمل إلى آخره. وبعد الفراغ من العمل نزيد ثلث عدد الأموال على السطر الأعلى فيصير بهذه الصورة ٣٢١ وهو الجذر المطلوب.

الصورة الثالثة:

أن يكون آخرُ مراتب عدد الأموال / أرفع من المرتبة السميّة للكعب ل - ٨٥ - ظ الأخير، ومن المرتبة السميّة للجذر الأخير من الجذور المقابلة لعدد الجذور، كما في قولنا: ثلاثمائة مالٍ وستة آلاف جذرٍ وعددٌ بهذه الصورة ٢٣٧٨٦١

1 ونقص: وينقص [ل] / نبطل ثلث: يبطل ثلث ٩٩ [ل] – 2 ونضع: ويضع [ل] – 3 انظر التعليق السابق على الجدول / ونضرب: ويضرب [ل] / وننقص: وينقص [ل] / المبلغ: المطلوب [ب، ل] – 4 وننقص: وينقص [ل] / ثلث: ثلث ٦٦٦ [ل] / ونبطل: ويبطل [ل] – 5 انظر التعليق السابق على الجدول، ولقد كتب ناسخ ب واحداً بدلاً من ثمانية في السطر الثالث من الجدول، ونقل ناسخ ل هذا الواحد. / وننقل: وينقل [ل] / الأعلى: ٣٣ الأعلى [ل] – 6 فوق: كتبها ناسخ ب مهملة وبصورة توحي بأنها «دون» وهذا ما نقله ناسخ [ل] / التي: ٦٤١ التي [ل] – 7 ونضربه (الأولى والثانية): ويضربه [ل] – 8 وننقص (الأولى والثانية): وينقص [ل] – 9 ونضربه: ويضربه [ل] / ونزيد: ويزيد [ل] – 10 ونزيد (الأولى والثانية): ويزيد [ل] – 11 بقية المطلوب: ممحوة [ب] / وننقل: وينقل [ل] – 12 ونتمم: ويتمم [ل] / نزيد: يزيد [ل] – 15 ناقصة [ل]

يعدل مكعباً. فيُطلب الكعب السميّ لآخر مراتب عدد الأموال، ويُنقل آخر مراتب عدد الأموال إليه، ونجعل آخر عدد الأموال مطلوباً، ونعرف الجذر السميّ لآخر مراتب عدد الأموال، ونعرف قدر انحطاط آخر مراتب عدد الجذور عن المرتبة التي تقابل ذلك الجذر، وننقل آخر مراتب عدد الجذور إلى المرتبة المنحطة عن الكعب السميّ لآخر مراتب عدد الأموال بذلك القدر. لكن الكعب السميّ لآخر ‹ مراتب › عدد الأموال في المثال إنما هو الكعب الثالث، فنقلنا آخرَ مراتب عدد الأموال إلى مقابلته؛ وآخرُ عدد الأموال في المرتبة الثالثة وهي المئات، والجذرُ السميُّ له هو الجذر الثالث في عشرات الألوف، وآخرُ عدد الجذور في الألوف؛ فهي منحطة عن هذا الجذر بمرتبةٍ، فنقلنا آخر مراتب عدد الجذور إلى المرتبة المنحطة عن الكعب السميّ لآخر مراتب عدد الأموال / بمرتبةٍ، وجعلنا الثلاثة التي هي ب – ٣ – ظ
‹ في › آخر مراتب / عدد الأموال مطلوباً، فحصل بهذه الصورة ل – ٨٦ – و

٥ ٥ ٣
٠٢٣٧٨٦١
٦٠٠٠

، ثم نضرب المطلوب في عدد الأموال إلا في المرتبة الأخيرة، ونزيده ٣٠٠ على الأوسط؛ لكنّ المراتب التي قبل المرتبة الأخيرة في المثال خاليةٌ من العدد، فبقي السطر الأوسط بحاله، ثم نضرب المطلوب في السطر الأوسط ونزيد المبلغ على العدد، ثم نردّ عدد الجذور والأموال إلى الثلث، ونضع مربع الثلاثة فيما بين العدد وثلث عدد الجذور، وننقص منه ثلث عدد الجذور، ثم نضرب ثلث عدد الأموال في المطلوب، وننقص ضعفه من بقية مربعه، وننقص ثلث عدد الأموال من المطلوب، ونبطل ثلث

4 تقابل: تقابله [ب، ل] / وننقل: وينقل [ل] – 5 مراتب: ممحوة [ب] – 6 المثال: الميال [ل] – 7 فنقلنا: نملنا [ب]، يقلنا [ل] / مقابلته: مقابله [ل] – 10 فنقلنا: قد تقرأ نفلنا [ب]. يقلنا [ل] – 13 انظر التعليق السابق على الجدول / نضرب: يضرب [ل] – 14 المثال: الميال [ل] – 15 من: عن [ل] / نضرب: يضرب [ل] – 16 ونزيد: ويزيد [ل] – 17 ونضع: ويضع [ل] / وننقص: وينقص [ل] – 18 نضرب: يضرب [ل] / وننقص: وينقص [ل] – 19 وننقص: وينقص [ل] / ونبطل: ويبطل [ل]

عدد الجذور والأموال، وننقل السطر الأعلى بمرتبتين، والأسفل بمرتبةٍ، ونعمل العمل السابق إلى آخره، فيحصل السطر الأعلى بهذه الصورة ٢٢١ فنزيد عليه ثلث عدد الأموال، فيحصل الجذر المطلوب.

وأما بيان جهة العمل: فاعلم أن المكعب في هذه المسألة انقسم إلى ثلاثة أقسام، أعني: العددَ، والمسطّحَ الأول، و ‹ المسطّحَ › الثاني. فيكون عددُ الجذور بعضَ مال الجذر، وعددُ الأموال بعضَ الجذر. والعددُ حاصل / من ضرب المال في بعض الجذر، والجذرُ انقسم إلى ثلاثة ل - ٨٦ - ظ أقسام: قسم هو عدد الأموال، وقسم يكون ضربُ المال فيه مساوياً لضرب الجذر في عدد الجذور، وقسم يكون ضرب المال فيه مثلَ العدد. فإن كان آخر الجذر في القسم الثالث، فلأن آخر الجذر في القسم الذي ضرب في المال حتى حصل العدد، ومربع آخر الجذر موجود في المال، فإذا ضرب آخر الجذر في المال فيحصل ضربه في مربعه، فمكعب آخر الجذر يكون موجوداً في العدد، وهو آخر المكعب، ويكون منحطّه مقابلَ الكعب الأخير المقابل للعدد. فإذا استُخرج مطلوب الكعب في ذلك الموضع فيخرج آخر الجذر المطلوب. وكذلك يكون أرفع من جذر آخر عدد الجذور، لأن هذا الجذر لو كان آخرَ الجذر المطلوب. وآخرَ عدد الجذور – وهو مالُه – إذا ضرب في ‹ آخر › الجذر المطلوب يحصل مكعبُ ‹ آخر الجذر المطلوب وهو من جذر › آخرِ عددِ الجذور؛ فآخر ‹ مكعب › الجذر المطلوب في آخر المسطّح الأول. وقد فرضنا أنه في آخر العدد؛ فإذا جمع المسطّح الأول مع العدد فيكون ضعفُ مكعب آخر الجذر المطلوب موجوداً

1 وننقل: وتنقل [ل] / السطر: في الهامش [ب] – 3 فنزيد: فيزيد [ل] – 6 مال الجذر: مال الجذور [ل] – 7 بعض الجذر: بعض الجذور [ل] – 9 يكون: كتب ناسخ ب يكون فيه، ثم عاد فحذف فيه – 13 منحطه: منخطه [ل] – 15 وكذلك: ولذلك [ب، ل]، نرجح هذا التصحيح لأن هذا بداية فقرة جديدة.

فيه، فيكون أعظم من مكعب الجذر المطلوب. / فإذا جُمع مع المسطّح ل – ٨٧ – و الثاني يكون أعظم. لكنّ مجموع هذه الثلاثة مثلُ مكعب الجذر المطلوب، فيلزم الخلْف.

فقد تبيّن أنه إذا كان مكعب آخر الجذر المطلوب موجوداً في آخر العدد: فإذا استُخرج مطلوب الكعب يكون أرفع من عدد الأموال، ومن جذر عدد الجذور؛ وذلك المطلوب يكون آخرَ الجذر المطلوب. وإن كان آخرُ الجذر في القسم الذي هو عدد الأموال، فيكون مكعب آخر الجذر المطلوب في المسطّح الثانى؛ لأن المال إذا ضرب في القسم الذي هو عدد الأموال – ومربعُ آخر الجذر المطلوب موجود في المال، وآخر الجذر المطلوب في عدد الأموال – فيحصل ضربُ مربع آخر الجذر المطلوب فى آخره. وإذا كان مكعب آخر الجذر المطلوب واقعاً في المسطّح الثاني، وهو أرفع مراتب المكعب، فلا يكون واقعاً في آخر العدد، ولا في آخر المسطّح الأول، ولايكون آخرُ المسطّح الأول مكعب آخرِ الجذر المطلوب. فآخر عدد الأموال يكون أرفع من جذر آخر عدد الجذور، ومن مطلوب الكعب الذي يُستخرج لآخر العدد. ولأن آخر العدد أنزَلُ من آخر المكعب، فمطلوب كعبه / يكون أنزلَ من آخر الجذر المطلوب. وإن كان آخر الجذر ل – ٨٧ – ظ في القسم الذي ضُرب المال فيه حتى حصلت الجذور، فيكون آخرُ عدد الجذور مالَ آخر الجذر المطلوب. فإذا ضُرب عدد الجذور في الجذر المطلوب وضرب مالُ آخرِ الجذر المطلوب في الجذر المطلوب، فيكون مكعبُ آخرِ العدد واقعاً في المسطّح الأول، ويكون آخر العدد أنزَلَ من

4 تبين: نبين [ل] – 5 ومن: وفي [ل] – 13 مكعب: مربع [ب. ل] – 15 ولأن: لأن [ب. ل] – 19 وضرب: ضرب [ب، ل] – 20 مكعب: أي أكبر مكعب يمكن أن يحتويه آخر العدد.

آخر المسطّح الأول. ومطلوبُ الكعب الذي يُستخرج لآخر العدد يكون أنزلَ من جذر آخر عدد الجذور. لأن المسطّح الأول إذا استُخرج مطلوب كعبه [يكون أنزلَ من جذر آخر عدد الجذور؛ لأن المسطّح الأول إذا استُخرج مطلوب كعبه] يكون هو آخر الجذر المطلوب؛ لأن آخر هذا المسطّح حاصل من ضرب مالِ آخر الجذر المطلوب في الجذر المطلوب. فمطلوب كعبه يكون آخرَ الجذر المطلوب، وجذر عدد الجذور يكون أرفع من عدد الأموال، إذ هو بعض الجذر المطلوب وليس فيه آخرُ الجذر المطلوب. فتبيّن من هذه التقديرات أنه إن كان مطلوب كعب ‹لآخر› العدد أرفع من عدد الأموال ومن جذر آخر عدد الجذور؛ فمطلوب هذا الكعب هو آخر / الجذر المطلوب، كما في الصورة الأولى. وإن كان جذر ل - ٨٨ - و
آخر عدد الجذور أرفع من مطلوب هذا الكعب ومن آخر عدد الأموال؛ فذلك الجذر هو آخر الجذر المطلوب، لأن آخر الجذر المطلوب إما في عدد الأموال، أو في مطلوب كعب آخر العدد بأن يكون مكعبه موجوداً في آخر العدد، أو في جذْر عدد الجذور بأن يكون ماله موجوداً في آخر عدد الجذور؛ فأرفعُ هذه الثلاثةِ يكون آخرَ الجذر المطلوب، وفي الصورة الثانية أرفعُها جذرُ عدد الجذور، وفي الثالثة أرفعها آخر عدد الأموال. وقد يتفق / أن يكون آخر الجذر المطلوب قد انقسم، ووقع أقسامُه في كل واحد من ب - ٤ - و
هذه الثلاثة أو في اثنين، فنبيّن بأن نضع الثلاثة في مرتبة واحدة بلا زيادة ارتفاعٍ، أو يكون اثنان منها في مرتبة واحدة وواحدٌ أنزلَ منهما. ثم إذا تبيّن آخر الجذر المطلوب، وتعيَّن مرتبته، فسائر الأعمال تتبيّن بما تقرر بيانه في

8 فتبين: فنبين [ل] / التقديرات: لنقليه ا ت [ب]، التقليه ا ب [ل]، هذه هي الكلمة التي يستعملها في مثل هذا الموقع، انظر ٩٤ [ظ]، مثلاً – 10 الصورة: الصورت [ن] – 12 آخر الجذر: آخر جذر [ل] – 15 هذه: هذ [ل] – 18 نضع: يضع [ل] – 19 اثنان: اثنين [ب، ل] / تبين: نبين [ل] – 20 وتعين مرتبته: وبغير مرتبه [ل] / تقرر: يقرر [ل]

المسائل المتقدمة. فمن علم ذلك فلايخفى عليه شيء من أعمال هذه المسألة. وذلك ما أردنا بيانه.

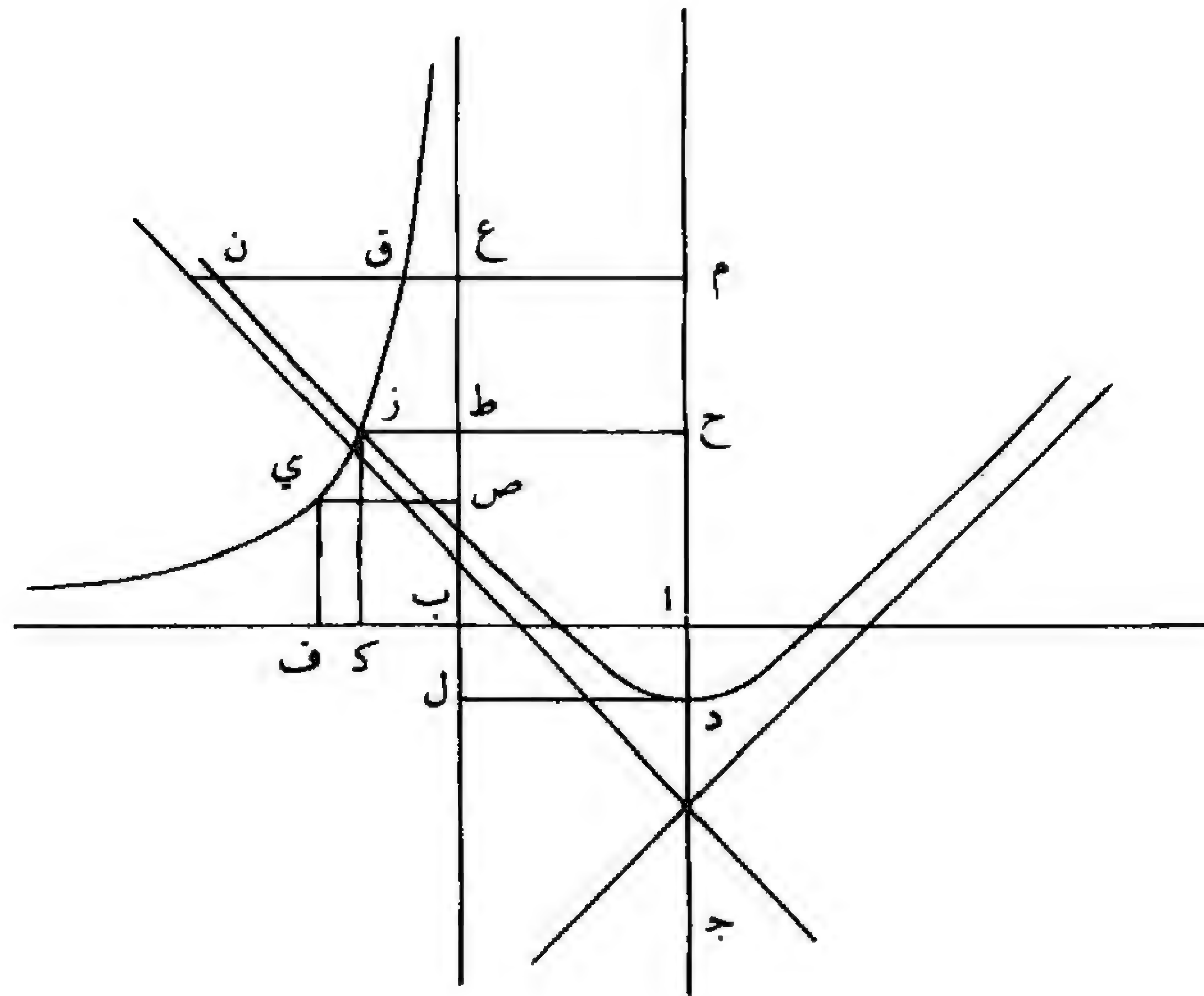
المسألة السابعة: مكعب وأموال يعدل جذوراً وعدداً:

فليكن ا ب جذر عدد الجذور / وا ج عدد الأموال، ونجعله عموداً ل - ٨٨ - ظ على ا ب. وليكن مربع ا ب في ا د مثلَ العدد. فليكن أولاً ا د أصغر من ا ج. فنخرج عمودي ب ل د ل ليحصل سطح ب د قائم الزوايا، ونخرج ضلعي زاوية ب بالاستقامة، ونعمل مربع ب ي مثل سطح ب د، ونعمل قطْعاً زائداً رأسه نقطة ي ولايقع عليه خطّا ب ط ب ه ويُقاربان محيط القطع ويكون منتصف مجانبه نقطة ب، وليكن هو قطع ي ز، ونعمل على نقطة د قطعاً آخر زائداً مجانبه خط د ج، ونخرج د ج بالاستقامة، ونفصل د م مثل ا ه. فخط الترتيب - الذي يخرج من نقطة م وهو م ن إلى محيط القطع الذي رأسه نقطة د - يكون أطول من د م لأن مربعه مثل ضرب ج م في د م، فهو وسط في النسبة بينهما، فهو أطول من د م أعني ا ه. وم ع مثل ا ب فـ ع ن أطول من ب ه فهو أطول من ب ف أعني ص ي، وص ي أطول من ع ق، ولأن خط ب ط أبداً يقارب محيط قطع ي ز، ونقطة ق على محيط قطع ي ق، فنقطة ق تقع داخل قطع د. ونقطة ن على محيط قطع د، فقطع د يقع في داخل قطع ي ز فيتقاطع القطعان، وليكن تقاطعهما على نقطة

3 المسألة السابعة: ناقصة [ل] / وعددا: كما شرحنا في المقدمة من قبل، فمخطوطة «ل» منسوخة عن مخطوطة «ب». وإن أثبتنا في الصفحات السابقة كلَّ الفروق بين المخطوطتين فلكي يتبين القارىء بنفسه مانعنيه وما أقمنا البرهان عليه. واقتصاداً للجهد وللتكلفة سنتوقف الآن عن إثبات الفروق كلها لنكتفي بأهمها فقط، أي بما ينقص «ل» من كلمات وعبارات وبالأخطاء التي لا تدع مجالاً للشك في أن ناسخ «ل» لم يكن أمامه إلا مخطوطة «ب»، أما الاخطاء الكتابية الأخرى والأخطاء النحوية وما إلى ذلك، فلقد أحصيناها ولكن لن نذكرها هنا بعد الآن - 14 ع ن: ع ر [ب]، ع د [ل] - 16 يقارب: يقارن [ب، ل] - 17 د ونقطة: ي ق ونقطة [ب، ل] - 18 فيتقاطع: فيقاطع [ب، ل]

ز. فنخرج عمودي / ز ح ز ك. فلأن مسطّح ب ز مثل مربع ب ي أعني سطح ب د، فنجعل سطح ا ط مشتركاً، فسطح ا ز مثل د ط، فأضلاعُهما متكافئة في النسبة. فنسبة ح ط أعني ا ب إلى ا ح كنسبة ح ز إلى د ح. فنسبة مربع ا ب إلى مربع ا ح كنسبة مربع ح ز إلى مربع د ح. ولأن ضرب د ح في جـ ح مثل مربع ح ز، فـ ح ز وسط في النسبة بين خطي د ح جـ ح، فنسبة مربع ح ز إلى مربع د ح كنسبة خط جـ ح إلى د ح. فنسبة مربع ا ب إلى مربع ا ح كنسبة خط جـ ح إلى د ح. فضرب مربع ا ب في د ح مثل ضرب مربع ا ح فى جـ ح. فإذا جعلنا ا ح جذراً فيكون مربعه المالَ، ومربعه في جـ ح هو مربعه في ا ح، وهو مكعبه، وفي ا جـ وهو الأموال، وهو مربع ا ب، وهو عدد الجذور، في ا ح، وهو الجذور، وفي ا د وهو العدد. فالمكعب والأموال بالعدة المذكورة في السؤال مثلُ العدد والجذور المذكورة في السؤال.

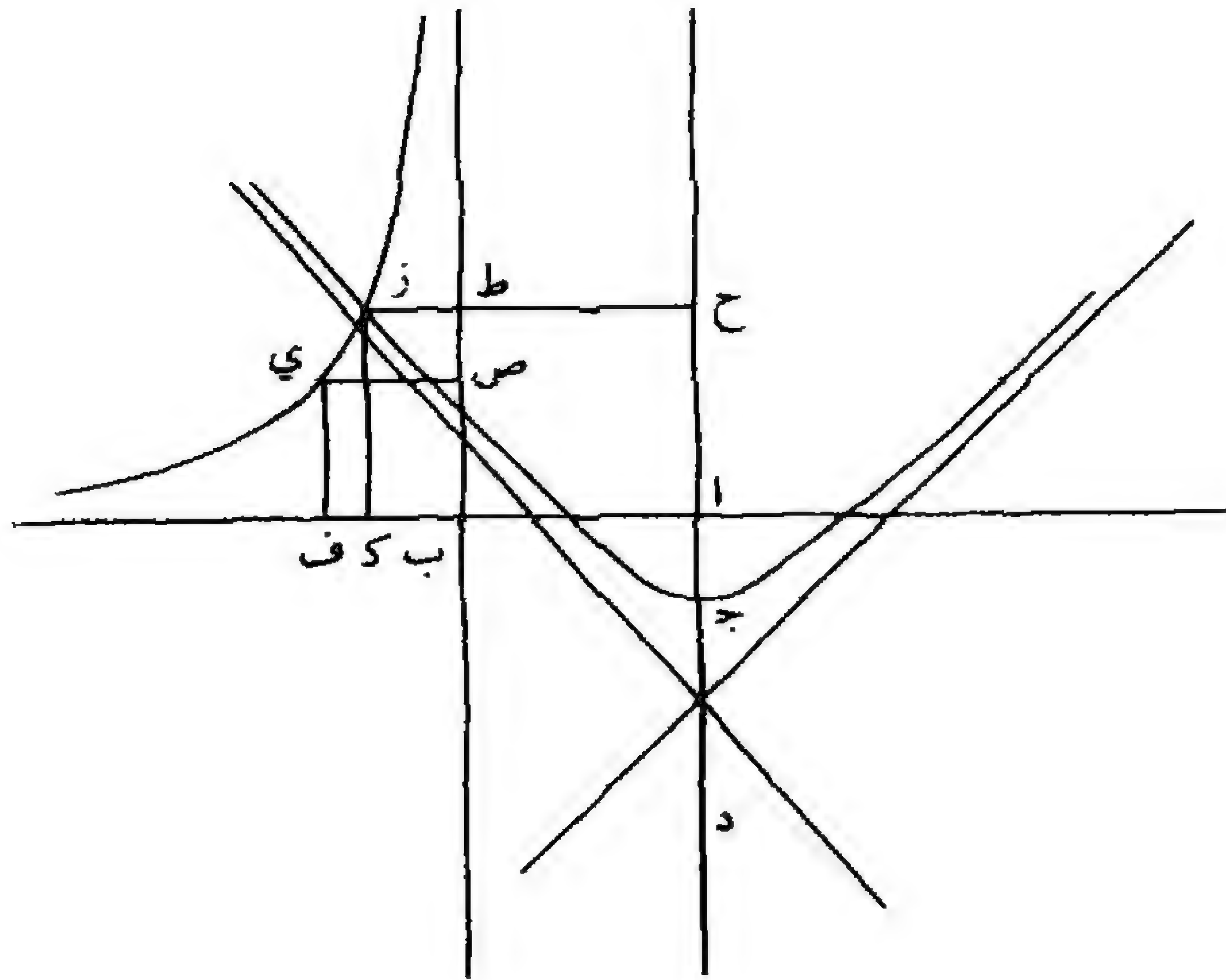
ل - ٨٩ - و



4 مربع ا ح: مربع ا جـ [ب، ل] – 7 ا ح: ا جـ [ب، ل] – 8 جـ ح: د ح [ب، ل] – 10 وفي: في [ب. ل] / وهو الأموال: هو الأموال [ب. ل] / وهو مربع: ومربع [ب. ل] – 11 وهو الجذور: هو الجذور [ب. ل] / وفي: في [ب. ل] / وهو: هو [ب. ل]

وليكن ا د مثل ا ج. فإذا جعلنا ا ب جذراً فيكون ضربه في مربع ا ب هو الجذور، وهو المكعب أيضاً، فيكون المكعب مثل الجذور، ومربعه هو المال، وضربُ مربعه في ا د هو الأموال، وهو العدد؛ فالمكعب مع الأموال مثل الجذور مع العدد. / ل – ٨٩ – ظ

وليكن ا د أطول من ا ج، فنفرض ا ب جذرَ عددِ الجذور، ونعمل كما عملنا، ونجعل رأس القطع الآخر نقطة ج، ونبيّن كما بيّنا أن نسبة مربع ا ب إلى مربع ا ح كنسبة مربع ح ز إلى مربع د ح، ولأن ح ز وسطٌ في النسبة بين خطيّ د ح ج ح فنسبة مربع ح ز إلى مربع ح د كنسبة خط ج ح إلى ح د. فنسبة مربع ا ب إلى مربع ا ح كنسبة ج ح إلى ح د. فضرب مربع ا ب في د ح مثل ضرب مربع ا ح في ج ح. فإذا جعلنا ا ح جذراً فيكون مربعه المال، وضرْب مربعه في ا ح هو المكعب، وفي ا ج عدد الأموال؛ وضرب مربع ا ب – وهو عدد الجذور – في ا ح هو الجذور، وفي ا د هو العدد. فالمكعب والأموال مثل الجذور والعدد؛ وذلك ما أردنا بيانه. / ب – ٤ – ظ



9 ح د: ج د [ب، ل] – 10 مربع ا ح: مربع ه ا [ل]

وأما استخراج المطلوب فنضع العدد على التخت، ونضع أصفار الكعب، فيكون للمسألة صور ثلاث:

الصورة الأولى

أن يكون المرتبة السميّة للكعب الأخير أرفع من آخر مراتب عدد الأموال، والجذرُ السميّ للكعب الأخير أيضاً يكون أرفع من آخر مراتب عدد الجذور، كما في قولنا: مكعب وثلاثون مالاً يعدل ستين جذراً وعدداً بهذه الصورة ٣٦١٤٨١/٣١. فالكعْب الأخير هو الثالث، وسميُّه المرتبة الثالثة، ل - ٩٠ - و ومرتبة آخر عدد الأموال إنما هي العشرات، فالمرتبة السميّة للكعب الأخير أرفع منه. والجذر السميّ للكعب الأخير هو الجذر الثالث وهو أرفع من آخر عدد الجذور. ونعرف انحطاط آخر مراتب عدد الأموال عن المرتبة السميّة للكعب الأخير، وننقل آخر مراتب عدد الأموال إلى المرتبة المنحطة عن الكعب الأخير بذلك القدر. ونعرف انحطاط آخر مراتب عدد الجذور عن الجذر السميّ للكعب الأخير، وننقل آخر مراتب عدد الجذور إلى المرتبة المنحطة عن الكعب الأخير بذلك القدر. ثم نرد عدد الأموال والجذور إلى الثلث فيحصل بهذه الصورة ٠ ٠ ٠ ٣٦١٤٨١٣١ ١٠، ونضع مطلوب الكعب مكان الكعب الثالث، وهو ثلاثة، ونضع ثلث مربعه في سطر أوسط بين العدد، وبين ثلث عدد الأموال، وننقص منه ثلث عدد الجذور، فيحصل بهذه الصورة ٠ ٠ ٣ ٣٦١٤٨١٣١ ٢٩٩٨ ١٠، ونضرب المطلوب في ثلث عدد الأموال، ونزيد الحاصل على الأوسط ونضربه في الأوسط وننقص ثلاثة أمثال كلّ ضربةٍ من / العدد، ثم نزيد ثلثي مربع المطلوب على السطر الأوسط، ونضرب ل - ٩٠ - ظ

3 ناقصة [ل] / في الصفحة السابقة هناك ثلاثة أشكال في [ب]. غير واضحة كل الوضوح – 17 العدد وبين: مطموسة في [ل]، ويبدو أنها كتبت قبل الطمس «أعداد والعدد وبين».

المطلوب في ثلث عدد الأموال، ونزيده على الأوسط، وننقل الأعلى والأسفل بمرتبتين والأوسط بمرتبة، ثم نضع المطلوب الثاني – وهو اثنان – وننقص مكعبه من العدد، ونضربه في المطلوب الأول وفي ثلث عدد الأموال، ونزيد المبلغ على الأوسط ونضربه في الأوسط وننقص ثلاثة أمثال كل ضربةٍ من العدد، ثم نزيد مربع المطلوب الثاني على الأوسط ونضرب المطلوب الثاني في المطلوب الأول، وفي ثلث عدد الأموال كرّة أخرى. ونزيد المبلغ على الأوسط وننقل الأعلى والأسفل بمرتبتين، والأوسط بمرتبة. ثم نضع المطلوب الثالث – وهو الواحد – وننقص مكعبه من العدد ونضربه في المطلوب الأول والثاني وفي ثلث عدد الأموال، ونزيد المبلغ على الأوسط ونضربه في الأوسط وننقص ثلاثة أمثال كل ضربةٍ من العدد، فيرتفع العدد، ويحصل السطر الأعلى بهذه الصورة ٣٢١.

الصورة الثانية

أن يكون آخر مراتب عدد الجذور أرفع من الجذر السميّ للكعب الأخير، والمرتبةُ السميّة للجذر الأخير من الجذور المقابلة / لعدد الجذور ل – ٩١ – و أرفعَ من آخر مراتب عدد الأموال، كما في قولنا: مكعب وثلاثة أموال يعدل جذوراً بهذه العدة ١٠٢٠٠٠ وعدداً بهذه الصورة ٦٤٣٢٨٤. فيطلب الكعب السميّ للجذر الأخير من الجذور المقابلة لعدد الجذور، وهو الكعب الثالث في المثال، وينقل من عدد الجذور المرتبة التي تقابل الجذر الأخير من الجذور المقابلة لعدد الجذور إلى مقابلة ذلك الكعب. ونعرف انحطاط آخر مراتب عدد الأموال عن المرتبة السميّة للجذر المذكور، وينقل

13 ناقصة [ل] – 21 كتب ناسخ ب بعد «المذكور» و «ينقل» ولكن الواو تشبه الهاء، ونقرأ في [ل] «المذكورة ينقل»

آخر عدد الأموال إلى المرتبة المنحطة عن ذلك الكعب بذلك القدر، فيحصل بهذه الصورة ٠٠٦٤٣٢٨٤ ١٠٢٠٠٠، ثم نستخرج مطلوب الجذر لعدد الجذور – وهو ثلاثة – ونضعه في الكعب الثالث ونضربه في عدد الجذور ونزيد المبلغ على العدد، ثم نرد عدد الجذور إلى الثلث وكذا عدد الأموال فيحصل بهذه الصورة ٣١٢٤٣٢٨٤ ٣٤٠. ثم ننقص مكعب المطلوب من العدد، ونضربه في ‹ ثلث › عدد الأموال ونضع المبلغ فيما بين العدد وثلث عدد الجذور / ونضرب فيه المطلوب، وننقص ثلاثة أمثال كل ضربةٍ من ل – ٩١ – ظ العدد، ونضع مربع المطلوب في السطر الذي بين العدد وبين ثلث عدد الجذور، ثم نضرب المطلوب في ثلث عدد الأموال كرّة أخرى، ونزيد المبلغ على السطر الذي بين العدد وبين ثلث عدد الجذور، ثم ننقص ثلث عدد الجذور من السطر الذي فوقه، ونبطل ثلث عدد الجذور، فيحصل بهذه الصورة ٣٩٧٣٢٨٤ ٥٦٦، ثم ننقل المطلوب وثلث عدد الأموال بمرتبتين والسطر الأوسط بمرتبةٍ واحدة، ثم نضع المطلوب الثاني – وهو الاثنان – ونعمل به العمل المذكور في الصورة الأولى إلى آخره.

الصورة الثالثة:

أن يكون آخر مراتب عدد الأموال / أرفع من المرتبة السميّة للكعب ب – ٥ – و الأخير، ومن المرتبة السميّة للجذر الأخير من الجذور المقابلة لعدد الجذور، كما في قولنا: مكعب وثلاثة آلاف مالٍ يعدل ثلاثمائة جذر وعدداً بهذه الصورة ٣٤٢١٠٢٨٦١، فنجعل عدد الأموال كالمقسوم عليه، والعدد كالمقسوم، ونستخرج مطلوب القسمة، ونعدّ الجذور من / الآحاد إلى ل – ٩٢ – و

15 ناقصة [ل] – 16 أن يكون: في ب بعدها فراغ فيه فقط حرف الألف. وهذا مانجده في ل أيضا مما يؤكد مرة أخرى أن ناسخ ل لم يكن أمامه إلا نسخة ب.

مرتبته، ونَعرف الكعب السّميّ للجذر الأخير، فهناك مكان المطلوب. وينقل آخر مراتب عدد الأموال إلى المرتبة المرفوعة عن مكان المطلوب، بقدر ارتفاع آخر مراتب عدد الأموال عن المرتبة السميّة للكعب الذي هو مكان المطلوب؛ وينقل آخر مراتب عدد الجذور إلى المرتبة المرفوعة أو المنحطة عن مكان المطلوب، بقدر انحطاط مرتبته عن مرتبة الجذر السميّ للكعب الذي هو مكان المطلوب. ثم نردّ كلَّ واحد من عدد الأموال وعدد الجذور إلى الثلث. فلأن آخر عدد الأموال في المثال في المرتبة الرابعة والكعب الأخير هو الكعب الثالث، وسميّه المرتبة الثالثة، والجذر الأخير من الجذور المقابلة لعدد الجذور إنما هو الجذر الثاني، والمرتبة السميّة إنما هي المرتبة الثانية، وآخرُ عدد الأموال أرفع من كلّ واحدٍ منهما، فوضعنا عدد الأموال كالمقسوم عليه، والعدد كالمقسوم، على هذه الصورة ٣٤٢١٠٢٨٦١ / ٣٠٠٠؛ والجذور التي من الآحاد إلى مرتبة مطلوب القسمة ثلاثة. فعددنا الكعاب بتلك العدة، فانتهى إلى الكعب الثالث فهناك مكان المطلوب. ولأن آخر مراتب / عدد الأموال في المرتبة المرفوعة عن المرتبة السميّة للكعب الذي هو مكان المطلوب بمرتبة – لأنه في الألوف، والسميّةُ في المئات – فنقلنا آخر مراتب عدد الأموال إلى المرتبة المرفوعة عن الكعب الذي هو مكان المطلوب بمرتبة، فحصل بهذه الصورة ٣٤٢١٠٢٨٦١ / ٣٠٠٠، والجذر السميّ للكعب – الذي هو مكان المطلوب – الجذرُ الثالث، وآخر عدد الجذور منحطّ عنه بمرتبتين، فنقلنا آخر عدد الجذور إلى المرتبة المنحطّة عن الكعب الذي هو مكان المطلوب بمرتبتين، فحصل بهذه الصورة ٣٤٢١٠٢٨٦١ / ٣٠٠٠ / ٣٠٠، ثم رددنا كلّ واحدٍ من عدد الجذور والأموال إلى الثلث، ونستخرج مطلوب الكعب – وهو ثلاثة في المثال – ونضعه مكان الكعب الثالث، ونضربه في ثلث عدد الجذور، ونزيد ثلاثة أمثال الضرب على

ل – ٩٢ – ظ

العدد، ثم نضربه في ثلث عدد الأموال – ونضع المبلغ فوق ثلث عدد الأموال – وفي المبلغ، وننقص ثلاثة أمثال كل ضربةٍ من العدد، وننقص مكعبه من العدد أيضاً فيبقى بهذه الصورة ٤٥١٩٢٨٦١ / ٣٠٠٠ / ١٠٠٠، ثم نضع مربع المطلوب بحذائه فيما بين العدد وثلث عدد / الأموال ١٠٠ ونضربه في ثلث عدد ل – ٩٣ – و الأموال كرّة أخرى ونزيد المبلغ على السطر الذي فوقه ثم ننقص ثلث عدد الجذور من السطر الذي بين العدد وبين ثلث عدد الأموال، ونبطل عدد الجذور، فيحصل بهذه الصورة ٤٥١٩٢٨٦١ / ٦٨٩٩، ثم ننقل الأعلى والأسفل بمرتبتين، والأوسط بمرتبة. ثم نضع المطلوب ١٠٠ الثاني، وهو الاثنان، وننقص مكعبه من العدد ونضربه في الأعلى والأسفل، ونزيد المبلغ على الأوسط، ونضربه في الأوسط، وننقص ثلاثة أمثال كلّ ضربةٍ من العدد. وهكذا إلى آخر العمل المذكور، فيحصل السطر الأعلى بهذه الصورة ٣٢١.

وأمّا بيان جهة العمل، فلأن المكعب مع المسطح الثاني يعدل العدد مع المسطّح الأول، فالمسطّح الأول مع العدد عددٌ يعدل المكعب والأموال. فيرجع إلى مسألة: مكعب وأموال يعدل عدداً، والمعلوم بعض هذا العدد وهو المذكور في السؤال. فإن كان آخر الجذر المطلوب أرفعَ من آخر عدد الأموال ومن جذر آخر عدد الجذور كان مالُه أيضاً أرفع من آخر عدد الجذور. فلأن آخر المكعب حاصلٌ من ضرب مالِ / آخرِ الجذر في ل – ٩٣ – ظ آخر الجذر وزيد في المكعب ضربُ المال في عدد الأموال، فيكون مكعب آخر الجذر في العدد المركب من المُكعب ومن المسطّح الثاني وضربُ الجذر في آخر عدد الجذور أقلّ من مكعب آخر الجذر، فيكون من مرتبةٍ أنزلَ من

2 الأموال: كتب ناسخ ب كلمة «ونضربه» ثم حذفها – 14 عدداً: عدد [ب، ل] – 15 وهو: أضافها في الهامش مع الاشارة إلى موضعها [ب]، ناقصة [ل]

المراتب التي وقع فيها مكعبُ آخر الجذر. فإذا نقص هذا الحاصل – وهو المسطّح الأول – من العدد المركب من المكعب والمسطّح الثاني فالذي يبقى من العدد يكون آخرُه آخرَ المكعب؛ ويكون مطلوب كعبه أرفع من آخر مراتب عدد الأموال ومن جذر آخر عدد الجذور أيضاً، لأن آخر الجذر إذا كان أرفع من آخر مراتبِ عدد الأموال، فيكون منحطُّ مالِ آخرِ الجذر أرفعَ من منحطّ مال آخر عدد الأموال، فيكون منحطّ مكعب آخر الجذر أرفع من منحط مكعب آخر عدد الأموال. وأيضاً إن كان آخر الجذر أرفع من جذر ‹ آخر › عدد الجذور يكون ماله أرفعَ من مال جذر آخر عدد الجذور، / ومكعبُه أرفعَ من مكعب آخر جذر عدد الجذور، وهو الحاصل ب - ٥ - ظ من ضرب جذر عدد الجذور في عدد الجذور. فإذا كان مكعب آخر الجذر أرفع من كل واحدٍ من مكعب / آخر عدد الأموال ومكعبِ آخرِ جذر ل - ٩٤ - و عددِ الجذور: فإذا نقص منه المسطّح الأول – وهو أنزل منه – فيكون الباقي من مكعب آخر الجذر – وهو آخر العدد المسؤول – أرفعَ من كل واحد من المكعبين المذكورين، ويكون مطلوب كعبه أرفعَ من مطلوب كعب كلّ واحدٍ منهما، ومطلوبا كعبيهما آخر عدد الأموال وجذر آخر عدد الجذور. فإذا كان آخرُ الجذر أرفعَ من كل واحدٍ منهما فمطلوب الكعب يكون أرفعَ من مرتبة كل واحدٍ منهما. وإن كان آخر مراتب عدد الأموال أرفعَ من آخر الجذر ومن جذر آخر عدد الجذور؛ فلأن المكعب موجود في المجموع الذي هو المكعب مع ضرب المال في عدد الأموال. ومربع آخر الجذْر موجود في المال، فيكون آخرُ المركّب من المكعب والمسطّح الثاني – وهو ضرب مربع آخر الجذر في آخر عدد الأموال – أعظمَ من مكعب آخر

13 الباقي: الثاني [ب، ل] – 15 ومطلوبا كعبيهما: ومطلوب كعبها [ب، ل] – 18 الجذر: الجذور [ب، ل]

الجذر الذي هو أصغر من مكعب آخر عدد الأموال، فيكون مطلوبُ كعبه أنزلَ من آخر عدد الأموال. وإن كان جذر آخر عدد الجذور أرفع من آخر عدد الأموال ومن آخر الجذر، فيكون المسطّح الأول أكبر من المكعب ويكون أكبر / من المسطّح الثاني أيضاً؛ لأن عددَ الأموال أقلُّ من جذر ل - ٩٤ - ظ عدد الجذور، ونسبةُ عدد الأموال إلى جذر عدد الجذور أصغرُ من نسبة جذر عدد الجذور إلى الجذر. فيكون ضرب الجذر في عدد الجذور أكثر من مال الجذر في عدد الأموال. فالمسطّح الأول أعظم من المسطّح الثاني. ولأن المكعب مع المسطّح الثاني مثلُ العدد مع المسطّح الأول، والمكعبَ أقلُّ من المسطّح الأول، فالمسطّحُ الثاني أكبر من العدد، فالعدد أقلّ من المسطّح الأول، ومطلوبُ كعبِ المسطّح الأول أقل من جذر عدد الجذور. فمطلوبُ كعب العدد أقل منه.

وهذه الأشياء وإن كانت من خواصّ هذه التقديرات، لكن المطلوب الخارج في هذه المسألة: فلا يتعيّن أن يكون إما مطلوب الكعْب للعدد، وإما أحد مطلوبيْ القسمة في أحد المسطّحين، بل في كل واحد من الصور يُحتمل أن يكون أزيد من آخر الجذر، ويُحتمل أن يكون أنقص، فنحتاج في استخراجه إلى زيادة استقصاء. فإن كان أعظم من آخر الجذر فتمتنع النقصانات المذكورة في العمل، فننقص منه واحداً ونمتحن إلى أن يحصل آخر الجذر. وإن كان أصغر من آخر الجذر فإذا ضربته / في عدد ل - ٩٥ - و الجذور وزدت المبلغ على العدد، فيحتمل مطلوباً أعظم من ذلك فَرُدَّ العددَ إلى حالِه الأول وضع مطلوباً أعظم، وهكذا إلى أن يصير المطلوب آخر الجذر، ثم يسهل سائر المطالب. وذلك ما أردنا بيانه.

10 المسطح: بعد أن مُحيَ جزء من الحاء في [ب]. قد تقرأ «المسطر»، ولهذا كتبها ناسخ [ل] «السطر» – 13 فلا يتعيّن: لا معين [ل]، والمقصود أنه لا يجب أن يكون. أي ليس من اللازم – 16 كان: ناقصة [ل] – 20 وهكذا: الواو فوق السطر [ب]، هكذا [ل]

المسألة الثامنة: مكعب وجذور يعدل أموالاً وعدداً.

فليكن ا ب جذرَ عدد الجذور، وا ج عدد الأموال، وليكن مربع ا ب في ا د مثلَ العدد، كما مرّ. وليكن أولاً ا د أصغر من ا ج، ونخرج عمودي د ه ب ه ليحصل سطح د ب قائمَ الزوايا، ونعمل على ج د نصف دائرة، ونخرج ضلعي زاوية ب بالاستقامة، ونعمل فيما بين خطي ب ل ب ص قطعاً زائداً يمرّ محيطه بنقطة د، ولايقع عليه خطّا ب ل ب ص ويقاربان محيط القطْع أبداً، ويكون منتصف مجانبه نقطةَ ب.

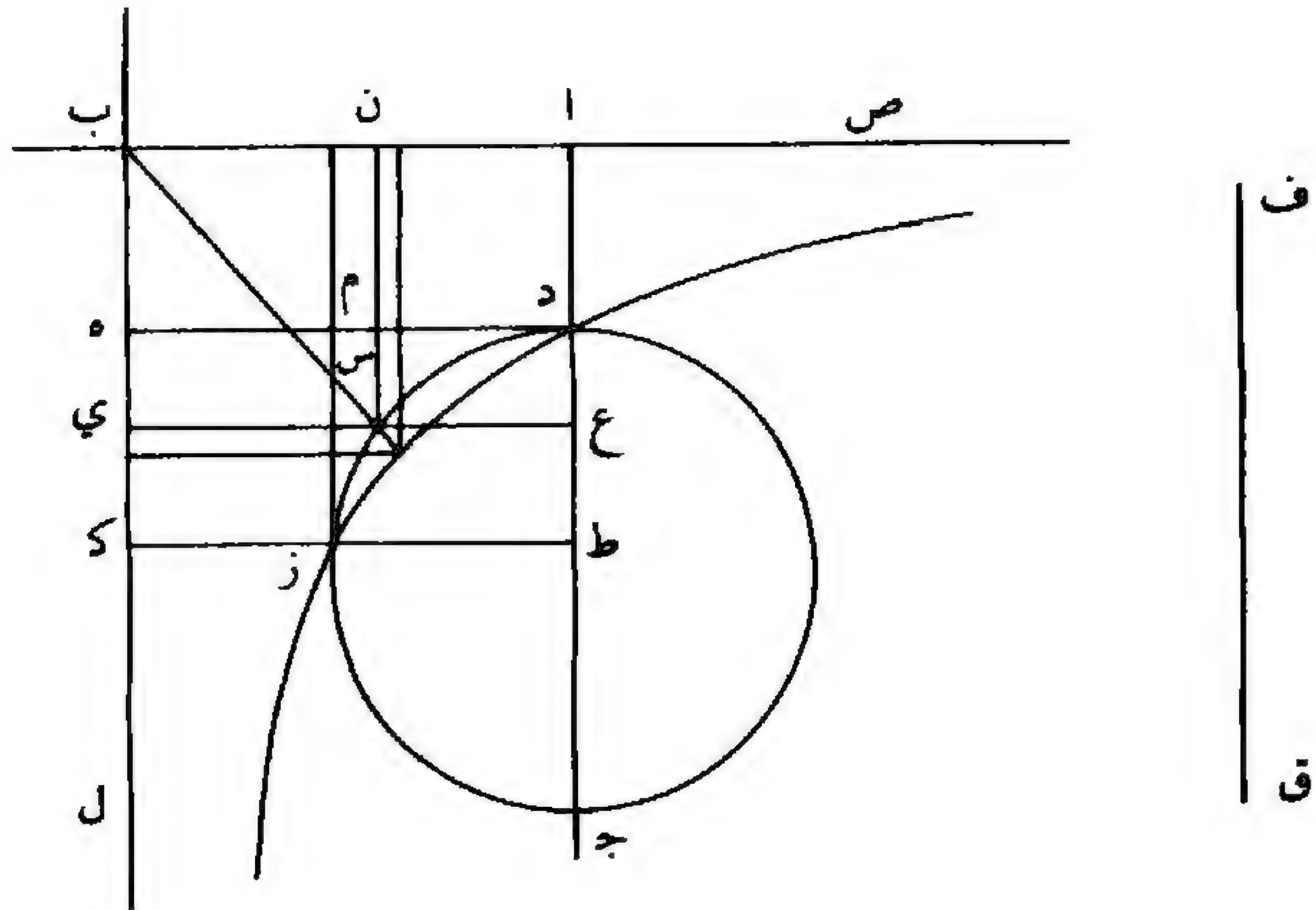
فأقول أولاً: إن هذا القطْع لابدّ أن يدخل في الدائرة، ويقطعها على نقطة أخرى ‹غير د›. ولأنّا نجعل نسبة ا د إلى د ه كنسبة د ه إلى ف ق، ونجعل نسبة جميع ا د ف ق إلى ف ق كنسبة د ج إلى ج ع؛ فبالتفصيل: نسبة ا د إلى ف ق كنسبة د ع إلى ع ج. ونخرج عمود ع س ‹على ا ج›. فضرب د ع في ع ج مثل مربع ع س. فنسبة د ع إلى ع س كنسبة ع س إلى ع ج. فنسبة / مربع د ع إلى مربع ع س ل - ٩٥ - ظ كنسبة د ع إلى ع ج، وهي كنسبة د ا إلى ف ق، وهي كنسبة مربع د ا إلى مربع د ه؛ فنسبة مربع د ع إلى مربع ع س كنسبة مربع د ا إلى مربع د ه. فنسبة د ع إلى ع س كنسبة ا د إلى د ه، فنسبة د ع إلى ا د كنسبة س ع إلى د ه. فنخرج س ع إلى ي فـ ع ي مثل د ه. فنسبة د ع إلى ا د كنسبة ع س إلى ع ي، ونسبة ع س إلى ع ي أصغر من نسبة ع س إلى س ي، فنسبة ع د إلى د ا أصغر من نسبة ع س إلى س ي. فبالتركيب نسبة ع ا إلى ا د أصغر من نسبة ع ي إلى

1 المسألة الثامنة: ناقصة [ل] – 3 كما: لما [ب، ل] – 5 ونعمل: ممحوة [ب]، إلا الواو، ناقصة [ل] – 9 ولأنا: الواو فوق السطر على آخر حرف من الكلمة السابقة [ب]، ناقصة [ل] – 10 ا د ف ق: ا د ف ق [ب]

ي س. فنُخرج عمودَ س ن على ا ب، فنسبة ع ا أعني س ن إلى ا د أصغر من نسبة ع ي – أعني د ه – إلى ي س، فضرب س ن في س ي – وهو سطح ب س – أصغر من ضرب ا د في د ه وهو سطح د ب. / ولأن القطع إذا أخرج بغير نهاية؛ فخط د ه يقسمه عند نقطة ب - ٦ - و د بقسمين: أحدهما مما يلي جانب خط ا ص، والآخر: مما يلي جانب نصف الدائرة، فالقسم الذي مما يلي نصف الدائرة يدخل في الدائرة وإلّا وقع فيما بين خط د ه المماس للدائرة وفيما بين قوس نصف الدائرة؛ فيصل بين نقطتي ب س بخط مستقيم فيقطع خط القطع على نقطةٍ، فنخرج من تلك النقطة عمودين على خطي ب ا / ب ه اللذين لايقعان على القطع، ل - ٩٦ - و فيحصل سطحٌ قائمُ الزوايا في داخل سطح س ن ب ي، ويكون أصغر منه؛ ولأنه مِن ضرْب بُعد تلك النقطة ‹ عن ب ل › في الخط الواصل بين نهاية ذلك البُعد وبين ‹ ب › منتصف المجانب، فيكون مساوياً لسطح د ب؛ لأن كلّ واحدٍ منهما مساوٍ لمربع الخط الواصل بين منتصف المجانب وبين العمود الخارج من رأس القطع إلى الخط الذي لايقع عليه، فالأصغر من سطح ب س مساوٍ لما هو أعظم منه؛ هذا خلْف. فالقطْع يدخلُ في نصف الدائرة ويقرب أبداً من خط ب ل – فاستحال أن يمرَّ بنقطة جـ – فيقطعُ الدائرة، وليكن تقاطعها على نقطة ز، فنخرج عمود ز ط ونخرجه بالاستقامة إلى ك. فلأن كل واحد من سطحي ا ه ب ز مثلُ مربع الخط الذي يصل بين منتصف المجانب وبين العمود الواقع من رأس القطع على الخط الذي لايقع عليه؛ فسطح ا ه مثل ب ز، فيسقط ب م المشترك، فيبقى سطح ا م مثل م ك. فنجعل ط م مشتركاً، فسطح د ك مثل ا ز.

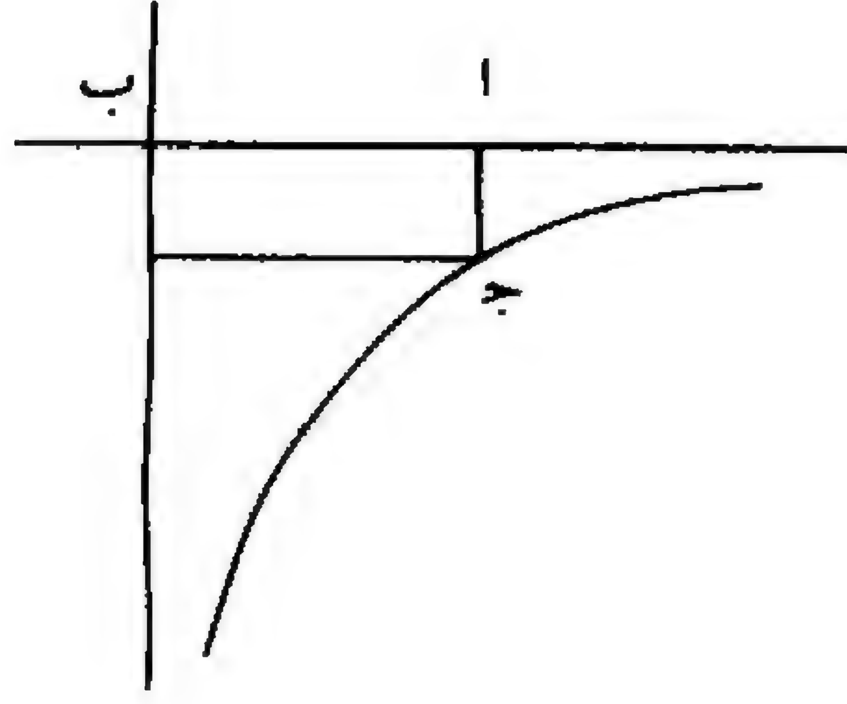
6 فالقسم: تآكل موضع أول الكلمة [ب] – 7 وقع: لوقع [ب. ل] – 9 ب ا: تنتهي الصفحة بعد ب وقبل ا [ل] – 17 ز ط: الزاي هنا خلافاً للعادة معجمة [ب]. ولقد نقلها ناسخ [ل]. أيضاً معجمة.

فأضلاعهما متكافئة في النسبة، فنسبة ط ك - أعني ا ب - إلى ا ط كنسبة ط ز إلى د ط. فنسبة مربع ا ب إلى مربع ا ط كنسبة مربع ط ز إلى مربع / ط د. ولأن ضرب ج ط في د ط مثلُ مربع ط ز، ل - ٩٦ - ظ فنسبة خط ط ج إلى ط ز كنسبة ط ز إلى ط د؛ فنسبة مربع ط ز إلى ‹ مربع › ط د كنسبة ج ط إلى ط د. فنسبة مربع ا ب إلى مربع ا ط كنسبة ج ط إلى ط د. فضرْب مربع ا ب في خط د ط مثل ضرب مربع ا ط في ج ط، فنجعل مكعب ا ط مشتركاً، فيكون مربع ا ط في ا ج مثل مربع ا ب في ط د مع مربع ا ط في ا ط. ونزيد على كلا الجانبين مربع ا ب في ا د، فيصير أحد الجانبين ‹ مربع › ا ط في ا ج، مع مربع ا ب في ا د، والجانب الآخر مربع ا ب في ا ط مع مكعب ا ط؛ فإذا جعلنا ا ط جذراً يكون مربع ا ب في ا ط هو الجذور، ومربع ا ط في ا ج هو الأموال. فالأموال والعدد في جانب والجذور مع مكعب ا ط في جانب آخر، فالأموال والعدد مثل المكعب والجذور.



4 إلى ط ز: إلى ط د [ب، ل] - 4-5 فنسبة مربع .... ط د: ناقصة [ل] - 7 مكعب: مربع [ب، ل] - 8 في ط د: كتب ناسخ [ل]، بعدها «مع مربع ا ب في ط د» وهو تكرار لما قبله بعد أن كتب كلمة «مع» - 12 ا ج: ج [ب، ل] - 12-13 والجذور... في جانب: ناقصة [ل]

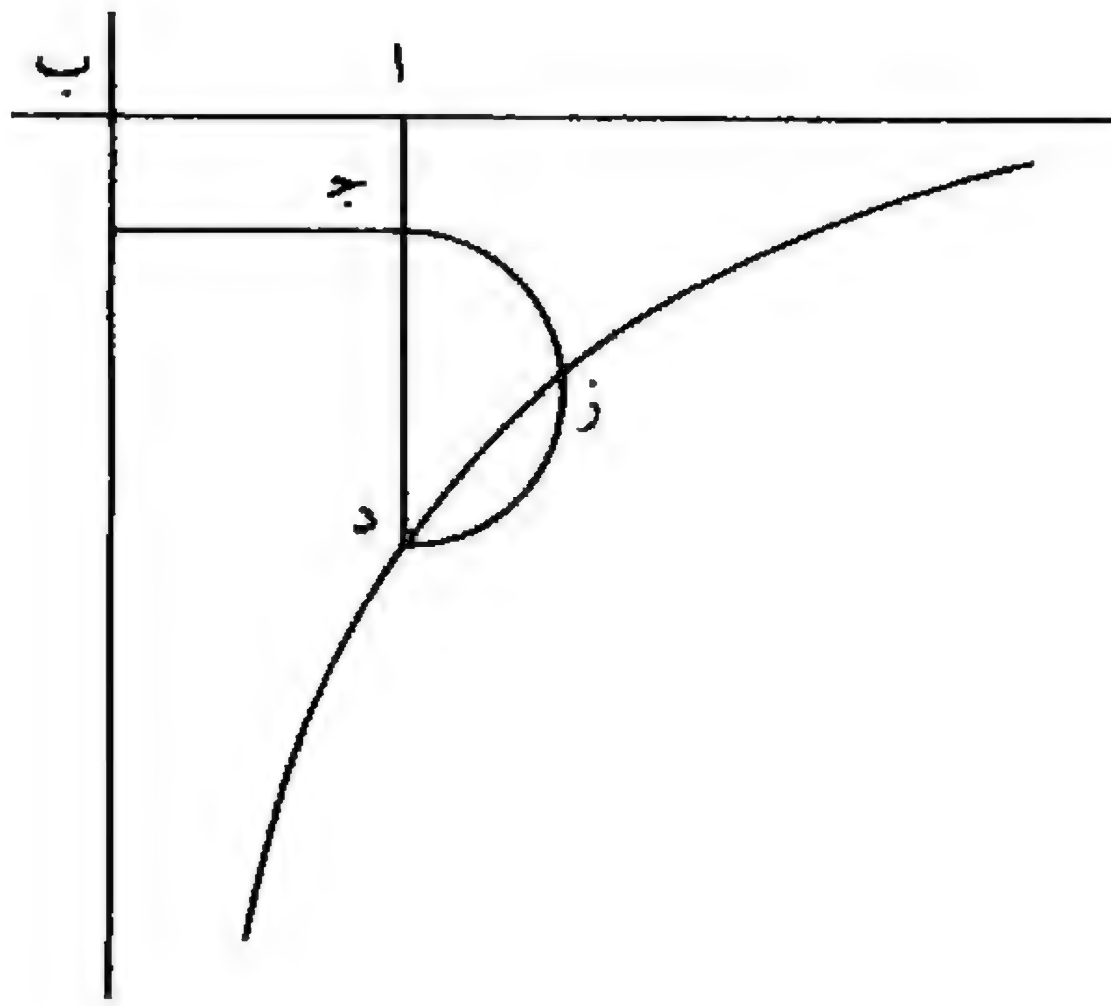
وليكن ا د مثل ا جـ فأقول: إن ا جـ هو المطلوب؛ لأنا إذا جعلناه جذراً فيكون ضربه في مربع ا ب هو الجذور، وقد كان مثلَ العدد، فالجذور تساوي العدد، ومربع ا جـ – وهو المال – في ا جـ هو المكعب، وهو الأموال أيضاً؛ فالعدد والأموال تساوي المكعب والجذور.



وليكن ا د أعظم من ا جـ، فنخرج عمودي د هـ ب هـ ليحصل سطح ب د قائمَ الزوايا. ونعمل على جـ د نصف دائرة، ونعمل / فيما بين ل – ٩٧ – و خطي ب ص ب ل قطعاً زائداً على الوجه المذكور، ويمرّ محيطه بنقطة د. ونبيّن كما بيّنا أنه يدخل في الدائرة ويقطعها على نقطة أخرى، وليكن على ز. فنخرج عمودَ ز ط، ونخرجه إلى ك، فيكون سطح د ك مثل ا ز بمثل ما مرّ، فأضلاعها متكافئة في النسبة. فنسبة ا ط إلى ط ك – أعني ا ب – كنسبة ط د إلى ط ز، ونسبة مربع ا ط إلى مربع ا ب كنسبة مربع ط د إلى مربع ط ز أعني ‹نسبة› خط د ط إلى جـ ط. فنسبة مربع ‹ا ط إلى مربع› ا ب كنسبة د ط إلى جـ ط. فضرب مربع ا ط في خط ط جـ مثلُ ضرْب مربع ا ب في د ط. فلأن مكعب ا ط مع مربع ا ب في ا د – وهو العدد – يعادل مربع ا ب في ا د مع مكعب

5 د هـ: جـ هـ [ب، ل] – 6 ب د: ب جـ [ب، ل] / جـ د: جـ [ب، ل] – 7 د: جـ [ب، ل] – 9 د ك: جـ ك [ب، ل] – 11 ط ز: ط جـ [ب، ل] – 12 ط د: ط ز [ب، ل] / ط ز: ط جـ [ب، ل] – 14 في: الى [ب، ل]

ا ط ؛ فننقص من مكعب ا ط مربع ا ط في ط ج، وننقص من مربع ا ب في ا د مربع ا ب في ط د؛ يبقى في أحد الجانبين مربع ا ط في ا ج مع مربع ا ب في ا د، وفي الجانب الآخر مكعب ا ط مع مربع ا ب في ا ط، فهما معادلان لتعادل المنقوصين؛ فإذا جعلنا ا ط جذراً، فمربع ا ب في ا ط هو الجذور، ومربع ا ط في ا ج هو الأموال؛ فالمكعب مع الجذور مثل الأموال مع العدد؛ وذلك ما أردنا بيانه.



وأما استخراج المطلوب / فنضع العدد على التخت، ونضع فوقه أصفار ل – ٩٧ – ظ
الكعب، فيكون / للمسألة صور ثلاث : ب – ٦ – ظ

الصورة الأولى:

أن يكون المرتبة السميّة للكعْب الأخير أرفعَ من آخر مراتب عدد الأموال ومن المرتبة السميّة للجذر الأخير من الجذور المقابلة لعدد الجذور، مثل قولنا: مكعب وثلاثمائة جذرٍ يعدل ثلاثين مالاً وعدداً بهذه الصورة ٣٠٠٨١٢٣١؛ فنستخرج مطلوب الكعب الأخير وننقل آخر مراتب عدد الأموال إلى المرتبة المنحطّة عن المطلوب بقدر انحطاط مرتبته عن المرتبة

9 ناقصة [ل] – 12 مكعب: كعب [ب، ل]

السميّة للكعب الذي هو مكان المطلوب؛ وننقل آخر عدد الجذور إلى المرتبة المنحطة عن المطلوب بقدر انحطاط مرتبة آخر عدد الجذور عن مرتبة الجذر السميّ للكعب الذي هو مكان المطلوب. ومطلوب الكعب في المثال هو الثلاثة، فنضعها في الكعب الأخير، وننقل آخر مراتب عدد الأموال إلى مئات الألوف لانحطاط مرتبته عن المرتبة السميّة للكعب الأخير بمرتبة واحدة؛ وننقل آخر عدد الجذور إلى عشرات الألوف لانحطاط مرتبته عن مرتبة الجذر السميّ للكعب الأخير بمرتبتين، فيحصل بهذه الصورة

٣ ٥ ٥
٣٠٠٨١٢٣١
٣٠٠
٣٠

؛ ثم نضع مربع المطلوب في السطر / الذي فيه عدد الجذور، ل - ٩٨ - و ونضرب المطلوب في عدد الأموال، وننقص المبلغ من السطر الأوسط، ونضرب المطلوب في السطر الأوسط، وننقص المبلغ من العدد، ونبطل السطر الأوسط؛ ثم نضع عدد الجذور كما كان، ونردّه إلى الثلث، ونضع مربع المطلوب بحذائه في السطر الذي فيه ثلث عدد الجذور، ونردّ عدد الأموال أيضاً إلى الثلث، ونضرب المطلوب في ثلث عدد الأموال، وننقص ضعف المبلغ من مربع المطلوب، ثم ننقص ثلث عدد الأموال من المطلوب، ونبطل السطر الذي فيه عدد الأموال، فيصير بهذه الصورة

٢٩ ٥ ٥
٥٦٩١٢٣١
٨٤١٠٠

؛ ثم ننقل الأعلى بمرتبتين والأسفل بمرتبة، ونستخرج المطلوب الثاني ١ – وهو اثنان – ونضعه فوق التسعة التي دخلت في مكانه، ونضربه في بقية المطلوب الأول، ونزيد المبلغ على الأسفل، ونضربه في الأسفل، وننقص ثلاثة أمثال كلّ ضربةٍ من العدد، وننقص مكعبه أيضاً من العدد، ونزيد مربعه على الأسفل، ونضربه في بقية المطلوب الأول كرّةً أخرى، ونزيد المبلغ على الأسفل، ثم نزيده على التسعة التي دخلت في مكانه ليحصل في / مكانه الواجب، وننقل الأعلى بمرتبتين والأسفلَ بمرتبةٍ، ل - ٩٨ - ظ

11 كان: كانت [ب، ل] / ونرده: ونردها [ب]، ويزه [ل]

ونضع المطلوب الثالث وهو الواحد، ونعمل به العمل المذكور إلى آخره. وإذا فرغنا من العمل نزيد ثلث عدد الأموال على السطر الأعلى، فيحصل السطر الأعلى بهذه الصورة ٣٢١، وهو الجذر المطلوب.

الصورة الثانية:

أن يكون المرتبةُ السمية للجذر الأخير من الجذور المقابلة لعدد الجذور أرفعَ من ‹ المرتبة السمية › للكعب الأخير ومن آخر مراتب عدد الأموال، كما في قولنا: مكعب ‹ وجذور › بهذه العدّة ......٣٠ يعدل ثلاثين مالاً وعدداً بهذه الصورة ٩٩٢٩٨٤٩٣١، فنجعل عددَ الجذور كالمقسوم عليه، والعددَ كالمقسوم، ونستخرج مكان مطلوب القسمة، ونعرف الكعب السميّ لمرتبة هذا المطلوب. فهناك مكان المطلوب. وننقل مرتبة الجذر الأخير من الجذور المقابلة لعدد الجذور إلى المرتبة المرفوعة عن الكعب الذي هو مكان المطلوب بقدر ارتفاع الجذر الأخير من الجذور المقابلة لعدد الجذور عن مرتبة الجذر السميّ للكعب الذي هو مكان المطلوب؛ وننقل آخر مراتب عدد الأموال إلى المرتبة المرفوعة أو المنحطة عن الكعب الذي هو مكان المطلوب بقدر / ارتفاع آخر مراتب عدد الأموال عن المرتبة ل – ٩٩ – و السميّة للكعب الذي هو مكان المطلوب، أو انحطاطِه عنه. لكن مكان مطلوب القسمة في المثال هو المئات، والكعب السميّ إنما هو الكعب الثالث، فهناك مكان المطلوب، ومرتبة الجذر الأخير من الجذور المقابلة لعدد الجذور مرفوعة عن الكعب الذي هو مكان المطلوب بمرتبتين؛ فكان آخر مراتب عدد الجذور هو المرتبة الأخيرة من العدد، وآخرُ ‹ مراتب ›

2-3 فيحصل السطر: فيحصل للسطر [ب، ل] – 4 ناقصة [ل] – 7 مكعب: كعب [ب، ل] / ‹وجذور› : في [ب]، هناك مكان لكلمة ممحوة، ناقصة [ل] – 20 الأخيرة: الأخير [ب، ل]

عدد الأموال منحطّ عن المرتبة السميّة للكعب الذي هو مكان المطلوب بمرتبةٍ، فنقلنا آخر عدد الأموال إلى المرتبة المنحطة عن الكعب الذي هو مكان المطلوب بمرتبةٍ، فحصل بهذه الصورة ٥ ٥ ٥ ٩٩٢٩٨٤٩٣١ ٣٠٠٠٠٠٠، ثم نردّ كل واحدٍ من عدد الجذور والأموال إلى الثلث، ونطلب عدداً ٣٠ نضربه في آخر ثلث عدد الجذور، وننقص ثلاثة أمثال الضرب من العدد وهو الثلاثة، فنضعه في الكعب الثالث، ونضربه في ثلث عدد الأموال، ونضع المبلغ في سطرٍ فوقه، ونضربه في المبلغ، ونزيد ثلاثة أمثال الضرب على العدد، ونبطل مضروب المطلوب في ثلث عدد الأموال؛ ثم ننقص مكعب المطلوب / من العدد، ونضربه في ثلث عدد الجذور، وننقص ثلاثة أمثال كل ضربةٍ من العدد، فيحصل بهذه الصورة ٣ ٥ ٥ ٦٨٦٨٤٩٣١ ١٠٠٠٠٠٠؛ ثم نضع مربع المطلوب بحذائه في السطر الذي فيه عدد الجذور / ونضرب ١٠ المطلوب في ثلث عدد الأموال، وننقص ضعف المبلغ من مربع المطلوب، وننقص ثلث عدد الأموال من المطلوب، ونبطل ثلث عدد الأموال، فيحصل بهذه الصورة ٢٩ ٥ ٥ ٦٨٦٨٤٩٣١ ١٠٨٤٠٠٠؛ ثم ننقل الأعلى بمرتبتين والأسفل بمرتبةٍ، ونعمل العمل السابق إلى آخره. وإذا فرغنا من العمل نزيد ثلث عدد الأموال على السطر الأعلى، فيحصل بهذه الصورة ٣٢١، وهو الجذر المطلوب.

ل - ٩٩ - ظ

ب - ٧ - و

الصورة الثالثة:

أن يكون آخر مراتب عدد الأموال أرفع من المرتبة السميّة للكعب الأخير، ومن المرتبة السميّة للجذر الأخير من الجذور المقابلة لعدد الجذور، كما في قولنا: مكعب وثلاثمائة جذرٍ يعدل ثلاثمائة وأحداً وعشرين مالاً وعدداً بهذه الصورة ٩٦٣٠٠؛ فنطلب الكعب السميّ لآخر مراتب عدد

10 نُسخ الجدول في ب هكذا ٣ ٥ ٥ ٦٨٦٨٤٩٣١ ١٠٠٠٠٠٠ ١٠ – 17 ناقصة [ل] – 20 مكعب: كعب [ب، ل] / عشرين: عشرون [ب، ل]

الأموال، فيكون هناك مكان المطلوب. فننقل آخر مراتب عدد الأموال / إلى تلك المرتبة، وننقل آخر مراتب عدد الجذور إلى المرتبة المنحطة عن ل – ١٠٠ – و
مكان المطلوب بقدر انحطاطه عن مرتبة الجذر السميّ للكعب الذي هو مكان المطلوب. لكنّ الكعب السميّ لآخر مراتب عدد الأموال في المثال إنما هو الكعب الثالث. فنقلنا إليه آخر مراتب عدد الأموال. وآخرُ مراتب عدد الجذور منحطّة عن مرتبة الجذر السميّ للكعب – الذي هو مكان المطلوب – بمرتبتين. فنقلنا آخر مراتب عدد الجذور إلى المرتبة المنحطّة عن الكعب – الذي هو مكان المطلوب – بمرتبتين، فصار بهذه الصورة (٥ ٥ ٥ / ٠٠٩٦٣٠٠ / ٣٢١)؛ ثم نجعل آخر مراتب عدد الأموال مطلوباً، وهو ثلاثة في المثال، ونضعه (٣٠٠) في الكعب الثالث، ونضربه في مراتب عدد الأموال ونضع المبلغ في سطرٍ أوسطَ بين العدد وبين عدد الأموال، ونضربه في الحاصل ونزيد المبلغ على العدد؛ ثم نبطل السطر الذي بين العدد وبين عدد الأموال؛ ثم نردّ كل واحدٍ من عدد الأموال والجذور إلى الثلث ونضع ثلث عدد الجذور فيما بين العدد وبين ثلث عدد الأموال على هذه الصورة (٥ ٥ ٣ / ٢٨٩٨٦٣٠٠ / ١٠٠)، وننقص مكعب المطلوب من / العدد، ونضربه في ثلث عدد الجذور (١٠٧)، وننقص ل – ١٠٠ – ظ
ثلاثة أمثال الضرب من العدد، ونضع مربعه بحذائه في السطر الذي فيه عدد الجذور، ثم نضرب المطلوب في ثلث عدد الأموال، وننقص ضعف المبلغ من مربع المطلوب، وننقص ثلث عدد الأموال من المطلوب ونبطل السطر الذي فيه ثلث عدد الأموال، فيحصل بهذه الصورة (٥ ١٩٣٥ / ١٨٩٦٣٠٠ / ٢٥٩٠٠)؛ ثم ننقل الأعلى بمرتبتين، والأسفل بمرتبةٍ، ونعمل العمل السابق إلى آخره. وإذا فرغنا من العمل نزيد ثلث عدد الأموال على السطر الأعلى، فيحصل السطر الأعلى بهذه الصورة ٣٢١، وهو الجذر المطلوب.

22 الأعلى: الاعل [ب، ل]

وأما بيان جهة العمل: فالمكعب مع المسطّح الأول يعادل العدد مع المسطّح الثاني. فالمسطّح الثاني مع العدد عددٌ يعدل مكعباً وجذوراً. والكلام في هذه المسألة مثل الذي مرّ في المسألة التي قبلها، ولايتعيّن آخر الجذر المطلوب في أول الأمر إلّا بمثل ما تبيّن في تلك المسألة، ولايختص أعمالها بشيء إلّا وقد تضمن بيانها المسائلُ المتقدمة؛ وذلك ما أردنا بيانه.

فهذه هي المسائل التي يجتمع فيها الكعب مع / العدد، ولايقع فيها ل - ١٠١ - و المستحيل.

4 إلا: ناقصة [ل]

المعادلات

⟨II⟩

〈 معادلات الدرجة الثالثة التي يقع فيها المستحيل 〉

وأما المسائل التي يقع فيها المستحيل فخمس مسائل:

المسألة الأولى: مكعبٌ وعددٌ يعدل أموالاً.

فليكن ا ب عددَ الأموال. فلأن المال إذا ضرب في الجذر المطلوب حصل المكعب فقط: فإذا ضرب في عدد الأموال حصل المكعب مع العدد. فيجب أن يكون عدد الأموال أعظم من الجذر المطلوب، فيكون مربعه – وهو المال – في ا ب – وهو عدد الأموال – مجسّماً قاعدتُه مربع ب ج، وارتفاعه مثل ا ب، يساوي مكعب ب ج مع العدد. فإذا فُصل منه المكعب – وهو ضرب مربع ب ج في خط ب ج – يكون الباقي من هذا المجسّم، وهو مربع ب ج في ا ج، مثلَ العدد. فمن ضرورة هذه المسألة أن ينقسم خط ا ب – وهو عدد الأموال – بقسمين يكون مربع أحدهما في الآخر مثلَ العدد، حتى لو امتنعت القسمة على هذا الوجه تكون المسألة مستحيلة.

8 مربعه: أضاف ناسخ [ل]. بعدها «المطلوب» فأصبحت «مربعه المطلوب» وهذا خطأ. وهي في [ب]. ممحوة بعض الشيء، ولكن يمكن التعرف على بداية كلمة مربع وعلى «هو مال» وما تبقى من مكان لا يكفي لكلمة «المطلوب». فيبدو أن ناسخ [ل]. أضاف هذه الكلمة دون اضطرار. والضمير في مربعه يعود على الجذر المطلوب / مجسّماً: مجسم [ب، ل]

ب ج ا

ثم نقول: إذا كان ا ج ثلث ا ب – الذي هو عدد الأموال – وقُسم ا ب عند نقطة د على خط ا ج، وعند نقطة هـ على خط ب ج، كيف اتفقت هاتان النقطتان، فإن مربع ب ج في ج ا أعظم من كل واحدٍ من مربع ب د في د ا، ومن مربع ب هـ في / هـ ا، حتى يلزم من ذلك أنه لو كان العدد أكثر من مربع ب ج، الثلثين، في ا ج، الثلث، فلايمكن أن ينقسم عدد الأموال – وهو ا ب – ‹ إلى قسمين › على وجهٍ يكون ‹ فيه › مربع أحدهما في الآخر مثلَ العدد، فيكون المسألة مستحيلة. وإذا كان مساوياً له أو أقل / تكون ممكنة. ل – ١٠١ – ظ ب – ٧ – ظ

ب هـ ج د ا

ولنبيّن أولاً أن مجسّمَ مربع ب ج في ا ج – ونسميه المجسّم الأول – أعظمُ من مجسّم مربع ب د في د ا، ونسميه المجسّم الثانى.

فلأن المجسّم الأول ينقسم إلى مربع ب ج في ا د وإلى مربع ب ج في ج د، والمجسّم الثاني ينقسم إلى مربع ب ج في ا د وإلى مجسّمٍ قاعدتُه العلَم الذي هو فضل مربع ب د على مربع ب ج، وارتفاعه ا د، ونسميه علَم د ج، فإذا ألقينا مربع ب ج في د ا المشترك يبقى من المجسّم الأول مربع ب ج في د ج، ومن المجسّم الثانى علَم د ج في ا د. فلأن علم د ج حاصل من ضرب د ب ب ج في د ج وب ج ضعفُ ا ج، فمربع ب ج ضعف ضرب ب ج في ا ج، وضعف ضرب ب ج في ا ج مثل ضعف ب ج في ا د وفي د ج، وضرب جميع د ب ب ج في ا د هو ضعف ب ج في ا د مع د ج في ا د. فإذا ألقينا ضعف ب ج في ا د

14 ألقينا: القنا [ب، ل]

المشترك، يبقى من أحدهما ضعف ب ج في د ج، ومن الآخر ضرْب د ج في ا د. وب ج / أعظم من ا ج، فهو أعظم من ا د، فضعف ب ج ل – ١٠٢ – و في د ج أعظم من د ج في ا د. فإذا زدنا على ضعف ب ج في د ج، الأعظم، ضعفَ ب ج في ا د؛ حصل ضعف ب ج في ج ا، و‹ إذا › زدناه بعينه على د ج في ا د، الأصغر، حصل د ب ب ج في ا د؛ فيكون ضعفُ ضرْب ب ج في ا ج – أعني مربع ب ج – أعظم من ضرب د ب ب ج في ا د. فنسبة د ب ب ج إلى ب ج أصغر من نسبة ب ج إلى ا د. فإذا جعلنا نسبة د ج إلى ب ج مشتركة، فتصير النسبة المؤلفة من نسبة د ج إلى ب ج، ومن نسبة د ب ب ج إلى ب ج أصغرَ من النسبة المؤلفة من نسبة د ج إلى ب ج، ومن نسبة ب ج إلى ا د. لكن النسبة المؤلفة من نسبة د ج إلى ب ج، ومن نسبة د ب ب ج إلى ب ج، هي نسبة العلَم إلى مربع ب ج، والنسبة المؤلفة من نسبة د ج إلى ب ج، ومن ب ج إلى ا د هي نسبةُ د ج إلى ا د. فنسبةُ علَم د ج إلى مربع ب ج أصغر من نسبة د ج إلى ا د. فضرْب علم د ج في ا د أصغر من ضرب مربع ب ج في د ج. فإذا جعلنا ‹ ضرب › مربع ب ج ‹ في ا د › مشتركاً، فيصير ضرب مربع ب ج في ا ج أعظم من ضرب مربع ب د في د ا.

وأقول أيضاً: إنه أعظم من ضرب مربع ب ه في ا ه. فلأن المجسّم الأول ينقسم إلى مربع ب ه في ا ج وإلى ضرب ج ب ب ه في ه ج –

2 وب ج: كتب ناسخ [ب]، الباء مثل الميم، وهكذا نقلها ناسخ [ل] / ا د: د ج [ب، ل] / فضعف: ضعف [ب، ل] – 3 د ج (الأولى): ا د [ب، ل] / زدنا: أزدنا [ل]، مما يدل على استعمال فعل «أزاده» في لغة هذه الفترة / د ج: ا د [ب، ل] – 4 ا د: د ج [ب، ل]

أعني العلم – ثم في ا جـ، والمجسّم الثاني – أعني / مربع ب هـ في ا هـ — ل – ١٠٢ – ظ ينقسم إلى ضرب مربع ب هـ في جـ هـ وإلى ضرب مربع ب هـ في ا جـ، فإذا ألقينا مربع ب هـ في ا جـ المشترك، يبقى من المجسّم الأول العلم المذكور في ا جـ، ومن المجسّم الثاني مربع ب هـ في جـ هـ. فلأن نقصان مربع ب هـ عن مربع ب جـ، المساوي لضعف ب جـ في ا جـ، هو ضرب جـ ب ب هـ في جـ هـ العلَم، ونقصان ضرب جـ ب ب هـ في ا جـ عن ضعف ب جـ في ا جـ: إنما هو ضرب هـ جـ في ا جـ؛ لكن ضرب جـ ب ب هـ في هـ جـ أعظمُ من ضرب ا جـ في هـ جـ لأن جـ ب ب هـ أعظم من ا جـ؛ فنقصان مربع ب هـ عن مربع ب جـ أكثر من نقصان [مربع] ضرب جـ ب ب هـ في ا جـ عن مربع ب جـ. فمربع ب هـ أصغر من ضرب جـ ب ب هـ في ا جـ. فنسبة جـ ب ب هـ إلى ب هـ أعظم من نسبة ب هـ إلى ا جـ؛ فنجعل نسبة جـ هـ إلى هـ ب مشتركة، فيكون النسبة المؤلفة من نسبة جـ هـ إلى هـ ب ومن نسبة جـ ب ب هـ إلى ب هـ أعظم من النسبة المؤلفة من نسبة جـ هـ إلى هـ ب ومن نسبة هـ ب إلى ا جـ. لكن النسبة المؤلفة من نسبة جـ هـ إلى هـ ب، ومن نسبة جـ ب ب هـ إلى ب هـ هي نسبة العلَم إلى مربع هـ ب؛ والنسبة المؤلفة / من نسبة جـ هـ إلى هـ ب، ومن نسبة ل – ١٠٣ – و هـ ب إلى ا جـ هي نسبة جـ هـ إلى ا جـ. فنسبة العلم إلى مربع هـ ب أعظم من نسبة جـ هـ إلى ا جـ. فضرب العلم في ا جـ أعظم من ضرب مربع ب هـ في جـ هـ. فإذا جعلنا مربع ب هـ في ا جـ مشتركاً، كان ضرب مربع ب جـ في ا جـ أعظم من مربع ب هـ في ا هـ. فقد تبيّن أن مربع ب جـ، الثلثين، في ا جـ، الثلثِ، أعظمُ مجسّمٍ يمكن أن يحصل من ضرب مربع أحد قسمي ا ب في القسم الآخر.

15-16 العلم إلى: العلم ا ل [ب، ل]

ب ه ج ا

فالعدد إن كان أعظم من ضرب مربع ثلثي عدد الأموال في ثلثه فيكون المسألة مستحيلة. وإن كان مساوياً له فيكون الجذر المطلوب ثلثي عدد الأموال وهو ب ج؛ لأنّا إذا جعلنا ب ج جذراً يكون ضربُ مربع ب ج في ب ج هو المكعب، ويكون مربعُه هو المالَ، ومربعُ ب ج في ا ب مبلغَ الأموال. ومربع ب ج في ا ب يكون مساوياً لمربع ب ج في ب ج، وهو المكعب، ولمربع ب ج في ا ج، وهو العدد. فيكون مجموع المكعب والعدد مساوياً لمبلغ الأموال، ولايمكن أن يوجد مطلوبٌ آخرُ غيرُ ب ج لأن اب لاينقسم على نقطة أخرى بحيث يكون ضرب ‹ مربع › أحد قسميه في الآخر مثلَ العدد.

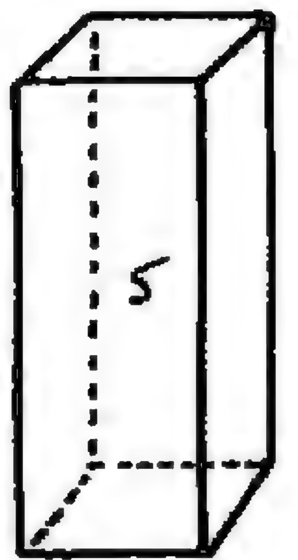
وإن كان أقلَّ منه فلها مطلوبان / أحدهما أعظم من ثلثي عدد الأموال ل - ١٠٣ - ظ والآخر أصغر منه.

أما المطلوب الأعظم: فليكن ا ب عددَ الأموال وب ج ثلثي ا ب، وا ج ثلثه. فمربع ب ج، الثلثين، في ا ج، الثلثِ، وهو المجسّم الأول أعظم من العدد؛ وليكن عدد ك هو فضلَ المجسّم الأول على العدد. ونستخرج خط ا د حتى يكون مكعبه وأمواله بعدّة ا ب مثل عدد ك، ونفصل ج ه مثل ا د. فأقول: إن مربع ب ه في ا ه مثلُ العدد.

لأن مربع ب ج في ا ج ينقسم إلى مربع ب ج في ا ه، وإلى مربع ب ج في ج ه، أعني ضربَ ضعفِ ب ج في ا ج ثم في ج ه؛ وضعفُ ب ج في ا ج ينقسم إلى ضعف ب ج في ا ه وضعف ب ج في ج ه؛ فإذا ضربنا / كلّ واحدٍ من قسميه في ج ه، كان أحدهما ضعفَ ب ج ب - ٨ - و في ا ه ثم في ج ه، أعني ضربَ ضعفِ ب ج في ج ه ثم في ا ه،

2 ثلثي: ثلثا [ب، ل]

والآخرُ ضعفُ ب ج في ج ه ثم في ج ه، أعني ضربَ ضعف ب ج في مربع ج ه. فالمجسّم الأول يساوي ضرب مربع ب ج في ا ه، وضرب ضعف ب ج في ج ه ثم في ا ه، وضرب ضعف ب ج في مربع ج ه. وهذا القسم الثالث ينقسم إلى ثلاثة أقسام وهي: مربع ج ه في ا ب، ومربع ه ج في ا ه، ومربع ه ج / في ه ج، وهو مكعب ه ج. فصار ل - ١٠٤ - و المجسّم الأول خمسة أقسام: أحدها مربع ب ج في ا ه، والثاني ضعف ب ج في ج ه ثم في ا ه، والثالث مربع ه ج في ا ب، والرابع مربع ه ج في ا ه، والخامس مكعب ه ج. لكن مربع ب ه في ا ه يساوي ضرب ضعف ب ج في ج ه ثم في ا ه، ومربعَ ج ه في ا ه، ومربعَ ب ج في ا ه. فإذا أسقطنا هذه الثلاثة من المجسّم الأول بقي قسمان: أحدهما مربع ج ه في ا ب، أعني مربع ا د في ا ب، والثاني مكعب ج ه، أعني مكعب ا د. فمربع ا د في د ب مع مربع ب ه في ا ه مثل المجسّم الأول. ولأن مكعب ا د مع ضرب مربعه في ا ب مساوٍ لعدد ك، وهو فضل المجسّم الأول على العدد المسؤول؛ فمربع ا د في د ب مع العدد المسؤول مساوٍ للمجسّم الأول. فمربع ا د في د ب مع العدد المسؤول مثلُ مربع ا د في د ب، مع مربع ب ه في ا ه. فإذا ألقينا مربع ا د في د ب، يبقى مربع ب ه في ا ه مثل العدد المسؤول، فـ ب ه مطلوبنا في هذه المسألة، وهو أعظم من ثلثي ا ب.



ب ج ه ا د

7 ثم في ا ه: ناقصة [ل] – 9-10 ومربع ب ج في ا ه: ناقصة [ل] – 10 المجسم: الحمسم [ب] – 12 ب ه في ا ه: ا ه في ه ب [ب، ل] – 14 المسؤول: المقصود هنا وإلى آخر النص العدد الذي هو موضع السؤال، ولن نشير لهذا مرة أخرى – 17 ب ه في ا ه: ا ه في ب ه [ب، ل]

وأما المطلوب الآخر: فلأن ا ه ب ه كلٌ واحدٍ منهما حاصلٌ معلوم، وب ه أعظم من ا ه، فيفصل ب ز / مثل ا ه. فلأن ب ز معلوم؛ ل – ١٠٤ – ظ فنجعله عددَ الجذور، وسطح ب ه في ا ه معلوم نجعله عدداً. ونستخرج المطلوب على مسألة: مال وجذور بعدّة ب ز يعدل عدداً هو ضرب ب ه في ا ه. وليكن المطلوب – الذي نُخرج – خط ط ز. فلأن ضرب ه ب في ا ه مثلُ ضرب ط ز في ط ب؛ فنسبة ه ب إلى ط ب كنسبة ط ز إلى ا ه، أعني ز ب، فبالتركيب: نسبة ه ب ط ب إلى ط ب كنسبة ط ز ز ب إلى ز ب، أعني ط ب إلى ا ه. فنجعل نسبة ه ط إلى ط ب مشتركة، فيكون النسبة المؤلفة من نسبة ه ط إلى ط ب ومن نسبة ه ب ب ط إلى ب ط كالنسبة المؤلفة من نسبة ه ط إلى ط ب، ومن نسبة ط ب إلى ا ه. لكن المؤلفة الأولى هي نسبةُ ضرب ه ط في ه ب ط ب – وهو العلَم – إلى مربع ط ب، والمؤلفة الثانية هي نسبة ه ط إلى ا ه. فنسبة العلم إلى مربع ط ب كنسبة ه ط إلى ا ه. فبالتركيب: نسبةُ العلم مع مربع ب ط – أعني مربع ه ب – إلى مربع ب ط كنسبة ط ا إلى ا ه. فضرب مربع ه ب في ا ه مثلُ ضرب مربع ب ط في ا ط. لكن مربع ب ه في ا ه مثلُ العدد، فمربع / ب ط في ل – ١٠٥ – و ا ط مثل العدد. فخط ب ط هو المطلوب الآخر. ونقطة ط لاتقع مثل نقطة ه وإلّا كان ضرب ا ه في ه ب مثل ضربه في ه ز فـ ه ز مثل ز ب أعني ا ه، فـ ه ب ثلثا ا ب، وا ه ثلثه، وقد كان ا ج ثلثَ ا ب، هذا خلْف. ولاتقع على موضع الثلثين، وإلّا كان ضرب مربع

3 سطح: يعني مربع ب ه – 18 وإلا كان: وإلا لكان [ب، ل] / ا ه في ه ب: ا ب في ه ر [ب، ل] / ه ز: ر ب [ب، ل] / فـ ه ز: فهو [ب، ل] – 20 وإلا كان: وإلا لكان [ب، ل]

ب ط في ا ط مثل المجسّم الأول وهو محال. فـ ط ب أصغر من المطلوب الأعظم، وليس هو ثلثي ا ب ، فهو أصغر من الثلثين.

ا ه ج ط ز ب

ثم المطلوبُ الأعظم في هذه المسألة يخرج من مسألة: مكعب وأموال يعدل عدداً. وليكن ا ب عددَ الأموال، وب ج ثلثي ا ب ، فمربع ب ج في ا ج هو المجسّم الأول ونُسمّيه العدد الأعظم. وليكن مربع ب ط في ا ط مثلَ العدد المسؤول الذي هو أقلّ من العدد الأعظم. وقد تبيّن أن الذي يخصّ المجسّم الأول هو مربع ب ج في ط ج، والذي يخصّ المجسّم الثاني هو العلَم الحاصل من ضرب ط ج في ط ب ب ج ثم في ا ط. فلأن ا ب عدد معلوم، وب ج – ثلثاه – عددٌ معلوم، وا ج – ثلثه – عددٌ معلوم، فينقص العدد المسؤول من المجسّم الأول، فيبقى عدد التفاوت معلوماً، وهو فضل المجسّم الأول على المجسّم الثاني، أعني فضلَ مايخصّ المجسّم الأول على مايخص المجسّم الثاني، وهو فضل مربع ب ج في ج ط / على علَم ط ج في ط ب ب ج، ثم في ا ط. فليكن ط ج ل – ١٠٥ – ظ
شيئاً؛ فضرْب مربع ب ج في ط ج أشياءُ بعدّة عددِ مربعِ ثلثي عدد الأموال، وهو أشياء بعدّة أربعة أتساعِ مربع عدد الأموال، وهو الذي يخص المجسّم الأول. ولأن أحد ضلعي العلَم – وهو ط ج – شيء، فضلعه الآخر وهو ط ب ب ج ضعفُ ثلثي عدد الأموال وشيء، وهو مثلُ وثلثُ عدد الأموال، وشيءٌ. لكنّ ضرب الشيء في مثلِ وثلثِ عدد الأموال يكون أشياءَ بعدّة مثلِ وثلثِ عدد الأموال؛ وضربُ الشيء في

3 من: ناقصة [ل] – 5 في: من [ب، ل] – 8 ضرب ط ج: ضرب ه ج [ب، ل] – 17 فضلعه: وضلعه [ب، ل]

الشيء مالٌ، ومجموعُها العلَمُ. فإذا ضربناه في ا ط – وهو ثلث عدد الأموال إلّا شيئاً – يصير أشياء عدّتها أربعةُ أتساعِ مربعِ عددِ الأموال، إلّا أموالاً بعدّة عدد الأموال وإلّا كعباً، وهو ما يخص المجسّم الثاني. فالذي يخص المجسَّم الثانى: إذا زيد عليه عددُ التفاوتِ يصير مساوياً لما يخص المجسّم / الأول. فيكون: أشياءُ عددُها أربعة أتساعِ مربّعِ عدد ب - ٨ - ظ الأموال يعدل أشياءَ عددُها أربعة أتساع مربع عددِ الأموال مع عدد التفاوت، إلّا أموالاً عدّتُها عددُ الأموال إلّا كعْباً. فإذا جبرنا المستثنى منه بزيادة المستثنى عليه، وزدنا مثله / على الجانب الآخر، وقابلنا أحدهما ل - ١٠٦ - و بالآخر، وألقينا المشترك يصير أموالاً عدّتُها عدد الأموال، ومكعباً يعدل التفاوت. فقد تبيّن أن مربع ط ج إذا ضُرب في ا ب – وهو عدد الأموال – وأُضيف إلى ذلك مكعب ط ج، يكون المبلغ مساوياً لعدد التفاوت. فإذا جعلنا عدد الأموال كما هو بعينه عدد أموال، وجعلنا عدد التفاوت عدداً، واستخرجنا المطلوب بمسألة مكعبٍ وأموال يعدل عدداً، يخرج لنا ط ج الشيء، فنزيده على ثلثي عدد الأموال، فيحصل المطلوب الأعظم.

ا ط ج ب

مثاله: مكعب وعدد بهذه الصورة ١٤٨٣٧٩٠٤ يعدل أربعمائةٍ وخمسةً وستين مالاً. فلأن ثلث عدد الأموال مائةٌ وخمسةٌ وخمسون، وثلثاه ثلاثمائةٍ وعشرةٌ، ومربع الثلثين ستّةٌ وتسعون ألفاً ومائةٌ، ومضروبُ هذا المربع في الثلث بهذه الصورة ١٤٨٩٥٥٠٠ وهو العدد الأعظم، نقصنا منه

3 كتب ناسخ [ب]، واو «وإلا» كأنها «في»، وهذا ما نقله ناسخ [ل] – 7 إلا كعبا: وإلا كعبا [ب، ل] / منه: ناقصة [ل] – 8 بزيادة المستثنى: في هامش [ل]

العدد المسؤول، فيبقى بهذه الصورة ٥٧٥٩٦، فهذا العدد يعدل مكعباً وأربعمائةٍ وخمسةً وستين مالاً. فنضع العدد على التخت ونستخرج المطلوب بالطريق الذي مرّ في مسألة: مكعب وأموال يعدل / عدداً، فيخرج أحدَ ل - ١٠٦ - ظ عشرَ فنزيده على ثلثي عدد الأموال، فيحصل بهذه الصورة ٣٢١، وهو الجواب الأعظم.

وأمّا الأصغر فنقول أولاً: إن كلّ خطٍّ يُقسم بقسمين، فإنّ ضرْب أحدِ القسمين في الآخر وضرْبَ الحاصل في جميع الخط مُساوٍ لضرب مربع كلّ واحد من القسمين في القسم الآخر.

فليكن جـ ب مقسوماً على د، فأقول: إن ضرْب جـ د في د ب، ثم المبلغ في جـ ب مساوٍ لضرب مربع جـ د في د ب، مع ضرب مربع د ب في د جـ. لأن جـ د في د ب ثم في جـ ب مساوٍ لضرب جـ ب في جـ د ثم في د ب، وإذا ضُرب جـ ب في جـ د، ثم في د ب حصل ضرْب كلّ واحدٍ من قسمي المسطّح في د ب، وأحدُ قسميه مربعُ جـ د وقسْمُه الآخر مسطّح جـ د في د ب. لكن مسطّح جـ د في د ب إذا ضُرب في د ب يكون مساوياً لضرْب مربع ب د في جـ د. وقد كان أحدُ قسمي المسطّح الكبير مربعَ جـ د، وقد حصل ضربه في د ب؛ فقد انحلّ مسطّح جـ ب [في جـ د] في ب د إلى مربع جـ د في د ب وإلى مربع ب د في جـ د.

ج د ب

وأقول أيضا: إن ا ب إذا كان مقسوماً على جـ، وجـ ب ثلثاه، وا جـ ثلثه، ثم قسم على نقطة د التي هي على خط ب جـ الثلثين؛ / فمربع جـ ب ل - ١٠٧ - و

1 فيبقى: فبقى [ب، ل] – 3 عددا: ناقصة [ل]

في ا جـ – وهو المجسّم الأول – مساوٍ لمربع ب د في د ا، وهو المجسّم الثاني، مع مربع جـ د في ا جـ، وفي د ب وهو المجسّم الثالث.

لأن المجسّم الأول ينقسم إلى أربعة أقسام، لانقسام مربع جـ ب إلى مربعِ ب د، ومربعِ جـ د، وضربِ ب د في جـ د مرتين؛ والمجسّم الثاني ينقسم إلى قسمين، وهما: ضرب مربع ب د في ا جـ، وضربُه في د جـ؛ والمجسّم الثالث قسمان، هما: مربع جـ د في ا جـ، ومربع جـ د في د ب – لكن مربع ب د في ا جـ مشتركٌ بين المجسّم الأول والثاني، ومربع جـ د في ا جـ مشترك بين المجسّم الأول والثالث؛ فالذي يخصّ المجسّم الأوّل ضربُ ضعفِ ب د في د جـ ثم في ا جـ، وذلك مثل ضعف ا جـ في د جـ ثم في د ب. لكن ضعف ا جـ هو جـ ب؛ فالذي يخصّ المجسّم الأول ضربُ جـ ب في جـ د ثم في د ب، وهو مثل ضرب جـ د في د ب ثم في جـ ب. والذي يخصّ المجسّم الثاني هو مربع ب د في د جـ؛ والذي يخصّ المجسّم الثالث هو مربع جـ د في د ب. وقد تبيّن أن مربع كلّ واحد من القسمين إذا ضرب في الآخر يكون مجموعها مساوياً لضرب أحد القسمين في الآخر، ثم ضربِ المبلغ في جملة الخط. فما يخصّ المجسّم الأول مساوٍ لما يخصّ / مجموع المجسّمين؛ فالمجموع الأول مساوٍ لمجموعي ل – ١٠٧ – ظ المجسّمين. فقد تبيّن أنا إذا نقصنا من المجسّم الأول أحدَ المجسّمين يكون الباقي مثلَ المجسّم الآخر. فإذا كان المجسّم الثاني مثلَ نصف المجسّم الأول؛ فيكون المجسّم الثالث مثلَ نصفه أيضاً، ويكونُ كلا المجسّمين متساويين، فيكون ب د مثل جـ د، فيكون كلّ واحدٍ منهما ثلثَ ا ب. وإن كان المجسّم الثاني أعظمَ من نصف المجسّم الأول، فيكون ب د أعظمَ من نصف ب جـ، فيكون أعظم من جـ د، فيكون ب د أكبرَ من ثلث

11 في جـ د: ناقصة [ل] – 16 لمجموعي: مطموس بعضها [ب]، لمجموعين [ل]

ا ب. وإن كان المجسّم الثاني أقلّ من نصف المجسّم الأول، فيكون ب د أقلّ من ثلث ا ب، لما مرّ آنفاً.

ا ج د ب

فأقول أيضاً: إن عدد الأموال – وهو ا ب – إذا قسم على ج وب ج ثلثاه وا ج ثلثه، وب د هو المطلوب الأصغر الذي مربعه في ا د مثل العدد؛ فإن مكعب ج د مع عدد التفاوت بين المجسّم الأول والعدد المسؤول يعدل ضرب مربّع ج د في ا ب. لأن المجسم الثاني – وهو مربع ب د في د ا – إذا جمع مع / فضل المجسّم الأول على العدد المسؤول ب - ٩ - و يصير مساوياً للمجسّم الأول. وقد بيّنا أن مربع ج د إذا ضرب في د ب وفي ج ا – وهو المجسّم الثالث – وجمع مع المجسّم الثاني يصير مساوياً للمجسّم الأول. وقد علمنا / أن عدد التفاوت بين المجسّم الأول وبين ل - ١٠٨ - و العدد المسؤول مساوٍ للمجسّم الثالث. فنجعل ج د شيئاً، ومربعَه مالاً. فمجموع ا ج د ب عددُ الأموال إلّا شيئاً. فضرْب مربعه فيه أموالٌ بعدّة الأموال المسؤولة إلّا كعباً يعدل عدد التفاوت. فبعد الجبر يصير أموالاً بعدة الأموال المسؤولة، يعدل عدد التفاوت وكعباً. فكعب ج د مع عدد التفاوت بين المجسّم الأول والعدد المسؤول يعدل ضرب مربع ج د في ا ب.

ا ج د ب

وأقول أيضاً: إن مكعب ب د مع العدد المسؤول يعدل ضرب مربع ب د في ا ب عدد الأموال، لأن مربع ب د في ا ب يعدل ضرب

12 شيئا: شي [ب، ل] – 13 كعباً: كعب [ب، ل] / يعدل: فوق السطر [ب]

مربع ب د في ب د، وهو مكعب ب د مع ضرب مربع ب د في ا د الذي هو مثل العدد.

وإذا عرفت هذا فنقول: العدد المسؤول [عنه] إن لم يكن أكبر من نصف العدد الأعظم فنضعه على التخت ونضع عدد الأموال على وضع المقسوم عليه.

مثاله: مكعبٌ وعدد بهذه الصورة ٦٦١٥٢٣٢٢ يعدل تسعمائةٍ وثلاثةً وستين مالاً. فالعدد الأعظم بهذه الصورة ١٣٢٣٠٤٦٤٤ والعدد الذي في المسألة ليس أكبر من نصفه، فنضعه على التخت ونضع عدد الأموال على رسم وضع المقسوم عليه، فيكون / بهذه الصورة ٦٦١٥٢٣٢٢ ٩٦٣، ونعرف مكان ل – ١٠٨ – ظ مطلوب القسمة، ونعدّ الجذور من الآحاد إلى مرتبته، ونعدّ الكعاب من الآحاد بتلك العدّة، فالكعب الذي انتهى إليه هو مكان المطلوب. ونعرف المرتبة السميّة له وننظر إلى آخر مراتب عدد الأموال. فإن كانت منحطة عن المرتبة السميّة له فننقله إلى المرتبة المنحطة عن مكان المطلوب بقدر انحطاطه عن المرتبة السميّة له، وإن كانت أرفع فننقله إلى المرتبة المرفوعة عنه بقدر ارتفاعه عن المرتبة السميّة له، وإن كانت مساوية فننقله إلى مرتبة المطلوب كما في المثال؛ فإنّ مكان مطلوبِ القسمة هو عشرات الألوف، ومن الآحاد إلى مرتبته ثلاثةُ جذور، فعددنا من مرتبة الآحاد ثلاثة كعاب، فهناك مكان المطلوب. والمرتبة السميّة للكعب الثالث هي المئات، وآخر مراتب عدد الأموال المئاتُ أيضا. فوضعنا آخر عدد الأموال مقابل الكعب الثالث، ثم نطلب أكثر عدد ننقصه من آخر عدد الأموال ونضربه

9 رسم: مد ناسخ [ب] حرف الراء فنقله ناسخ [ل]، ألفاً وكتب «اسم» – 14 وإن كانت: وإن كان [ب، ل] – 15 كانت مساوية: كان مساويا [ب، ل] – 18 هي: هو [ب، ل] – 20 أكثر: أي أقل عدد يكون مربعه أكبر من آخر أعداد حاصل قسمة العدد المسؤول على عدد الأموال

في الباقي من عدد الأموال، ونضع المبلغ في سطرٍ أوسطَ، ثم نضربه في الأوسط وننقصه من العدد، وذلك هو الثلاثة، فوضعناها مكان الصفر الثالث ونقصناه من آخر عدد الأموال / وضربناه في بقية عدد الأموال ل - ١٠٩ - و ووضعنا المبلغ في سطرٍ أوسط، يحصل بهذه الصورة ٦٦١٥٢٣٢٢ ١٩٨٩ ٦٦٣، وضربناه ‹ في الأوسط ونقصنا الحاصل من العدد › فحصل بهذه الصورة ٦٤٨٢٣٢٢ ١٩٨٩ ٦٦٣. ثم ننقص المطلوب من آخر عدد الأموال كرّةً أخرى، ونضربه في الباقي، ونزيد المبلغ على الأوسط؛ وننقص المطلوب كرّةً ثالثة من آخر عدد الأموال. وننقل المطلوبَ وبقيّة عدد الأموال بمرتبتين، والأوسط بمرتبةٍ، ونضع المطلوب الثاني، وهو اثنان في المثال، وننقصه من آخر بقية عدد الأموال، ونضربه في الباقي، ونزيد المبلغ على الأوسط ونضربه في الأوسط وننقص المبلغ من العدد، ثم ننقص المطلوب الثاني من آخر بقية عدد الأموال كرّةً أخرى، ونضربه في الباقي ونزيد المبلغ على الأوسط، وننقص المطلوب الثاني من آخر عدد الأموال كرةً ثالثة، وننقل المطلوب الثاني وبقيةَ عدد الأموال بمرتبتين، والأوسط بمرتبة، ونضع المطلوب الثالث وهو الواحد، ونعمل به العمل المذكور، فيرتفع العدد ويحصل السطر الأعلى بهذه الصورة ٣٢١ / وهو الجذر المطلوب. ل - ١٠٩ - ظ

وقد ظهر من هذا المثال أن العدد المسؤول إن كان مثلَ نصف العدد الأعظم كان الجذر المطلوب ثلث عدد الأموال، لأن العدد المسؤول في المثال كان مساوياً لنصف العدد الأعظم، وقد خرج الجذر المطلوب ثلثَ عدد الأموال.

1 الباقي: الثاني [ب، ل] – 4 وضربناه: وضربنا [ب، ل] – 6 الباقي: الثاني [ب، ل]

وإن كان أكثر فيُنقص العدد المسؤول من العدد الأعظم، فما بقي فهو عدد التفاوت، فنضعه على التخت ونعمل به العمل المذكور، فما خرج نقصه من ثلثي عدد الأموال، فما بقي فهو الجذر المطلوب.

وأما بيان جهة العمل فيما إذا كان المسؤول أقلّ من نصف العدد الأعظم، فهو أنّا إذا وضعنا العدد، وهو مربع ب د في ا د، ووضعنا عدد الأموال وهو ا ب، فلو كان ا د معلوماً، وقسمنا العدد على ا د كان الخارج من القسمة هو مربع ب د. لكن المعلوم ا ب لا ا د. فإذا استخرجنا مطلوب القسمة على ا ب فقد يكون أقل من قسمته على ا د، وقد يكون موافقاً بحيث لايقع فيه تفاوت، بل التفاوت إنما يقع في سائر / المطالب؛ فيكون المطلوب الأول بهذه القسمة هو الحقيقيُّ أو قريبٌ منه ب - ٩ - ظ وأقلُّ منه، فهو من مرتبة آخرِ مربع ب د بالتقريب. و ‹ مربع › المطلوب إنما هو من ضربِ آخر جذرِ مربعِ ب د في نفسه، فالمرتبة السميّة لجذره / تكون مرتبةَ آخر ب د بالتقريب، ومكعبُه يقع في مرتبة الكعب السميّ ل - ١١٠ - و لتلك المرتبة. وليكن المطلوب الذي يخرج لنا وهو الذي أمكن نقصانه من عدد الأموال، ثم ضرْبُه في باقي عدد الأموال، ونقصانُه من العدد، هو ب ه، فيكون مكعبه في المرتبة التي وضعناه فيها، أعني مقابل الكعب السميّ له. فعلى الشرط الذي نقلنا ‹ به › صورَ عدد الأموال يكون الصورةُ التي تقع في مرتبة هذا المطلوب، أعني مقابل هذا الكعب، إنما هي من مرتبته الحقيقية؛ وضرْبُ مربع هذا المطلوب في كل واحدٍ من صور

4 العدد: كان عليه أن يقول «كان العدد المسؤول ليس بأكبر من نصف العدد الأعظم» – 8 استخرجنا: استحصنا [ل] – 10 بهذه: لهذه [ب، ل] – 11 وأقل: أو أقل [ب، ل] / فهو: المقصود مربع المطلوب الأول – 19 هي: هو [ب، ل]

عدد الأموال يكون واقعاً في كلّ واحدة من المراتب التي حصلت فيها الصور بالانتقال، حتى لو ضُرب مربعه في كلّ واحد من الصور ونقص من العدد الحاصل في مراتبها، يكون النقصان بحسب الواجب. وإذا نقصنا هذا المطلوب من الصورة التي في مرتبته يكون هذا النقصان بحسب الواجب. ولأنا إذا نقصنا المطلوب وهو ب هـ من ا ب، وهو عدد الأموال، بقي ا هـ؛ ونريد أن نضرب مربع ب هـ في ا هـ وننقص المبلغ من العدد، لأن العدد حاصل من ضرب مربع المطلوب الحقيقي، أعني ب د، في فضل عدد الأموال عليه، أعني / في ا د. لكن ب د ا د ل – ١١٠ – ظ مجهولان، وب هـ ا هـ صارا معلومين. فإذا ضربنا ب هـ في ا هـ، ثم ضربنا ب هـ في الحاصل، فكأنا ضربنا مربع ب هـ في ا هـ. فلذلك نضرب ب هـ المطلوبَ في الصور الباقية من عدد الأموال، وهي ا هـ، ونضعها مسطّحاً، ثم نضرب المطلوب في المسطّح، وننقص المبلغ من العدد ليحصل مضروبُ مربع ب هـ في ا هـ، ونقصانُه من العدد. فإذا ضربنا مربع ب هـ، وهو بعض مربع ب د، في ا د، ونقصناه، كان ذلك النقصانُ من جملة الواجب حتى يُضرب الباقي من مربع ب د وفي ا د أيضاً. لكن ب هـ في د هـ هو على خلاف الواجب، فلو حصل لنا د هـ فنحتاج أن نضربه في ب هـ ونزيده على العدد حتى يعود إلى الواجب، وننقص هـ د من ا هـ الباقي، حتى يبقى ا د. فنضرب د هـ في ب هـ مرتين ونزيد عليه مربع د هـ، ونضرب الجميع في ا د لأنه الباقي من مربع ب د في ا د، وننقصه من العدد. وليكن المطلوب الثاني هو د هـ. فلأن المسطّح الحاصل لنا هو من ضرب ب هـ في ا هـ، وهو مركب من ضرب د هـ في

1 واقعا: واقعه [ب، ل] – 2 ونقص: وبقص [ب، ل] – 11 الصور: الصورة [ل] – 15 من (الثانية): في [ب، ل] / وفي: في [ب، ل]

ب ه، ومن ا د في ب ه، فإذا نقصنا ب ه من ا ه كرّةً أخرى، ثم ضربنا ب ه في الباقي، ونقصنا ب ه من ا ه كرّة ثالثة، ثم نقصنا ه د من الباقي، ثم ضربنا / د ه في الباقي، يكون حاصل هذا الضرب هو ل - ١١١ - و ضرب د ه في ا د، وا د في ب ه ود ه في ب ه بنقْصان مربع ب ه، وضرْب د ه في ب ه مرتين؛ لأن ا ه قد نقص منه ب ه مرتين. فإذا زيد على المسطّح يصير حاصل المسطّح هو ضرب د ه في ب ه مرتين، وضرب ا د في ب ه مرّتين، وضرب د ه في ا د، منقوصاً من هذه الخمسةِ مربعُ ب ه، وضرْبُ د ه في ب ه مرتين. لكن ضرب د ه في ب ه مرتين، الذي في الزيادة، يذهب بمثله الذي في النقصان؛ فيكون حاصلُ هذا المسطّح ضربَ ب ه في ا د مرّتين، [وضربَ د ه في ا د مرتين،] وضربَ د ه في ا د بنقْصان مربع ب ه. فإذا ضُرب د ه في هذا المسطّح يكون الحاصل من جهة ضربه في مسطّح د ه في ا د هو مربع د ه في ا د، ومن جهة ضربه في مسطّح ب ه في ا د مرتين يكون مساوياً لضرب د ه في ب ه مرتين، ثم ضرب الحاصل في ا د؛ وهذا المبلغ الذي يحصل يكون مساوياً للعلم الباقي من مربع د ب في ا د منقوصاً منه مضروبُ مربعِ ب ه في د ه لأجل نقصان مربّع ب ه. فإذا نقصناه من العدد – وكأنّا ضربنا مربع ب ه في د ه وزدنا المبلغ / على ل - ١١١ - ظ العدد، ثم ضربنا العلم الباقي من مربع د ب في ا د، ونقصناه من العدد – يكون موافقاً لِما كان ينبغي أن يعمل.

ا د ه ب

ولنفرض أن المطلوب الثاني لم يكن د ه تمامَهُ، بل كان ه ط، فتبيّن من هذا البيان أنّا إذا عملنا على الطريق المذكور، فكأنا ضربْنا مربع ب ه في ه ط، وزدنا المبلغ على العدد، وضربْنا مربع ه ط في ‹ا ط،

وضربنا هـ ط في > هـ ب مرتين، وضربنا المبلغ في ا ط، ونقصنا المبلغ من العدد، فيصير الحاصل من العمل الذي عملْنا على المطلوبين، كأنّا ضربنا مربع ب ط في ا ط، ونقصنا المبلغ من العدد. ويصير المسطّح الحاصل بعد النقل الأخير هو ضرب د ط في ط ب مرتين، وضرب ا د في ط ب مرتين منقوصاً منه مربع ب ط؛ ويصير الباقي من عدد الأموال هو ا ط منقوصاً منه مثلا ط ب، ونبيّن العمل على سائر المطالب بالبيان المذكور.

وأما إذا كان العدد المسؤول أكثر من نصف العدد الأعظم، ومكعب ب د مع العدد المسؤول، الذي هو مثل المجسّم الثاني، يعدل ضربَ مربع ب د في ا ب لما مرّ، فإنْ جعلنا العدد المسؤول عدداً، وجعلنا ا ب عدد الأموال، واستخرجنا المطلوبَ الأصغر بمسألة مكعبٍ وعددٍ يعدل أموالاً، يخرج لنا د جـ ومكعب جـ د مع عدد التفاوت بين المجسّم الأول /–/ والعدد ب – ١٠ – و ل – ١١٢ – و المسؤول يعدل ضرب مربع جـ د في ا ب لما مرّ. فإنْ جعلنا عدد التفاوت بين العدد الأعظم والعددَ المسؤولَ عدداً وعددَ الأموال بعينه ا ب، واستخرجنا المطلوب الأصغر، يخرج لنا جـ د، لكن يجب أن نستعمل عدد التفاوت، لأن الطريق الذي استعملناه في استخراج المطلوب يجب فيه ألّا يكون المطلوب أكثر من ثلث عدد الأموال، ليمكن نقصانُه من عدد الأموال ثلاث مرّات. فإذا كان العدد المسؤول أكثر من نصف العدد الأعظم – وقد بيّنا أن ب د المطلوبَ يكون أكثر من ثلث ا ب – فلا يمكن نقصانه من ا ب ثلاث مرّات، فلذلك نجعل عدد التفاوت عدداً ليصير مطلوبنا الذي نستخرجه جـ د، الذي هو أقلّ من ثلث عدد الأموال، فيمكن نقصانه من عدد الأموال ثلاث مرّات. وإذا استخرجنا جـ د ننقصه من جـ ب ليبقى المطلوب. وذلك ما أردنا بيانه.

4 الأخير: الآخر [ب، ل] – 10 واستخرجنا: واستحصنا [ل] / بمسألة: كتبها ناسخ [ب]، كأنها بمثله، وهكذا نقلها ناسخ [ل] – 11 د جـ: د ب [ب، ل]

ا ج د ط ه ب

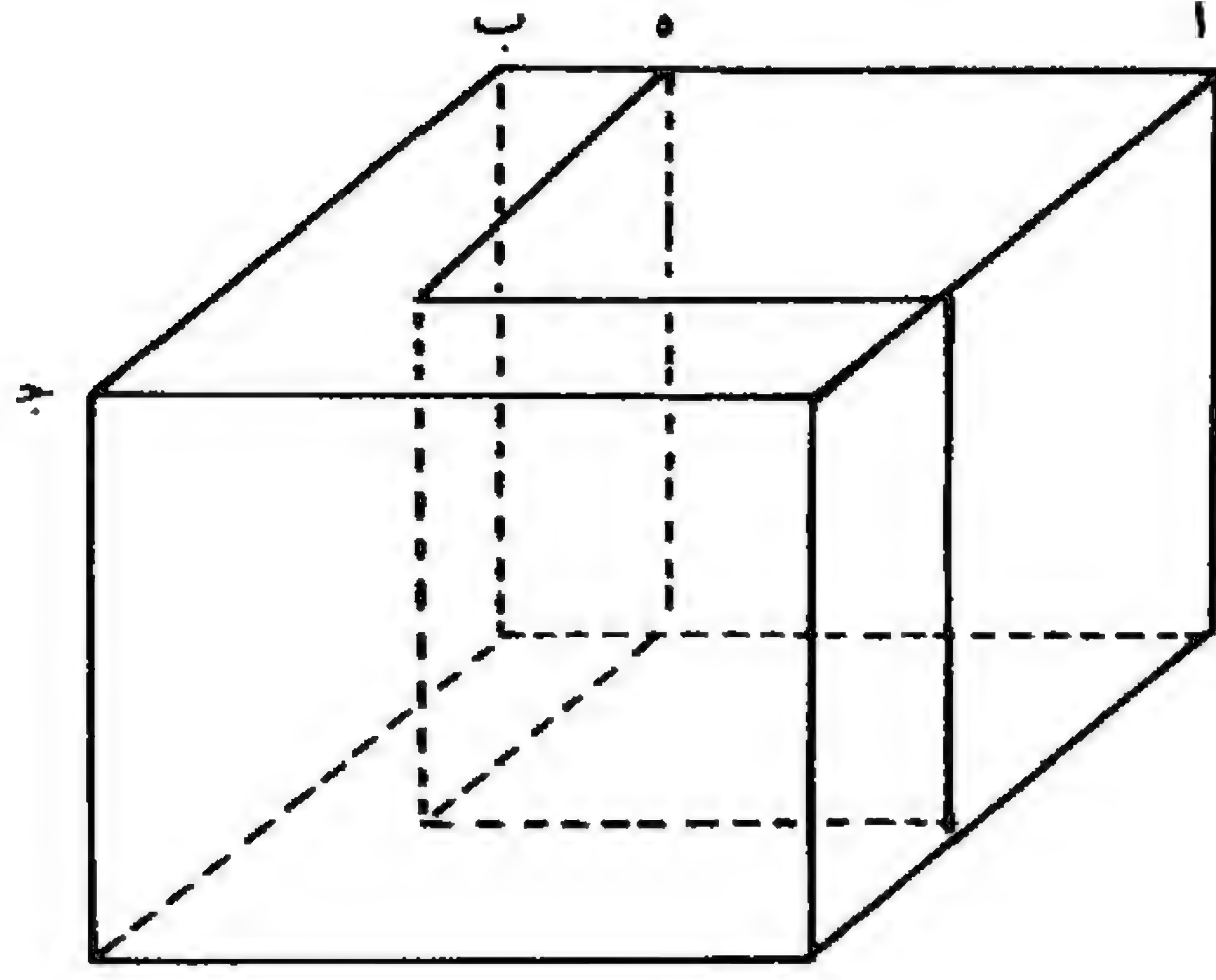
المسألة الثانية: مكعب وعدد يعدل جذوراً.

فلأن الجذر المطلوب إذا ضرب في المال حصل المكعب فقط، وإذا ضُرب في عدد الجذور حصل المكعب والعدد، فعدد الجذور أعظم من المال. وليكن مربع ا ج مساوياً لمربع عدد الجذور / وضلعه ا ب. فلأن المربع أعظم من مال الجذر المطلوب؛ فجذره وهو ا ب أعظم من الجذر المطلوب، وينفصل الجذر المطلوب من ا ب على مثال ا ه. وليفصل من مربع ا ج مربعُ ا ه، وهو مربع ا ز؛ فلأن ا ه هو الجذر المطلوب، ومربع ا ج عدد الجذور؛ فضرب ا ه الجذر في مربع ا ج – وهو مبلغ الجذور المعادل للمُكعب والعدد – هو مجسّمٌ قاعدتُه مربع ا ج وارتفاعه ا ه الجذر. وإذا فصل من هذا المجسّم ضرْبُ مربع ا ه في ا ه الجذر – وهو مكعب ا ه – يبقى مجسَّمٌ قاعدتُه علَم ج ز وارتفاعه ا ه الجذر، مساوياً للعدد، ونسمّيه العلَم المجسّم، فمن ضرورةِ إمكانِ هذه المسألة أن يوجد علم مجسّم يعادل العدد المذكور في السؤال وقاعدته تفضُل من المربع المساوي لعدد الجذور بعد حذف مربع الجذر المطلوب. ولنطلب أعظمَ العلَم المجسّم الذي يمكن أن يوجد في هذه المسألة حتى لو كان العدد المسؤول أعظم منه لم يمكن أن يوجد العلَمُ المجسّم على الشرط المذكور، فتستحيل المسألة. فنعمل مربعاً مساوياً لثلث مربع ا ب وليكن مربع ا ز، وضلعه ا ه، فأقول: / إن العلَم المجسّم – الذي يكون من ضرب

ل – ١١٢ – ظ
ل – ١١٣ – و

1 المسألة الثانية: ناقصة [ل] – 2 حصل: كتب ناسخ [ب]، بعدها كلمة «المطلوب» ثم حذفها – 4 لمربع: لسطح [ب، ل] – 8 وهو: هو [ب، ل] – 13 تفضُل: ىفصل [ب]، ينفصل [ل] – 18 وضلعه: في الهامش [ب]، ناقصة [ل]

العلَم المسطّح الباقي، وهو علم جـ ز في ضلع ا هـ، ونسمّيه المجسّم الأول – أعظمُ العلم المجسّم الذي يمكن أن يوجد هاهنا.

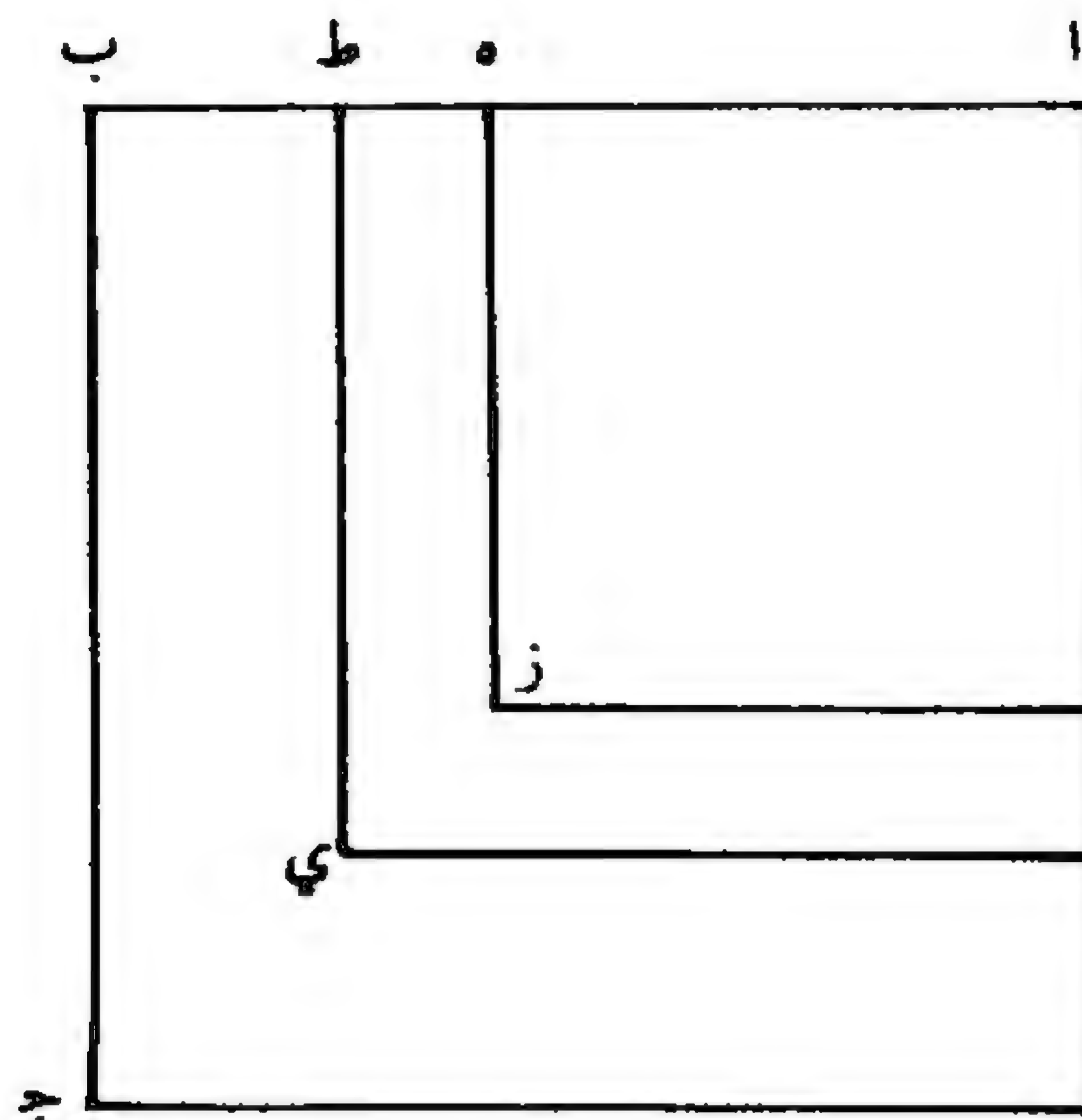


فليكن ا ط أعظمَ من ا هـ ومربعه ا ي. فأقول: إن المجسّم الأول أعظمُ من المجسّم الحاصل من ضرب علم جـ ي في ا ط ونسميه المجسّم الثاني.

لأن المجسّم الأول ينقسم إلى ضرب علم جـ ي في ا هـ، وإلى ضرب علم ي ز في ا هـ، والمجسّم الثاني ينقسم إلى ضرب علم جـ ي في ا هـ، وإلى ضرب علم جـ ي في هـ ط، فإذا ألقينا ضرب علم جـ ي في ا هـ بقي من المجسّم الأول ضربُ علمِ ي ز في ا هـ، ومن المجسّم الثانى ضرب علم جـ ي في هـ ط. ولأن مربع ا ز ثلثُ مربع ا جـ، فعلم جـ ز ضعفُ مربعِ ا ز؛ والعلم ‹جـ ز› من ضرب ب ا ا هـ في ب هـ؛ وضعف مربع ا هـ من ضرب ضعف ا هـ في ا هـ، فضربُ ضعف ا هـ في ا هـ مثلُ ضرب ب ا ا هـ في ب هـ. ولأن ضرب ط ا ا هـ ‹في ا هـ› مثلُ ضرب ط هـ مع ضعف ا هـ في ا هـ؛ فهو أعظم من ضعف مربع ا هـ، وضرب

1 وهو: هو [ب، ل] – 2 أعظم ... يمكن: كذا، والصواب: «أعظم الأعلام المجسمة التي يمكن ...» أو «أعظم علمٍ مجسّم يمكن ...» – 3 ا ط: ا هـ [ب، ل] – 14 وضرب: مكانها متآكل في [ب]

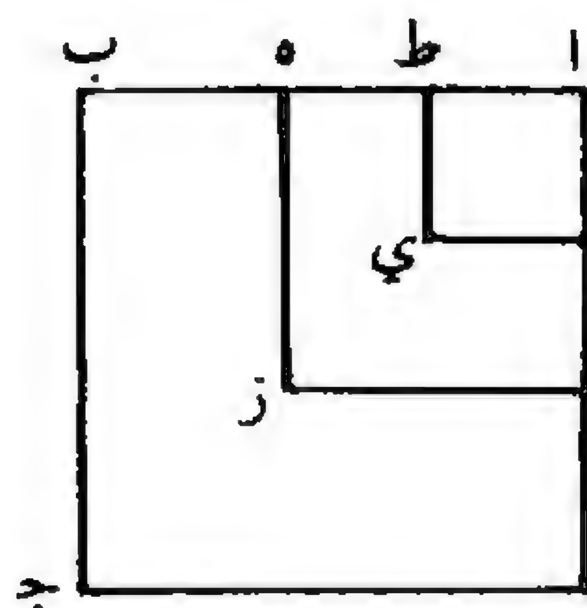
ب ا ا ط في ب ط، أعني علم ج ي، أصغر من ضعف مربع ا ه؛ لكونه أصغر من علَم ج ز المساوي لضعف مربع ا ه. فضرب ب ا ا ط في ب ط أصغر من ضرب ط ا ا ه ‹في ا ه›؛ فنسبة ب ا ا ط إلى ا ط ا ه أصغر من نسبة ا ه إلى ب ط. فإذا جعلنا نسبة ب ط / إلى ل - ١١٣ - ظ ط ه مشتركةً، فيكون النسبةُ المؤلفة من نسبة ب ا ا ط إلى ط ا ا ه [في ط ا] ومن نسبة ب ط إلى ط ه، وهي نسبة علَم ج ي إلى علَم ي ز، أصغر من النسبة المؤلفة من نسبة ا ه إلى ب ط، ومن نسبة ب ط إلى ط ه، وهي نسبة ا ه إلى ط ه. فنسبة علم ج ي إلى ‹علم› ي ز أصغر من نسبة ا ه إلى ه ط. فضرْب علَم ج ي في ه ط أصغر من ضرب علَم ي ز في ا ه. فإذا جمع علم ج ي في ا ه مع كل واحدٍ منهما، حصل من مجموع ضرب علم ج ي في ا ه مع ضرب علم ج ي في ه ط الأصغر علَم ج ي في ا ط وهو المجسّم الثانى، وحصل من ‹مجموع› ضرب علَم ج ي في ا ه، مع ضرب علم ي ز في ا ه الأعظم، ضربُ علَم ج ز في ا ه وهو المجسّم الأول. فالمجسَّم الأول أعظم من الثاني.



10 علم (الثاني): ناقصة [ل] – 11-12 في ه ط الأصغر... ج ي: أعادها ناسخ [ب]، ثم تنبه فحذفها.

وليكن أيضاً ا ط أصغرَ من ا ه، فأقول: إن ضرب علَم جـ ز في ا ه، وهو المجسّم الأول، أعظمُ من ضرب علم جـ ي / في ا ط، وهو ب - ١٠ - ظ المجسّم الثاني.

لأن ضرب ب ا ا ه في ب ه، علَم جـ ز، أعني ضعف مربع ا ه، وضربُ ه ا ا ط في ا ط مثلُ ضعف مربع ا ط مع ضرب ه ط في ط ا، فهو أقل من ضعف مربع ا ه، فضرب ب ا ا ه في ب ه أعظم من ضرب ه ا ا ط في ا ط. فنسبة ب ا ا ه إلى ه ا ا ط أعظم من نسبة ا ط إلى ب ه. فإذا جعلنا نسبة ب ه إلى ه ط مشتركةً، يكون النسبة المؤلفة / من نسبة ب ا ا ه إلى ه ا ا ط ومن ل - ١١٤ - و نسبة ب ه إلى ه ط – وهي نسبةُ علَم جـ ز إلى علَم ي ز – أعظمَ من النسبة المؤلفة من نسبة ا ط إلى ب ه، ومن نسبة ب ه إلى ه ط وهي نسبة ا ط إلى ط ه. فنسبة علَم جـ ز إلى ز ي أعظم من نسبة ا ط إلى ط ه. فضرب علَم جـ ز في ه ط أعظم من ضرب علَم ز ي في ا ط. فإذا جعلنا ضرب علَم جـ ز في ا ط مشتركاً، يكون مجموعُ علم جـ ز في ه ط، وهو الأعظم، مع ضرْب علم جـ ز في ا ط، أعني المجسّم الأول، أعظمَ من مجموع ضرب علم ز ي في ا ط، وهو الأصغر، مع علم جـ ز في ا ط المشترك، وكلاهما مثل علم جـ ي في ا ط، وهو المجسّم الثاني؛ فالمجسّم الأول أعظم من المجسّم الثاني.



5 ضرب: ناقصة [ل] – 9 نسبة: كتبت في التعقيبة [ل]، وسها الناسخ عن كتابتها في أول الصفحة التالية – 11 ا ط: ا ه [ب، ل] – 15 ا ط: ا ه [ب، ل]

فقد تبيّن أن المجسّم الأول هو أعظم علمٍ مجسّمٍ يمكن أن يوجد في هذه المسألة.

فإن كان العددُ أكثر منه فلا يمكن أن يوجد علَمٌ مجسّم يساوي العدد، فالمسألة مستحيلة. فقد تبيّن أنه إذا ضرب ثلثا عدد الجذور – وهو علم ج ز – في جذرِ ثلثِه وهو ا هـ: فإن كان الحاصل أقلّ من العدد فالمسألة مستحيلة. وإن كان مساوياً له فيكون الجذر المطلوب هو ا هـ، وهو جذر ثلث عدد الجذور، لأنه إذا جُعل جذراً وضُرب في مربع ا ج حصل / مبلغ الجذور المذكورة في السؤال، وهو مجسّمٌ قاعدته مربع ا ج، ل - ١١٤ - ظ وارتفاعُه ا هـ. فإذا نقص من هذا المجسّم مكعبُ ا هـ، يبقى العلَم المجسّم المعادل للعدد المسؤول. ولايكون للمسألة إلّا مطلوبٌ واحد، أعني الذي يكون العدد المسؤول فيه معادلاً للمجسّم الأول. لأنّا لو فرضنا جذراً آخر، يلزم أن يكون العلَمُ المجسّم مثلَ العدد، فيكون مثلَ المجسّم الأول، وقد تبيّن استحالته. وإن كان العدد المسؤول عنه أقلّ من المجسّم الأول، فيكون للمسألة مطلوبان: أحدهما أصغر من ا هـ والآخر أعظم منه.

أما الأصغر: فليكن مربع ا ج عدد الجذور، وا ب جذره، ومربع ا ز ثلث مربع ا ج. وليكن ط العدد المسؤول، فالمجسّمُ الأول – وهو ضرب علم ج ز في ا هـ – أعظم من ط، وليكن مساوياً لعدديْ ط ك، ولنجعل ا ح ضعف ا هـ. فـ هـ ح ثلاثة أمثال ا هـ. ونجعل هـ ح عدد الأموال، وكَ عدداً، ونركب سؤالاً على مسألة: مكعب وعدد يعدل أموالاً. وليكن المطلوب – الذي يخرج – خطَّ هـ ل، ويُفصل هـ ي مثل هـ ل، يكون مربع هـ ل في ي ح مثل عدد ك. فأقول: إن هـ ل لابد أن يكون أصغر من ا هـ، وإن ا ي هو مطلوبنا في المسألة.

6 له: فوق السطر [ب]

أما أنّ ه ل لابد أن يكون أصغر من ا ه: فلأن مربع ا ه ثلث مربع ا ج، فعلم ج ز ثلثاه، فيكون ضعفَ مربع ا ه. فعلَمُ / ج ز في ا ه – ل - ١١٥ - و وهو المجسم الأول – ضعفُ مكعب ا ه. فلأن ا ح ضعف ا ه، فربع ا ه في ا ح ضعف مكعب ا ه، فهو مثل المجسم الأول. ولأن ضرب ب ه في ا ه مرتين مع مربع ب ه – وهو علم ج ز – ضعفُ مربع ا ه، فيكون ب ه أصغر من ا ه، فيفصل ا م مثل ب ه، فربع ا م مع ضرب ا م في ضعف ا ه، مثل ضعف مربع ا ه، وضرب ه م في ضعف ا ه مع ضرب ا م في ضعف ا ه مثل ضعف مربع ا ه. فربع ا م مع ضرب ا م في ضعف ا ه مثلُ ضرب ه م في ضعف ا ه، وا م في ضعف ا ه، فنُسقط ضرب ا م في ضعف ا ه يبق مربع ا م مثل ضرب ه م في ضعف ا ه. فنسبة ه م إلى ا م كنسبة ا م إلى ضعف ا ه، أعني ا ح. فيُجعل ح س مثل ا م، وس ع مثل ه م، فيكون ه ع مثل ا ح. فنسبة س ع إلى س ح كنسبة س ح إلى ع ه. فيُجعل نسبة ع ح ح س إلى ح س مشتركة، فيكون النسبة المؤلفة من نسبة ع ح ح س إلى ح س، ومن نسبة س ع إلى س ح كالنسبة المؤلفة من نسبة ع ح ح س إلى ح س، ومن نسبة س ح إلى ع ه. لكن المؤلفة الأولى هي نسبة ضرب ع ح ح س في ع س، العلم، إلى مربع ح س؛ والمؤلفة الثانية هي كنسبة ع ح ح س / إلى ع ه. فنسبة العلم إلى مربع ل - ١١٥ - ظ ح س كنسبة ع ح ح س إلى ع ه. فضرب العلم في ع ه مثل ضرب مربع ح س في ع ح ح س. فيُجعل مربع ح س في ع ه مشتركاً، فيصير ضرب العلم ومربع ح س في ع ه، أعني مربع ع ح في ع ه، مثل ضرب

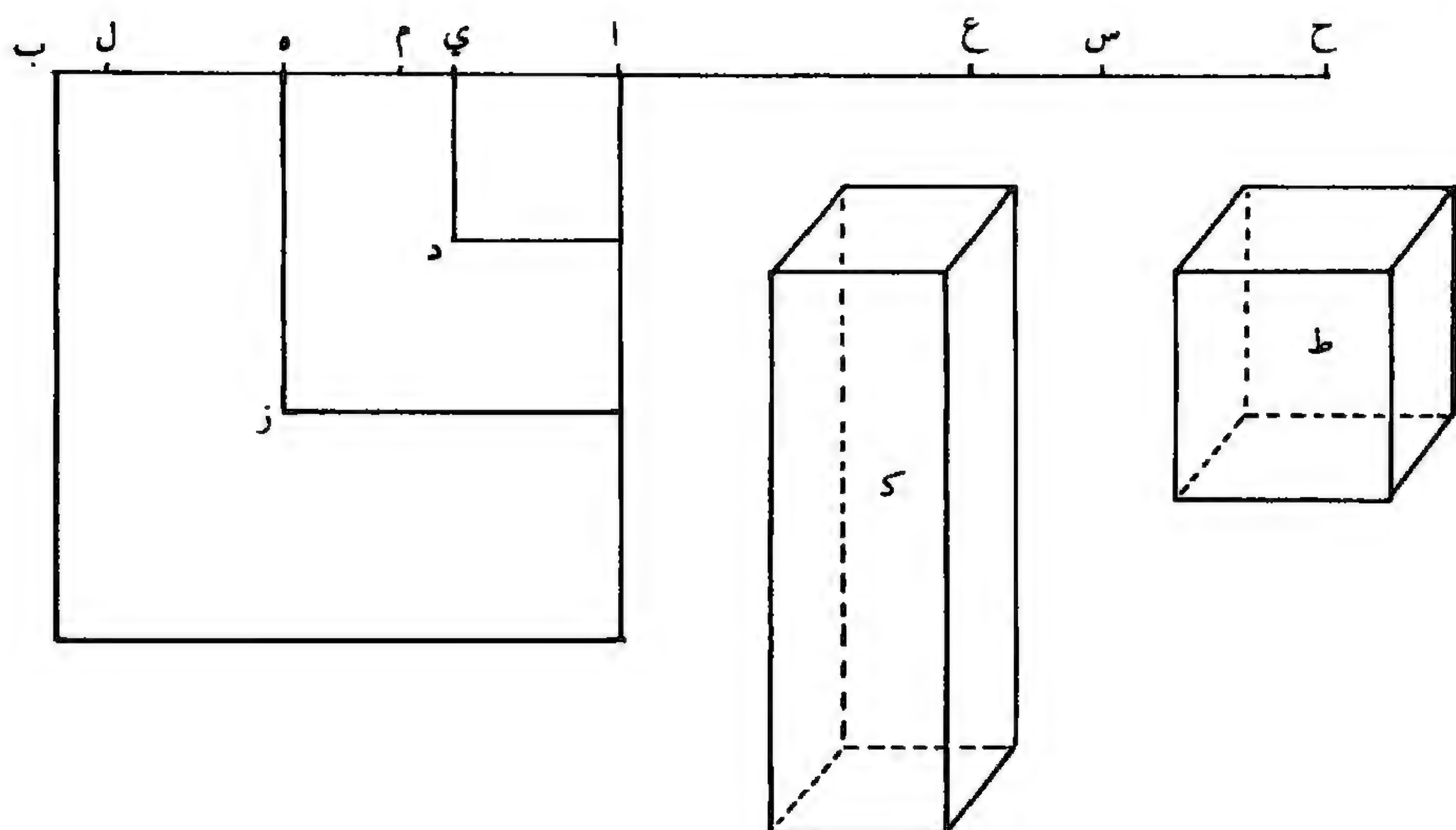
1 لابد أن: لابد وأن [ب، ل] – 12 ه م: ه ي [ب، ل] – 14 إلى ح س: ناقصة [ل] – 17 الأولى: الاول [ب، ل] / مربع: تآكلت الورقة في هذا الموضع [ب]

مربع ح س في ع ح ح س وفي ع هـ، أعني ضرب مربع هـ ب في ب ح. لكن ح ع مثل ا هـ، وع هـ مثل ا ح، فضرب مربع ح ع في هـ ع مثل ضرب مربع ا هـ في ا ح وهو ضعف مكعب ا هـ. فضرب مربع ب هـ في ب ح ضعف مكعب ا هـ، فيكون مساوياً للمجسم الأول، فيكون أعظم من عدد كـ. لكن مربع هـ ل في ي ح مثلُ عدد كـ، فـ هـ ل أصغر من هـ ب فيكون أصغر من ا هـ، لِما تبيّن أن ب هـ أصغر من ا هـ؛ ويفصل هـ ي / مثل هـ ل، فخطّ ا ي هو مطلوبنا في هذه المسألة. ب - ١١ - و

لأن المجسم الأول ينقسم إلى قسمين: أحدهما علم جـ ز في ا ي، والثاني علم جـ ز في هـ ي، لكن علم جـ ز هوضعف مربع ا هـ، فيكون القسم الثاني هو ضعف مربع ا هـ في هـ ي، وهو ينقسم إلى ضعف علم ز د في هـ ي، وإلى ضعف مربع ا ي في هـ ي. فالمجسم الأول انقسم إلى ثلاثة أقسام. ولأن علم ز د هو من ضرب هـ ي في ا هـ ومن ضرب هـ ي / في ا ي، فضعف هذا العلم هو ضعف ضرب هـ ي في هـ ا، وضعف ضرب هـ ي في ا ي. فإذا ضرب ضعف هذا العلم في هـ ي، يكون المبلغ مساوياً لضرب مربع هـ ي في ضعف ا هـ، وضرب مربع هـ ي في ضعف ا ي؛ فصار المجسّم الأول مساوياً لخمسة أقسام: الأول علم جـ ز في ا ي، والثاني ضعف مربع ا ي في هـ ي، والثالث ضرب مربع هـ ي في ضعف ا هـ، والرابع ضرب مربع هـ ي في ا ي، والخامس مثل الرابع كرّة أخرى. فإذا ركّبنا الثاني، وهو ضرب ضعف مربع ا ي في هـ ي مع الرابع وهو مربع هـ ي في ا ي، يحصل من ذلك علم ز د في ا ي، ل - ١١٦ - و

5 ي ح: هـ ح [ب، ل] – 11 الثاني هو: تآكل موضعها في [ب] – 13 ز د: ممحوة [ب]، هـ د [ل] – 14 وضعف: مكررة [ب]

ونجعله القسم الثاني؛ ويبقى الثالث وهو مربع ه ي في ضعف ا ه، أعني ا ح، والخامس ‹وهو› مربع ه ي في ا ي. ومجموع الثالث والخامس مثل مربع ه ي في ي ح. فنجعل هذا المجموع ثالثاً، فيحصل: أقسام المجسّم الأول ضرب علم ج ز في ا ي، وضرب علم ز د في ا ي، وضرب مربع ه ي في ي ح. لكن مجموع الأول والثاني هو علم ج د في ا ي. فقد تبيّن أن المجسّم الأول مساوٍ لعلم ج د في ا ي، ومربع ه ي في ي ح. وقد كان المجسّم الأول مساوياً لعدديْ ط ك. فعلم ج د / في ا ي، ل - ١١٦ - ظ
ومربع ه ي في ي ح مثل عدديْ ط ك. ومربع ه ي في ي ح مثلُ عدد ك، فيكون علم ج د في ا ي مثلَ عدد ط. فإذا جعلنا ا ي جذراً وضربناه في مربع ا ج، حصل الجذور بالعدّة المسؤولة، وهو مساوٍ لمجسّم قاعدته مربع ا د وارتفاعُه ا ي، وهو مكعب ا ي، ولمجسّم آخر قاعدته علم ج د، وارتفاعه ا ي ‹أعني العدد›، فقد تبيّن أنه مساوٍ للمكعب والعدد.



1 في ضعف: وضعف [ب، ل] – 4 ا ي (الأولى): ا ز [ب، ل] – 5 هو: وهو [ب، ل] – 10 قاعدته: ناقصة [ل] – 12 فقد: وقد [ب، ل]

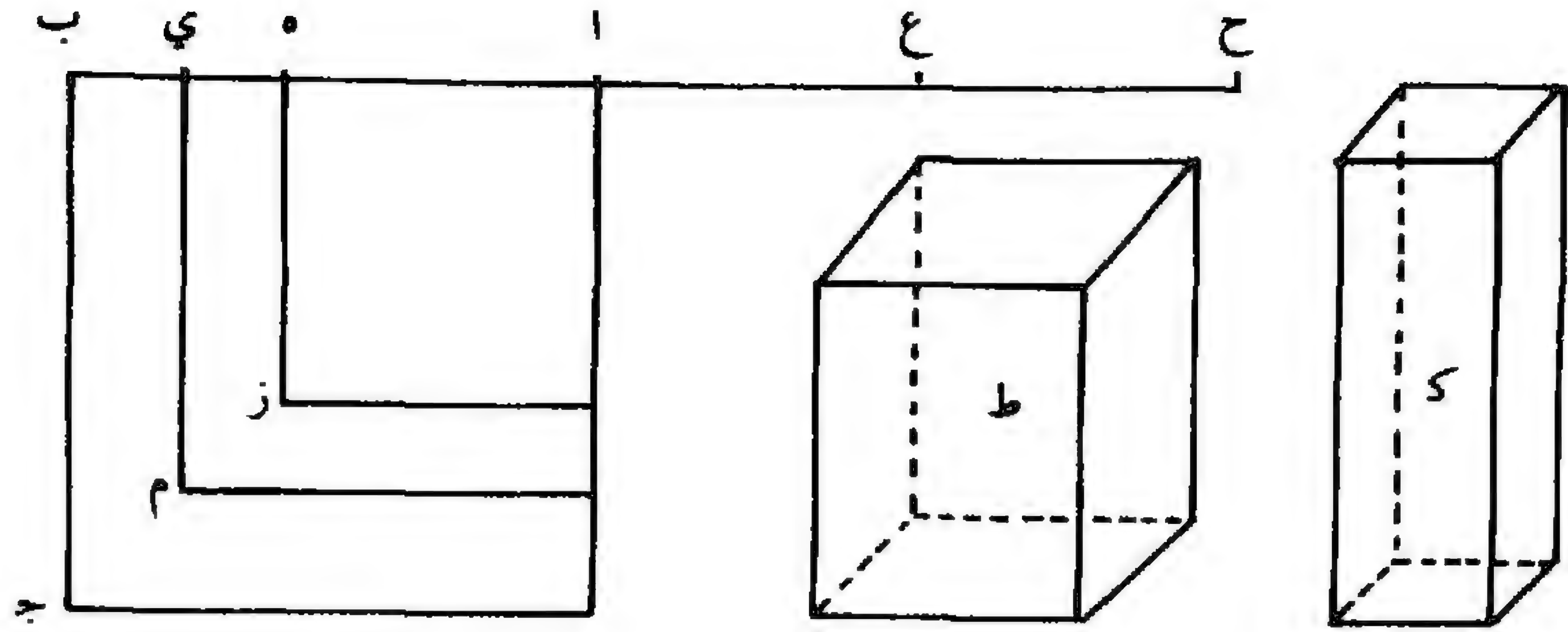
وأما المطلوب الأعظم: فليكن العددُ المسؤولُ عددَ ط، وليكن علم ج ز في ا ه، وهو المجسّم الأول، أعظم من ط. وليكن فضله عليه عدد ك. فيكون مجموع عددي ط ك المجسّمين مثلَ المجسّم الأول. وليكن خط ا ح ضعف ا ه، فخطّ ه ح ثلاثة أمثال ا ه، فنجعل عليه مسألة مُكعب وأموال بعدّة ه ح يعدل عدد ك؛ وليكن الضلع الذي يخرج بتلك المسألة هو خطّ ه ي، حتى يكون ضرب مربع ه ي في ي ح مساوياً لعدد ك. ونبيّن – كما بيّنا – أن ه ي أصغر من ب ه. فأقول: إن ا ي هو المطلوب في هذه المسألة، حتى يكون ضرب علَم ج م في ا ي معادلاً لعدد ط.

لأن المجسّم الأول – وهو علم ج ز في ا ه – ينقسم إلى ضرب علم ج م في ا ه، وإلى علم م ز في ا ه، لكن علم م ز هو ضرب ه ي في ا ه مرّتين ومربعُ ه ي، فعلَمُ م ز في ا ه ينقسم إلى ثلاثة أقسام هي ضرب ي ه في ا ه ‹مرّتين ثم في ا ه›، وهو ضرب ه ي في مربع ا ه، وضربه فيه مرة أخرى /، ومربعُ ي ه في ا ه. فالمجسّم الأول ل – ١١٧ – و
انقسم إلى أربعة أقسام: أولها علم ج م في ا ه، وثانيها وثالثها ضرب ي ه في مربع ا ه مرتين، ورابعها مربع ي ه في ا ه. لكن علم ج ز مثل مربع ا ه مرتين. فضرب ي ه في علم ج ز مثل القسم الثاني والثالث، وعلم ج ز في ي ه ينقسم إلى قسمين: أحدهما علم ج م في ي ه، والآخر علم م ز في ي ه. فالمجسّم الأول أربعة أقسام: أولها علم ج م في ا ه،

5-3 مثل المجسم ... عدد ك: مثبت في الهامش مصححاً [ل] – 12-13 هي ... ا ه: كررها ناسخ [ل] بزيادة «و» قبلها – 15 انقسم: النص متآكل في هذا الموضع [ب] – 19 م ز: ه ز [ب، ل]

والثاني علم جـ م في ي هـ، والثالث علم م ز في ي هـ، والرابع مربع ي هـ في ا هـ. ولأن علم م ز هو ضرب ي هـ في ا هـ مرتين ومربع ي هـ: أما ضرب ي هـ في ا هـ مرتين ثم في ي هـ ‹ فهو › مساو لضعف ضرب ا هـ في مربع ي هـ، وأما ضرب مربع ي هـ في ي هـ فهو مكعب ي هـ، فقد انقسم القسم الثالث إلى ثلاثة أقسام، وهي مربع ي هـ في ا هـ مرتين ومكعب ي هـ؛ فقد صار جميع أقسام المجسّم الأول ستة. وإذا ركّبنا القسم الأول مع الثاني وهما ضرب ‹ علم › جـ م في ا هـ وفي هـ ي، حصل ضرب ‹ علم › جـ م في ا ي. وإذا ركّبنا الأقسام الباقية – وهي ضرب مربع ي هـ في ا هـ ثلاث مرات ومكعب ي هـ – حصل ضرب مربع ي هـ / في ي ح، لأن هـ ح ثلاثةُ أمثال ا هـ. فيكون المجسّم الأول ل – ١١٧ – ظ مساوياً لمجموعِ ضرب علم جـ م في ا ي، ولضربِ مربعِ ي هـ في ي ح. وقد كان المجسّم الأول مساوياً لعدديْ ط ك، فيكون ضرب علم جـ م في ا ي وضرب مربع هـ ي في ي ح مساوياً لعددي ط ك. لكن مربع ي هـ في ي ح مساوٍ لعددِ ك، فيبقى ضرب علم جـ م في ا ي معادلاً / لعدد ط. فإذا جعلنا ا ي ضلعاً ونضربه في مربع ا جـ، حصل منه ب – ١١ – ظ مجسّمٌ قاعدته عدد الجذورِ وارْتفاعه ا ي، وهو مبلغ الجذور المسؤولة؛ وهذا المجسم الثاني – وهو مبلغ الجذور – مساوٍ لمجسّمٍ قاعدتُه مربع ا ي وارتفاعه ا ي، وهو مكعب ا ي، ولمجسّم آخرَ قاعدتُه علم جـ م، وارتفاعه ا ي، وقد تبيّن أنه مثل عدد ط المسؤول. فكعب ا ي مع عدد ط مساوٍ لضربه في عدد الجذور.

4 في ي هـ: مثبت في الهامش مصححاً [ب]، ناقصة [ل] / فهو: هو [ب، ل]



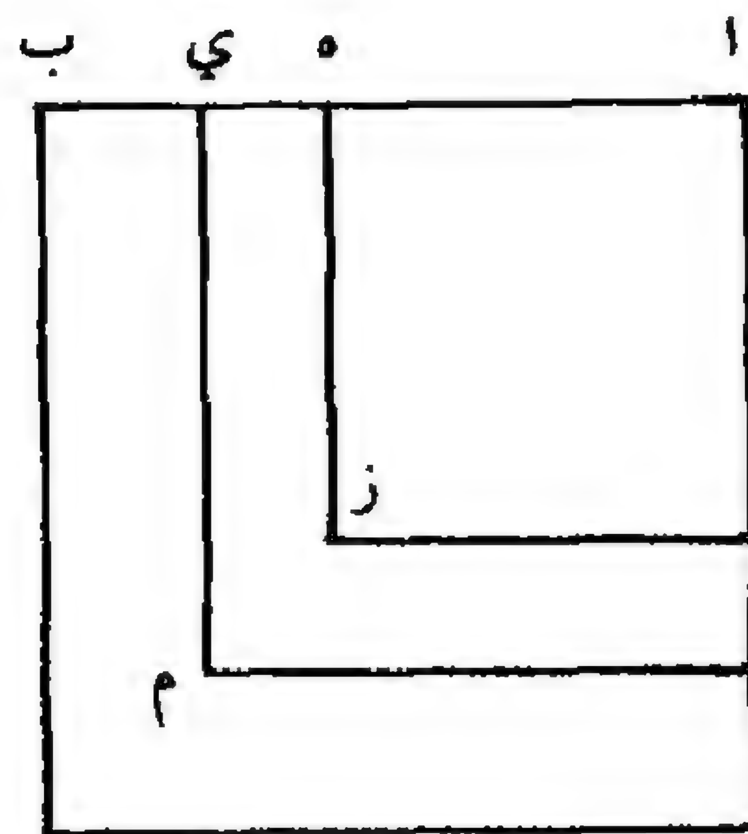
وطريق استخراج المطلوبين - أعني الأعظم والأصغر - باستخراج التفاوت بين المطلوب وبين جذرِ ثلثِ عدد الجذور.

أما استخراج التفاوت بين المطلوب الأعظم وبين جذرِ ثلثِ عدد الجذور: فليكن مربع ا ج عددَ الجذور / وا ه جذرَ ثلثه، وا ي هو ل - ١١٨ - و المطلوبَ الأعظم. فلأن الذي يخصّ المجسّم الأول هو علم م ز في ا ه، والذي يخص المجسّم الثاني هو ضرب علم ج م في ي ه، وفضلَ المجسّم الأول على المجسّم الثاني -الذي هو مثل العدد- فضلُ ما يخص المجسّم الأول على ما يخص المجسّم الثاني، فعدد التفاوت بين المجسّم الأول والعدد المسؤول، إذا جُمع مع المجسم الثاني الذي هو مثل العدد المسؤول، يصير معادلاً للمجسّم الأول. فإذا جُمع ما يخصّ المجسم الثاني يصير معادلاً لما يخص المجسّم الأول. فيُجعل ه ي شيئاً، فالعلم الداخل، وهو من ضرب ي ا ه - أعني ضعف ا ه، وشيئاً - في ي ه، الشيء، يكون أشياء بعدّة ضعفِ ا ه ومالاً. فإذا ضُرب في ا ه ليحصل خاصّةُ المجسّم الأول، فيصير أشياء بعدّة ضعف مربع ا ه، وأموالا بعدّة ا ه. وأما خاصّةُ المجسّم الثاني، فلأن العلم الخارج من ضربِ ب ا ا ي - وهو

2 جذر: فوق السطر [ب] - 3 الأعظم: فوق السطر [ب] - 6-8 المجسم الأول ... مايخص: ناقصة [ل] - 13 ضعف: ممحوة لتآكل موضعها [ب]

مجموع عددي ب ا ا ه وشيءٍ – في ب ي وهو ب ه إلا شيئاً. فضرْب ب ا ا ه في ب ه ثلثا عدد الجذور، وضرب ب ا ا ه في إلا شيئًا: إلا أشياء بعدة ب ا ا ه أعني إلا أشياء بعدّة ب ه وضعف ا ه، وضرب الشيء في ب ه أشياء بعدّة ب ه، وضرب الشيء في إلا شيئاً إلا مالاً، فيكون / مجموع ثلثي عدد الجذور إلا أشياء بعدة ضعف ا ه إلا مالاً. ل – ١١٨ – ظ

فنضربه في ه ي، الشيءِ، ليحصل خاصةُ المجسّم الثاني، فيكون أشياءَ بعدّة ثلثي عدد الجذور إلا أموالاً بعدّة ضعف ا ه إلا كعباً، وهو مع عددِ التفاوت يعدل خاصةَ المجسّم الأول، وهو أشياء بعدّة ثلثي عدد الجذور وأموالٌ بعدّة ا ه. فنزيد المستثنى على الجانبين، فيكون أشياءُ بعدّة ثلثي عدد الجذور وعدد التفاوت تعدل أشياء بعدّة ثلثي عدد الجذور وأموالاً بعدّة ثلاثة أمثال ا ه وكعباً. فنسقط أشياء بعدّة ثلثي عدد الجذور من الجانبين، يبقى عدد التفاوت مُعادلاً لكعب وأموالٍ بعدّة ثلاثة أمثال ا ه. فنجعل عدد التفاوت عدداً وثلاثةَ أمثال جذر ثلث عدد الجذور عددَ الأموال، ونستخرج المطلوب على مسألة: مكعب وأموال يعدل عدداً، فيخرج فضل المطلوب الأعظم على ‹جذر› ثلث عدد الجذور، فنزيده عليه فيحصل المطلوب.



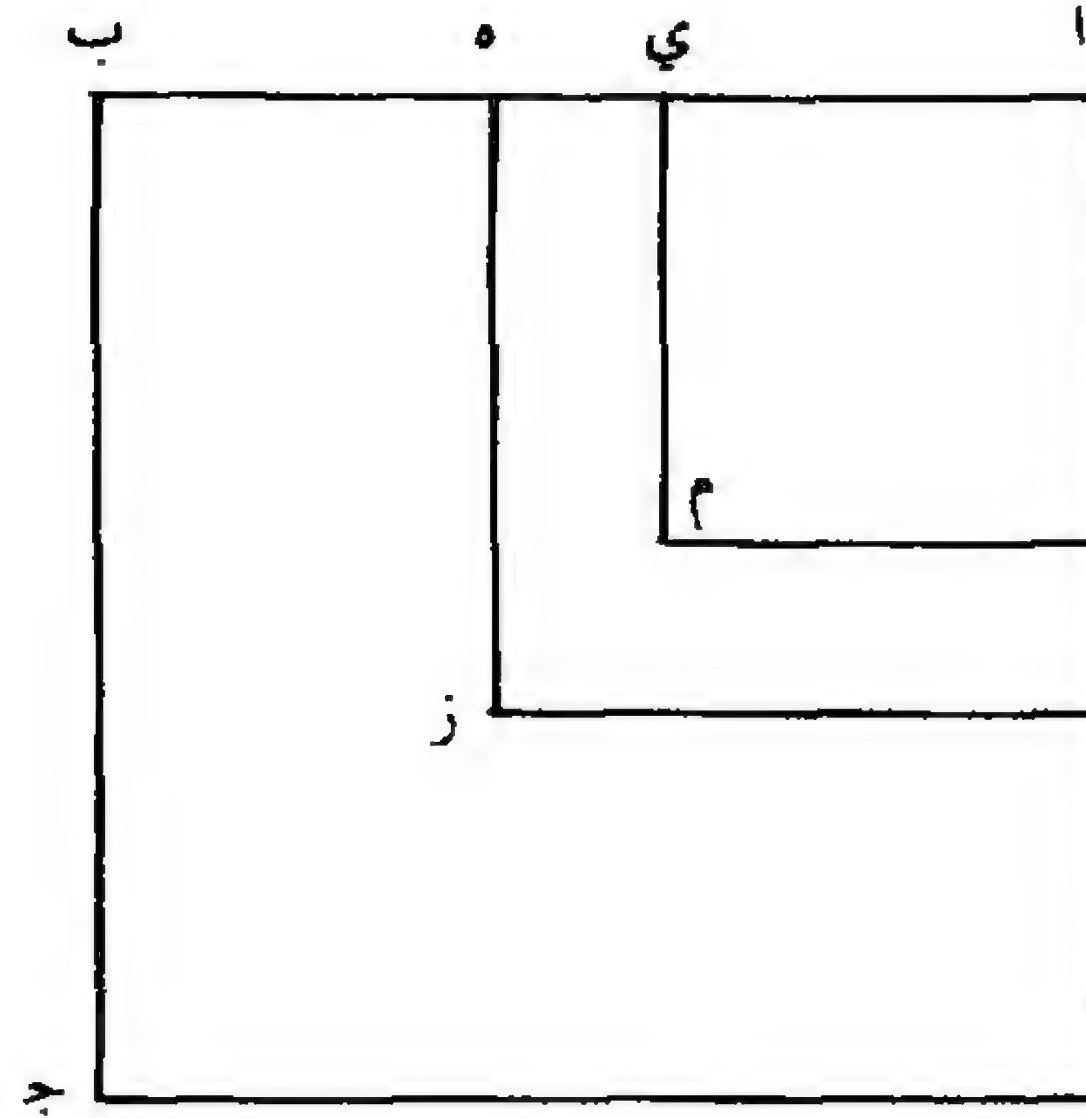
1 فضرب: يضرب [ب، ل] – 2 شيئا: شيء [ب، ل] – 4 شيئا إلا مالاً: شيء إلا مال [ب، ل] – 5 إلا مالاً: وإلا مالاً [ب، ل] – 7 ا ه إلا: ا ه وإلا [ب، ل] – 13 ثلث: ثلثي [ب، ل] – 14 عدداً: تآكل موضع هذه الكلمة وموضع آخر حرفٍ من الكلمة السابقة [ب]

وأما استخراج التفاوت بين المطلوب الأصغر وبين جذر ثلث عدد الجذور: فليكن مربع ا ج مثلَ عدد الجذور، وا ز مثلَ ثلثه، وا ي المطلوب الأصغر. فلأن خاصّةَ المجسّم الأول / هو ضرب علم ج ز في ي ه، وخاصّةَ المجسّم الثاني هو ضربُ علم م ز في ا ي، وفضلَ المجسّم الأول على المجسّم الثاني هو فضلُ خاصّةِ المجسّم الأول على خاصّة المجسّم الثانى، فعدد التفاوت بين المجسّم الأول والعدد المسؤول إذا زيد على خاصّة المجسّم الثاني يصير معادلاً لخاصّة المجسّم الأول. فنجعل ه ي شيئاً، فخاصة المجسّم الأول هو ضرب ثلثيْ عدد الجذور في الشيء، فيكون أشياء بعدّة ثلثي عدد الجذور. وخاصة المجسّم الثاني هو علم م ز في ا ي، وهو من ضرب ا ي ا ه – وهو ضعف ا ه إلا شيئاً – في ي ه الشيء ثم المبلغ في ا ي، وهو ا ه إلا شيئاً، وهو مساوٍ لضرب ضعف ا ه إلا شيئاً في ا ه إلا شيئاً ثم المبلغ في ي ه الشيء. وضرب ضعف ا ه في ا ه ثلثا عدد الجذور، وإلا شيئاً في ا ه: إلا أشياء بعدّة ا ه، وضعف ا ه في إلا شيئاً: إلا أشياء بعدّة ضعف ا ه، وإلا شيئاً في إلا شيئا: مالٌ؛ فالمبلغ مال وثلثا عدد الجذور إلا أشياء بعدّة / ثلاثة أمثال ا ه. فنضربه في الشيء فيحصل كعب وأشياء بعدّة ثلثي عدد الجذور إلا أموالاً بعدّة ثلاثة أمثال ا ه، وهو مع عدد التفاوت يعدل أشياءَ بعدّة ثلثي عدد الجذور. / فنزيد المستثنى على الجانبين فيصير كعباً وأشياءَ بعدّة ثلثي عدد الجذور مع عدد التفاوت يعدل أشياء بعدّة ثلثي عدد الجذور وأموالاً بعدّة ثلاثة أمثال ا ه. فتُسقط الأشياء المشتركة من الجانبين فيبقى: كعبٌ مع عدد التفاوت يعدل ‹ أموالاً بعدّة › ثلاثة أمثال ا ه. فإذا جعلنا عدد

ل – ١١٩ – و
ب – ١٢ – و
ل – ١١٩ – ظ

2 ا ز: ا م [ب، ل] – 3 ج ز: ج م [ب، ل] – 7 لخاصة: يمحي الجزء الأول من الكلمة [ب] – 10 شيئا: شيء [ب، ل] – 11 شيئا: شيء [ب، ل] – 12 شيئا (الأولى والثانية): شيء [ب، ل] – 13 شيئا: شيء [ب، ل] – 14 شيئا (الأولى والثانية): شيء [ب، ل] – 15 شيئاً: شيء – 17 أموالاً: أموال [ب، ل]

التفاوت بين المجسّم الأول المعلوم وبين العدد المسؤول عدداً وثلاثة أمثال جذرِ ثلثِ عدد الجذور عدد الأموال، واستخرجنا المطلوبَ بمسألة: مكعبٌ وعدد يعدل أموالاً؛ فيخرج لنا ي ه الشيء، فننقصه من جذر ثلث عدد الجذور، فما بقي فهو المطلوب الأصغر.



فحاصل الكلام في هذه المسألة أن نأخذ ثلث عدد الجذور ونستخرج جذره ونضربه في ثلثي عدد الجذور، فما حصل فهو العدد الأعظم. فإن كان العدد المذكور في المسألة أكثر من العدد الأعظم فالمسألة مستحيلة. كما إذا قيل: مكعب وعدد بهذه الصورة ٧٥٢٤٨٧٣٢ يعدل جذوراً عددها بهذه الصورة ٣٠٩١٢٣؛ فكان ثلث عدد الجذور ١٠٣٠٤١ وجذر الثلث / بهذه ل – ١٢٠ – و الصورة ٣٢١، مضروبة في الثلثين بهذه الصورة ٦٦١٥٢٣٢٢ وهو العدد الأعظم. والعدد المذكور في السؤال أكثر منه، فالمسألة مستحيلة. وإن كان مثلَ العدد الأعظم فالجذر المطلوب هو ‹ جذر › ثلث عدد الجذور، وإن كان أقلّ منه فله جوابان: أحدهما أن ينقص العدد المسؤول من العدد الأعظم فيكون: مكعب مع أموال عددها ثلاثة أمثال جذرِ ثلثِ عدد

2 عدد الأموال: وعدد الأموال [ب، ل] – 3 جذر: كتبها ناسخ [ب]. كما لو كانت «بدر»، وهكذا نقلها ناسخ [ل]

الجذور يعدل العدد الباقي، ونُخرج الجذر من مسألة: مكعب وأموال يعدل عدداً، ونزيده على جذر ثلث عدد الجذور فما حصل فهو الجذر المطلوب. مثاله: مكعب مع عدد بهذه الصورة ١٣٩٥٧٧٢٢ يعدل جذوراً عددها بهذه الصورة ١٤٦٥٢٣، ثلث عدد الجذور بهذه الصورة ٤٨٨٤١، جذر هذا الثلث بهذه الصورة ٢٢١، مضروبة في ثلثي عدد الجذور بهذه الصورة ٢١٥٨٧٧٢٢ وهو العدد الأعظم؛ الفضل بينه وبين العدد المسؤول بهذه الصورة ٧٦٣٠٠٠٠، ثلاثة أمثال جذر ثلث عدد الجذور بهذه الصورة / ٦٦٣؛ فمكعبٌ مع أموالٍ عددُها بهذه الصورة ٦٦٣ يعدل عدداً بهذه ل - ١٢٠ - ظ الصورة ٧٦٣٠٠٠٠، فيستخرج الجذر بطريق تلك المسألة، فيكون مائة، نزيدها على جذر ثلث عدد الجذور، فيكون بهذه الصورة ٣٢١، وهو الجذر المطلوب. وأما الجواب الآخر فينقص العدد المذكور في المسألة من العدد الأعظم، فيكون: مكعبٌ مع العدد الباقي يعدل أموالاً عددها ثلاثة أمثال جذر ثلث عدد الجذور، فيستخرج الجذر بمسألة: مكعب وعدد يعدل أموالاً، فما خرج ننقصه من جذر ثلث عدد الجذور، فما حصل فهو الجذر المطلوب. مثاله: مكعب وعدد بهذه الصورة ١٣٧٦٠٦٩٢٢ يعدل جذوراً عددها بهذه الصورة ٥٣١٧٢٣، ثلث عدد الجذور بهذه الصورة ١٧٧٢٤١، جذر هذا الثلث بهذه الصورة ٤٢١، مضروب هذا الجذر في ثلثي عدد الجذور بهذه الصورة ١٤٩٢٣٦٩٢٢ وهو العدد الأعظم؛ الفضل بينه وبين العدد المذكور في المسألة بهذه الصورة ١١٦٣٠٠٠٠، / ثلاثة ل - ١٢١ - و أمثال جذر ثلث عدد الجذور بهذه الصورة ١٢٦٣، فيكون مكعباً مع عدد بهذه الصورة ١١٦٣٠٠٠٠ يعدل أموالاً بهذه الصورة ١٢٦٣، فنستخرج الجذر

12 أمثال: محي أولها لتآكل المخطوطة [ب] – 16 ١٣٧٦٠٦٩٢٢: ١٣٥٦٩٢٢ [ب، ل] – 20 بهذه الصورة: أثبت ناسخ [ب] «بهذه» في الهامش مع بيان موضعها / ١٢٦٣: ١٢٦١ [ب، ل] –

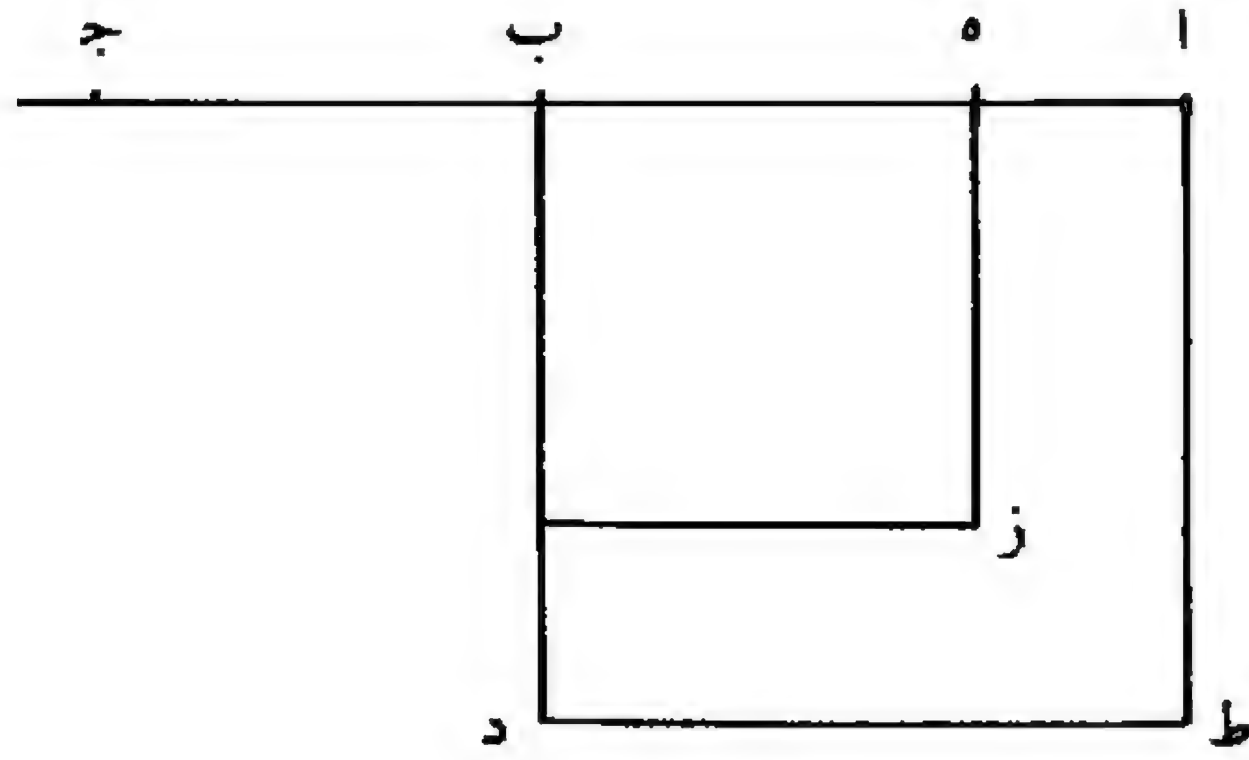
الواحد بمسألة: مكعب وعدد يعدل أموالاً، فيكون مائة، ننقصها من جذر ثلث عدد الجذور، فيبقى ٣٢١ وهو الجذر المطلوب؛ وذلك ما أردنا بيانه.

المسألة الثالثة: مكعب وعدد وأموال يعدل جذوراً.

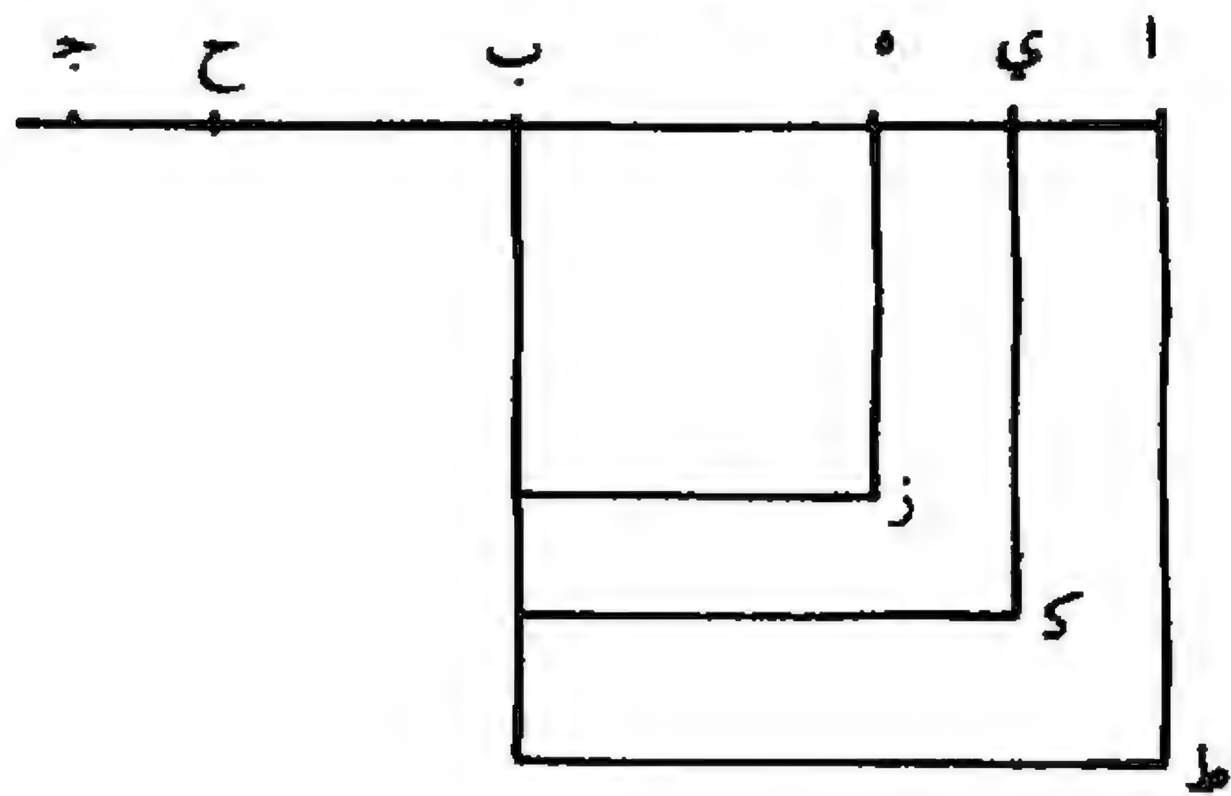
فليكن مربع ا د عددَ الجذور وب ج عدد الأموال. فلأن الجذر المطلوب إذا ضُرب في مربعه حصل المكعب فقط، وإذا ضُرب في عدد الجذور – وهو مربع ا د – حصل مبلغ الجذور، وهو مجسّمٌ قاعدته مربع ا د وارتفاعه بمقدار الجذر المطلوب؛ فيكون أكثرَ من المكعب المذكور بمقدار العدد المذكور في السؤال مع ضرب مال الجذر المطلوب / في ب ج ب – ١٢ – ظ
الذي هو عدد الأموال، فيكون ا ب أعظم من الجذر المطلوب، وينفصل منه الجذر المطلوب على مثال ب ه. فمربع ا د إذا ضرب في ب ه حصل مبلغ الجذور المساوي للمكعب والأموال والعدد، والذي ‹هو› مجسّم ينقسم إلى قسمين لانقسام قاعدته إلى مربع ب ز وإلى العلم. وأحد قسمي ذلك المجسم / هو ضربُ مربعِ ب ز في ب ه، وهو مكعب ب ه، ل – ١٢١ – ظ
فيبقى ضرب العلم في ب ه مساوياً للعدد المسؤول مع مبلغ الأموال، أعني ضرب مربع ب ز في ب ج الذي هو عدد الأموال. فلو كان العدد المسؤول إلى حدّ لا يمكن أن يقسم ا ب قسمةً يكون ‹معها› ضرب أحد القسمين في العلم الباقي من عدد الجذور مساوياً للعدد، مع مربع ذلك القسم في عدد الأموال، كانت المسألة مستحيلة. فليكن ب ج ثلثي عدد الأموال، ونجعل ثلث عدد الجذور عدداً، وهو ثلث مربع ا د، وخط ب ح عدد جذورٍ، ونعمل سؤالاً على مسألة: مال وجذور يعدل عدداً

3 المسألة الثالثة: ناقصة [ل] – 11 والذي: ممحوة لتآكل المخطوطة [ب]، الذي [ل] – 13 في ب ه: ممحوة [ب]، في ا ه [ل]

بعِدّة ثلث مربع ا د، وليكن المطلوب الذي يخرج هو خط ب ه، ونعمل مربع ب ز. فأقول: إن ب ه إذا ضرب في علم ط ز حتى حصل المجسم الأول، ثم نقص من المجسّم الأول ضرْبُ مربع ب ز في ب ج الذي هو ‹ عدد › الأموال حتى بقي العدد، فلا يمكن أن ينقسم ا ب على نقطةٍ أخرى بحيث إذا جُعل أحد قسميه جذراً، وضُرب في مربع ا د، ونقص مكعبه من المجسّم الحاصل، ثم ضُرب مربعه في عدد الأموال، ونقص من الباقي، يبقى العدد مثل الباقي من المجسم الأول أو أكثر بل يبقى أقلّ منه؛ حتى لو كان / العدد المسؤول أكثر من العدد الباقي من المجسم الأول كانت المسألة مستحيلة. ل – ١٢٢ – و



وليكن نقطة ي فيما بين نقطتيْ ا ه، ونضرب ب ي في علم ط ك ليحصل المجسم الثاني، ونضرب ‹ مربع › ب ك في ب ج الذي هو عدد الأموال حتى يحصل مبلغ الأموال وننقصه من المجسم الثاني ليبقى العدد. فأقول: إن هذا العدد يكون أقلّ من العدد الذي بقي من المجسم الأول.



7 مثل: مع [ب، ل]

لأن المجسّم الأول ينقسم إلى ضرب كل واحد من العلمين في ب ه والمجسم الثاني ينقسم إلى ضرب العلم الخارج في ب ه وفي ي ه، فضرْب العلم الخارج في ب ه مشترك؛ فيخص المجسمَ الأولَ ضربُ العلم الداخل في ب ه ويخصّ المجسمَ الثانيَ ضربُ العلم الخارج في ي ه. ولأنا ننقص من المجسم الأول ضرب مربع ب ز في ب ج، حتى يبقى العدد، ومن المجسم الثاني ضرب مربع ك ب في ب ج ليبقى العدد، والذي ننقصه من المجسم الثاني أكثر مما ننقصه من المجسّم الأول بمقدار ضرْب العلم الداخل في ب ج، فلأنا لو نقصنا من كل واحدٍ من المجسّمين مقدارين متساويين لكان الفضل بين البقيتين مثل الفضل بين المجسّمين، الذي هو الفضل / بين الخاصتين. فإذا نقصنا من أحد المجسّمين المقدارَ الذي كنا ننقص منه ل - ١٢٢ - ظ حال ما كان المنقوصان متساويين، ونفصل من الآخر أقل من ذلك المقدار، فبقدْر الزيادة التي تكون في أحد المنقوصين تلزم الزيادة في البقية الأخرى على ما لو كان المنقوصان متساويين. والذي ننقصه من المجسّم الثاني أكثر ‹ مما ننقصه من المجسّم الأول › بمقدار العلم الداخل في ب ج، فيكون البقية التي تبقى من المجسّم الأول تفضل ‹ البقية الأخرى › بهذا المقدار؛ فيكون التفاوت بين البقيّتين – بعد نقصان الأموال من المجسّمين – هو التفاضل بين خاصّة المجسّم الثاني وبين المجموع الحاصل من خاصّة المجسّم الأول، مع العلم الداخل في ب ج، وهو العلم الداخل في ه ج. فالتفاوت بين العددين الباقيين هو التفاوتُ بين خاصّة المجسّم الثاني وبين ضرب العلم الداخل في ه ج. فلو كان العلم الداخل في ه ج أكثر من خاصّة المجسم الثاني لكان العدد الباقي من المجسّم الأول أكثر من

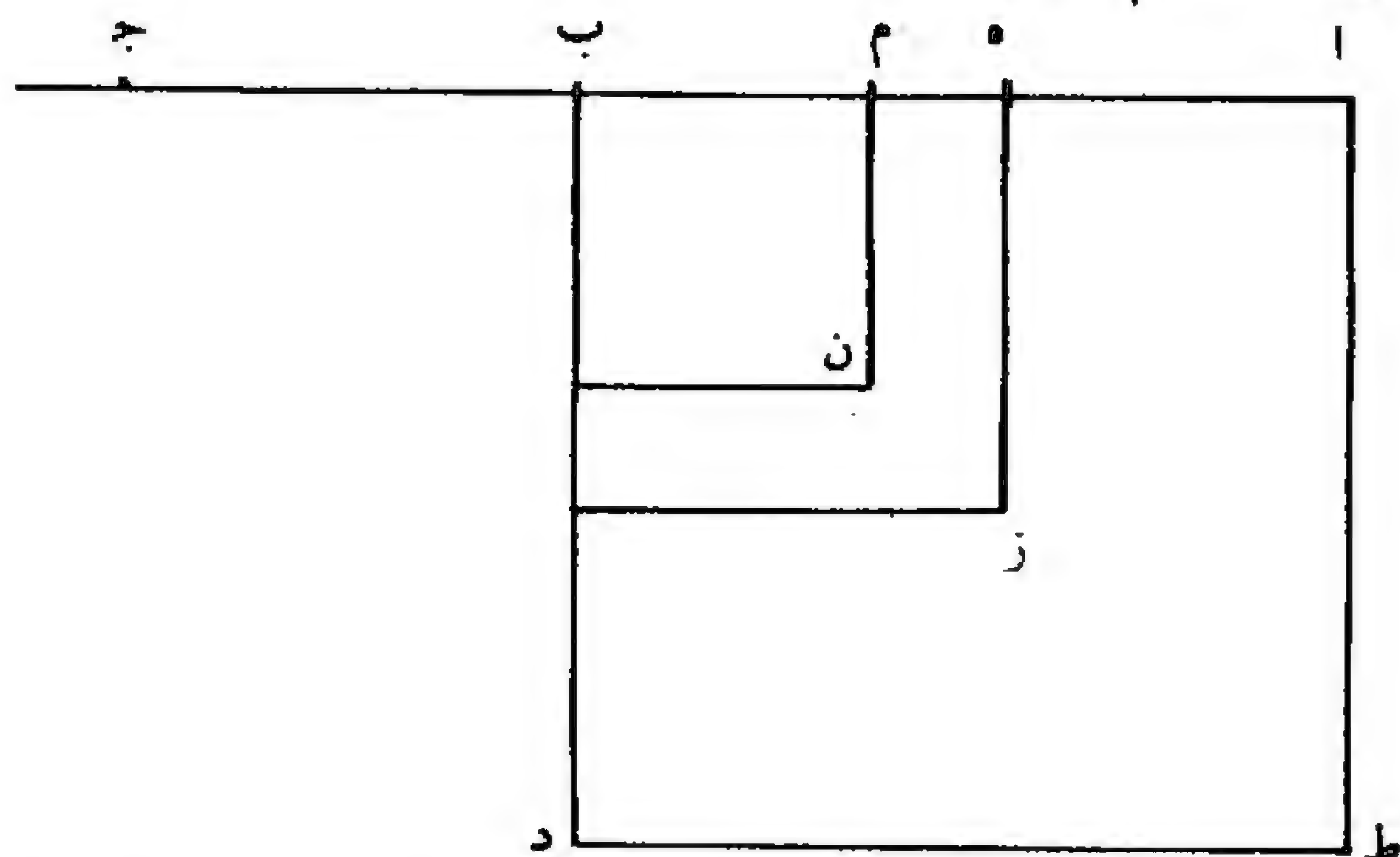
1 المجسم الأول ينقسم: ممحوة [ب] – 18 وهو العلم: ممحوة [ب] – 20 الثاني: ممحوة [ب]

العدد الباقي من المجسّم الثاني. لكن العلم الداخل في هـ ج أكثر؛ لأن ثلاثة مربعات هـ ب مع ضرب هـ ب في ثلاثة أمثال ب ح مثلُ مربع ا د، وب ح ثلثا ب ج، يكون ثلاثةُ أمثاله مثلي ب ج؛ فثلاثة مربعات ب هـ / ل - ١٢٣ - و مع ضرب ب هـ في مثلي ب ج تساوي مربع ا د. فنسقط مربع ب ز المشترك من الجانبين، يبقى في أحد الجانبين علم ط ز، وفي الجانب الآخر مربع ب ز مرتين، مع ضرب ب هـ في ب ج مرتين، ومجموعُها ضربُ ضعفِ ب هـ في هـ ج. فضرب ضعف ب هـ في هـ ج يساوي علم ط ز، وهو ضرب ا ب ب هـ في ا هـ. فنسبة ا ب ب هـ إلى ضعف ب هـ كنسبة هـ ج إلى ا هـ؛ ولأن علم ط ك أصغر من علم ط ز، فضرْب ا ب ب ي في ا ي – وهو علم ط ك – أصغر من ضرب ضعف ب هـ في هـ ج؛ فنسبة ا ب ب ي إلى ضعف ب هـ أصغر من نسبة هـ ج / ب - ١٣ - و إلى ا ي، ونسبةُ ا ب ب ي إلى ضعف ب هـ أعظم من نسبة ا ب ب ي إلى ب هـ ب ي. فنسبة ا ب ب ي ‹إلى› ب هـ ‹ب ي› أصغر بكثيرٍ من نسبة هـ ج إلى ا ي. فنجعل نسبة ا ي إلى ي هـ مشتركة، فالنسبة المؤلفة من نسبة ا ب ب ي إلى ي ب ب هـ، ومن نسبة ا ي إلى ي هـ، وهي نسبة علم ط ك إلى علم ك ز، أصغر من النسبة المؤلفة من نسبة هـ ج إلى ا ي، ومن نسبة ا ي إلى ي هـ وهي نسبة هـ ج إلى ي هـ. فضرب علم ط ك في ي هـ أصغر من ضرب علم ك ز في هـ ج. فيكون بقية المجسّم الأول – وهو العدد – أكثر / ل - ١٢٣ - ظ من بقية المجسم الثاني.

وأيضاً: فليكن نقطة م فيما بين نقطتي ب هـ، فيكون المجسّم الثاني وهو علم ط ن في ب م، فإذا نقص منه الأموال، وهو مربع ب ن في

1 ثلاثة: ثلث [ب، ل] – 3 ب ح: ب ج [ب، ل] / فثلاثة: فثلث [ب، ل] – 14 ا ي (الأولى): هـ ي [ب، ل] – 21 وهو (الأولى): هو [ب، ل]

ب ج يكون البقية هو العدد. فأقول: إن هذه البقية أيضاً أقلّ من البقية التي تبقى من المجسّم الأول.



لأن المجسم الأول ينقسم إلى ضرب علم ط ز في ب م، وفي ه م. والمجسم الثاني ينقسم إلى ضرب العلم الداخل والخارج في ب م، فيكون خاصّةُ المجسّم الأول هو ضرب العلم الخارج في ه م، وخاصّة المجسّم الثاني هو ضرب العلم الداخل في م ب. وإنما ينقص من المجسّم الأول مربع ب ز في ب ج ليبقى العدد، وينقص من المجسّم الثاني مربع ب ن في ب ج ليبقى العدد؛ وذلك النقصان أكثر من هذا النقصان بمقدار العلم الداخل في ب ج، وبقدْر ذلك نزيد في هذا الجانب كما ذكرنا؛ فيبلغ خاصةُ المجسّم الثاني ضربَ العلم الداخل في ب م مع ضربه في ب ج أعني ‹ ضرب العلم الداخل في ه م، وتكون خاصة المجسّم الأوّل › من ضرب العلم الخارج في ه م، فيكون البقية ‹ فضلَ المجسّم › الأول ‹ عن › الأخير. كذلك لأن نسبة ا ب ب ه إلى ضعف ب ه كنسبة ج ه إلى ا ه على ما تقدّم، ونسبة ا ب ب ه / إلى ه ب ب م أعظم من نسبة ل - ١٢٤ - و ا ب ب ه إلى ضعف ب ه، ونسبة ج م إلى ا ه أصغر من نسبة ج ه إلى ا ه، فنسبة ا ب ب ه إلى ه ب ب م أعظم من نسبة ج م إلى

12 الأول: بعدها كلمة أو كلمتان مطموستان قد تكونان «أكثر من». وفي هذه الحال تكون الجملة «فيكون البقية الأولى أكثر من الآخر» [ب]، ولهذا آثرنا التصحيح

ا هـ. فنجعل نسبة ا هـ إلى هـ م مشتركةً، فتصير النسبة المؤلفة من نسبة ا ب ب هـ إلى هـ ب ب م ومن نسبة ا هـ إلى هـ م – وهي نسبة علم ط ز إلى علم ز ن – أعظم من النسبة المؤلفة من نسبة جـ م إلى ا هـ، ومن نسبة ا هـ إلى هـ م، وهي نسبة جـ م إلى هـ م. فنسبة علم ط ز إلى علم ز ن أعظم من نسبة جـ م إلى هـ م. فضرب علم ط ز في هـ م أعظم من ضرب علم ز ن في جـ م. فبقية المجسّم الأول أعظم من بقية المجسّم الثاني.

فقد تبيّن أن أعظم عددٍ يمكن في هذه المسألة مع فرض عدد الجذور إنما هو البقية المذكورة، وطريق استخراج ب هـ إنما يكون بمسألة: مال وجذور يعدل عدداً، بأن نجعله شيئاً. فلأن نسبة ا ب ب هـ إلى ضعف ب هـ كنسبة هـ جـ إلى ا هـ، فضرب ا ب ب هـ في ا هـ – وهو العلم – مثل ضعف ب هـ في هـ جـ، ولأن ا ب ب هـ جذر عدد الجذور وشيء وا هـ جذر عدد الجذور إلا شيئاً، فضربُ أحدهما في الآخر يكون عددَ الجذور إلا مالاً؛ وضعفُ ب هـ، وهو شيئان، في جـ هـ، عددُ الأموال وشيء، يكون مالان وأشياءُ بعِدّة ضعف عدد الأموال، وهو معادل لعدد الجذور إلا مالاً. فثلاثة أموالٍ وأشياء بعِدّة ضعف عدد الأموال تعدل عدد الجذور؛ فالمال الواحد مع أشياء بعدّة ثلثي عدد الأموال يعدل ثلث عدد الجذور. فإذا استخرجنا المطلوب بمسألة: مال وجذور يعدل عدداً، يخرج هـ ب، وهو المطلوب / الأول فينقص مربعه من مربع ⟨جذر⟩ عدد ل – ١٢٤ – ظ الجذور ليبقى العلم، ويضرب ب هـ في العلم ليحصل المجسّم الأول، ثم يضرب مربع ب هـ في عدد الأموال وينقص المبلغ من المجسّم الأول،

2-1 نسبة ا ب: ا ب [ل] – 5-4 إلى علم: ناقصة [ل] – 13-9 إنما هو البقية ... وا هـ جذر: ناقصة [ل] – 13 شيئا: شيء [ب، ل] – 21 المبلغ: ممحوة [ب]

ليبقى العدد الأعظم. فإن كان العدد المسؤول أكثر من العدد الأعظم فالمسألة مستحيلة، وإن كان مساوياً له فهي ممكنة، ولها مطلوب واحد وهو المطلوب الأول، وهو خط ب ه، وإن كان أقلَّ منه فلها جوابان: أحدهما أعظم من ب ه والآخر أصغر منه.

أما الأعظم: فنخرج ب ج عددَ الأموال بالاستقامة، ونجعل ج ع ضعف ه ب. فلأن ه ب معلوم، وب ج عدد الأموال ‹معلوم› وج ع معلوم، فخط ه ع معلوم، فنجعله عدد أموال، ونجعل فضلَ البقية العظمى على العدد المسؤول – وهو عدد التفاوت – عدداً، ونعمل سؤالاً على مسألة: مكعب وأموال بعدّة ه ع يعدل عدد التفاوت؛ وليكن المطلوب الذي يخرج خط ه ي، حتى يكون مربعه في ي ه، وهو مكعبه، وفي ه ع، وهو عدد الأموال، يعدل عدد التفاوت؛ فيكون ه ي أصغر من ا ه بمثل ما مرّ في المسألة المتقدمة. فأقول: إن ب ي هو مطلوبنا في هذه المسألة.

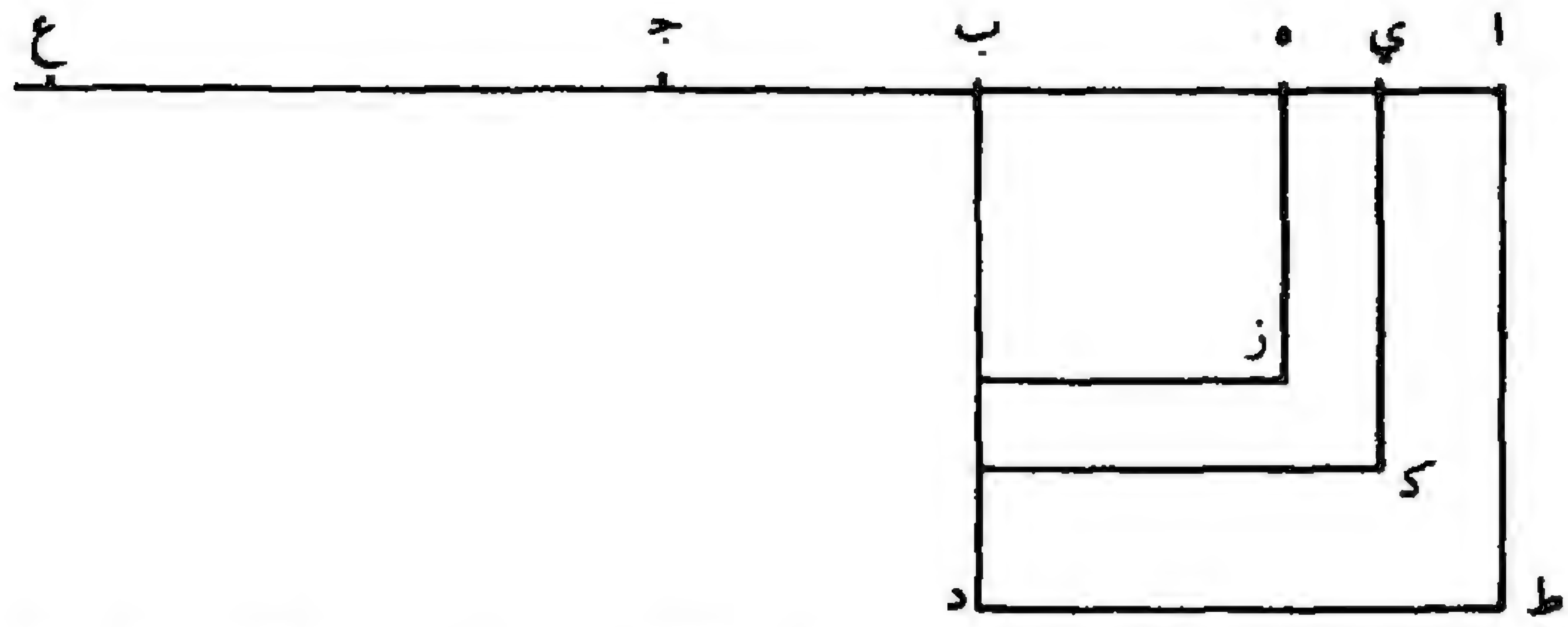
لأن ضرب علم ك ز في ج ه ينقسم إلى ضرب ي ه في ضعف ب ه، ثم في ج ه، وإلى ضرب مربع ي ه في ج ه، والقسم الأول مساوٍ لضعف ب ه في ج ه، ثم في ي ه، فيكون علم ك ز في ج ه مثل مربع ي ه في ج ه، و‹هو› مثل ضعف ب ه في ج ه / ثم في ي ه. ل – ١٢٥ – و
لكن ضعف ب ه في ج ه هو علم ط ز. فعلم ك ز في ج ه مثل مربع ي ه في ج ه، مع مضروب علم ط ز في ي ه، وهو ينقسم إلى علم ط ك في ي ه وإلى علم ك ز في ي ه. / فعلم ك ز في ج ه يساوي مربع ب – ١٣ – ظ
ي ه في ج ه، وعلم ط ك في ي ه، وعلم ك ز في ي ه؛ لكن علم

9-11 وليكن المطلوب ... عدد التفاوت: ناقصة [ل] – 21 لكن علم ... في ي ه: ناقصة [ل]

ك ز في ي ه مثل مربع ي ه في ضعف ه ب، أعني في ج ع، ومثل مكعب ي ه. فعلم ك ز في ه ج مثل مربع ي ه في ه ج ومربع ي ه في ج ع ومكعب ي ه؛ وهذه الثلاثة هي مربع ي ه في ي ع؛ والقسم الرابع علم ط ك في ي ه؛ فعلم ك ز في ه ج مثل مربع ي ه في ي ع مع علم ط ك في ي ه. فإذا نقصنا من كلا الجانبين علم ك ز في ب ج، فيبقى من أحدهما ‹علم› ك ز في ب ه ومن الآخر علم ط ك في ي ه مع مربع ي ه في ي ع منقوصاً منهما علم ك ز في ب ج؛ والجانبان متساويان؛ فإذا زدنا على كلا الجانبين علم ط ك في ب ه، يصير أحدهما علم ط ز في ه ب والآخر علم ط ك في ي ب مع مربع ي ه في ي ع بنقصان علم ك ز في ب ج، مع بقاء تساوي الجانبين. فإذا نقصنا من كليهما مربع ه ب في ب ج يبقى أحدهما علم ط ز في ه ب منقوصاً منه مربع ه ب في ب ج، وهي بقية ضلع ه ب، مساوياً للجانب الآخر / وهو علم ط ك في ب ي مع مربع ي ه في ي ع بنقصان مربع ك ب ل – ١٢٥ – ظ في ب ج، وهو بقية ضلع ي ب في ‹ي ع› مع مربع ي ه في ي ع.

وقد كان العدد المسؤول مع مربع ه ي في ي ع مثل بقية ضلع ه ب أيضاً. فبقية ضلع ب ي مع مربع ي ه في ي ع مثل العدد المسؤول مع مربع ي ه في ي ع. فإذا ألقينا مربع ي ه في ي ع المشترك، يبقى بقية ضلع ب ي مثل العدد المسؤول. فإذا جعلنا خط ب ي جذراً وضربناه في مربع ا ب، وهو عدد الجذور، حصل مبلغ الجذور، وهو مجسّم قاعدته مربع ا د وارتفاعه ب ي، الجذر؛ فإذا نقصنا منه مربع ب ي، وهو المال، في ب ج، وهو عدد الأموال، مع مكعب ي ب تبقى البقية معادلة للعدد المسؤول. فيكون الجذور مساوية للمكعب والأموال والعدد.

1 في ضعف: وفي ضعف [ب، ل] – 5 كلا: كل [ب، ل] – 17 فإذا ألقينا ... ي ع: ناقصة [ل]

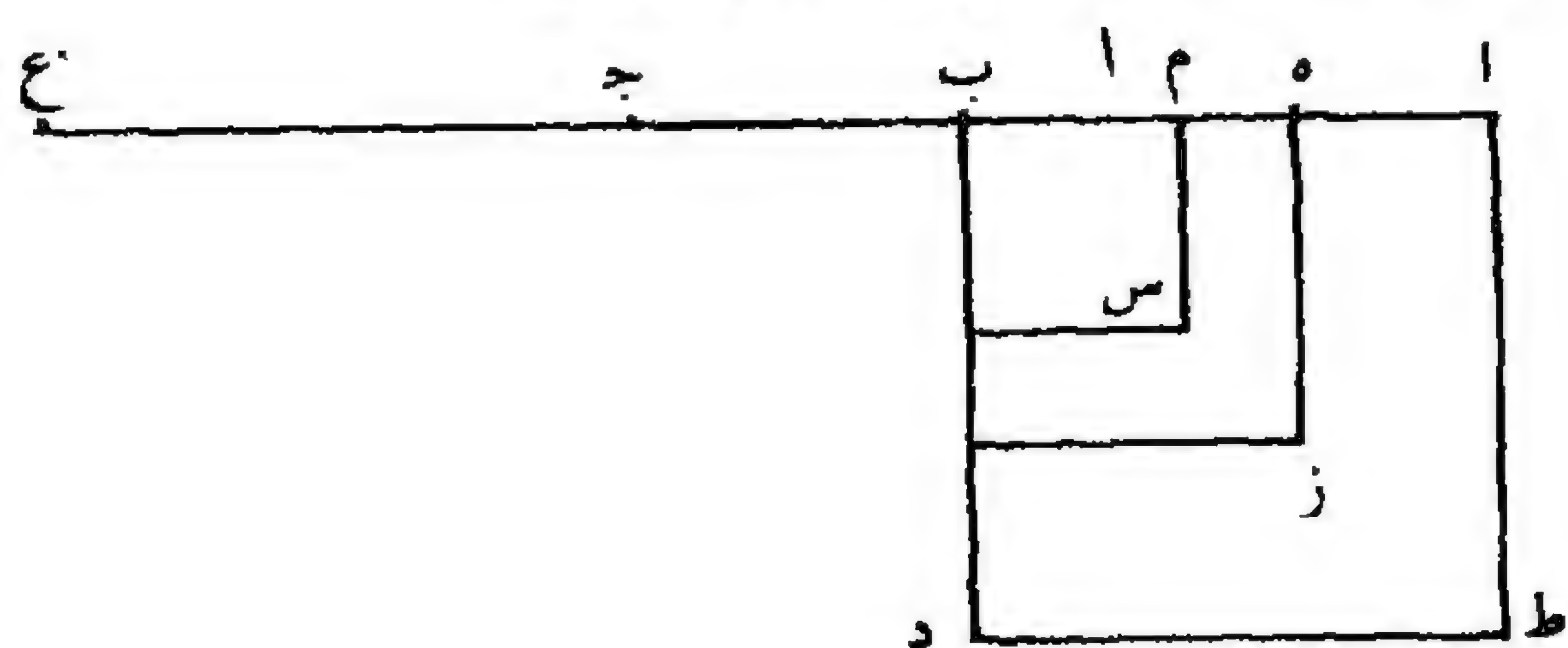


وأما المطلوب الأصغر من ب ه، فنجعل ج ع ضعف ب ه، ونجعل ه ع عدد الأموال، ونجعل عدد التفاوت، وهو فضل بقية ضلع ب ه على العدد المسؤول، عدداً، ونعمل سؤالاً على مسألة: مكعب وعدد يعدل أموالاً. وليكن المطلوب الذي يخرج ه م حتى يكون مربعه في / ه ع مثل ل - ١٢٦ - و مكعبه مع عدد التفاوت؛ فيكون مربع ه م في م ع مثل عدد التفاوت، ويكون ه م أصغر من ب ه بمثل ما مرّ في المسألة المتقدمة فأقول: إن ب م هو مطلوبنا في هذه المسألة.

فلأن علم ط ز مثل ضعف ب ه في ه ج، فيكون ضعف ب ه في ج ه ثم في ه م مثل علم ط ز في ه م. لكن ضعف ب ه في ج ه ثم في ه م مثلُ ضعف ب ه في ه م ثم في ه ج، وهو مثل علم ز س في ه ج ومربع ه م في ه ج. أما علم ز س في ه ج فمساوٍ لعلم ز س في ه م مع علم ز س في م ج. فقد صار علم ط ز في ه م مساوياً لمجموع علم ز س في ه م مع علم ز س في م ج ومربع ه م في ه ج. أما علم ز س في ه م ‹ فهو › مثل مربع ه م في ه ب ومربع ه م في ب م. أما مربع ه م في ه ج ‹ فهو › مثل مربع ه م في ه ب ومربع ه م في ب ج. فقد صار جميع الأقسام المساوية لعلم ط ز في ه م هي مربع ه م في ب ه مرتين؛ أعني مربع ه م في ج ع؛ ومربع ه م في م ب وفي ب ج وعلم ز س في

3 وعدد: ناقصة [ل] – 5 مع: في [ب، ل] – 12-13 ز س في ه م: ز س ي ه م [ب، ل] – 13-14 ز س في ه م: ز س ي ه م [ب، ل] – 15 ه ج: ب ج [ب، ل] / ه م (الثانية): ه ب [ب، ل] – 16 ب ه: ب م [ب، ل]

م ج. والأقسام الثلاثة الأول مثل مربع ه م في م ع. فقد تبيّن أن علم ط ز / في ه م مثل علم ز س في م ج مع مربع ه م في م ع. فإذا ل - ١٢٦ - ظ نقصنا من كلا الجانبين علم ز س في ب ج، يبقى من أحد الجانبين علم ط ز في ه م بنقصان علم ز س في ب ج مساوياً للجانب الآخر، وهو علم ز س في م ب مع ⟨مربع⟩ ه م في م ع. فإذا زدنا على كلا الجانبين علم ط ز في م ب حصلت المساواة، ويصير في أحدهما علم ط ز في ه ب بنقصان علم ز س في ب ج، وفي الجانب الآخر علم ط س في م ب مع مربع ه م في م ع. فإذا نقصنا من الجانبين مربع ب م في ب ج، حصل في أحدهما علم ط ز في ه ب بنقصان مربع ز ب في ب ج، وهي بقية ضلع ه ب، مساوياً للجانب الآخر، وهو علم ط س في ب م مع مربع ه م في م ع بنقصان مربع ب م في ب ج، وهي بقية ضلع ب م مع مربع ه م في م ع. وقد كانت بقية ضلع ه ب مثل العدد مع مربع ه م في م ع. فيكون بقية ضلع ب م مع مربع ه م في م ع مثل العدد المسؤول مع مربع ه م في م ع؛ فنسقط المشترك، فيبقى العدد المسؤول مثل بقية ضلع ب م. فإذا جعلنا ب م جذراً وضربناه في مربع ا د، وهو عدد الجذور، حصل مبلغ الجذور؛ وينقسم إلى مكعب ب م وإلى علم ط س في ب م. فإذا نقصنا منه مربع / ب م في ب ج وهو مبلغ ل - ١٢٧ - و الأموال مع مكعب م ب، تبقى البقية معادلة للعدد المسؤول؛ فيكون مبلغ الجذور معادلاً للمكعب والأموال / والعدد. ب - ١٤ - و



2 مربع ه م: ممحوة [ب] – 19 والأموال: مثبتة في الهامش في التعقيبة، ولكن الناسخ نسي نقلها للصفحة التالية [ب]

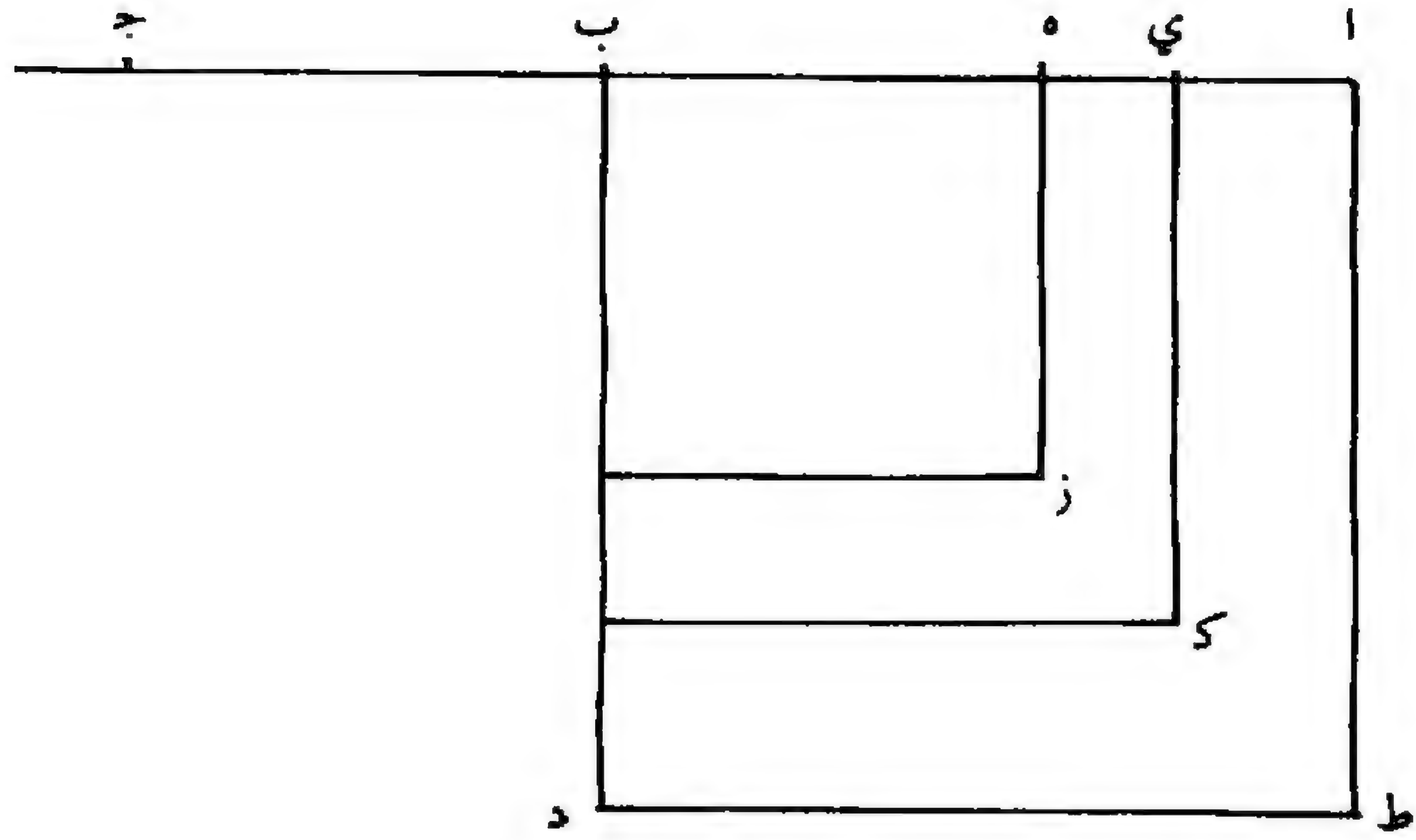
وطريق استخراج كلّ واحدٍ من المطلوبين، أعني الأعظم والأصغر، باستخراج التفاوت بينه وبين المطلوب الأول.

وأما استخراج التفاوت بين الأعظم وبين المطلوب الأول فيؤدي إلى مسألة: مكعب وأموال يعدل عدداً. لأنا بيّنا أن التفاوت بين العدد الباقي من المجسّم الأول وبين العدد الباقي من المجسّم الثاني، بعد نقصان الأموال من المجسّمين، هو التفاوت بين خاصة المجسّم الثاني وبين العلم الداخل في ه ج. فيكون عدد التفاوت مساوياً لفضل العلم الداخل في ه ج على خاصة المجسّم الثاني، وهو ضرب العلم الخارج في ي ه. فنجعل ي ه شيئاً، فالعلم الداخل من ضرب ي ب ب ه في ي ه، وهو ضعف ب ه وشيء، في الشيء؛ فيكون أشياء بعِدّة ضعف ب ه ومالاً. وإذا ضربناه في ه ج، يحصل أشياء بعِدّة ‹ضعف› ضرب ب ه في ه ج، وأموالٌ بعدة ه ج.

وأما جانب المجسم الثاني، فلأن العلَم الخارج من ضرب ا ب ب ي في ا ي، أعني جذر عدد الجذور مع ب ه وشيء / في ا ي وهو ا ه إلا ل – ١٢٧ – ظ شيئاً، فيصير العلم الخارج عدداً بمقدار ضرب ا ب ب ه في ا ه إلا أشياء بعدّة ضعف ب ه وإلا مالاً. فإذا ضربناه في ي ه الشيء، يصير أشياءَ بعدّة ضرب ا ب ب ه في ا ه إلا أموالاً بعدّة ضعف ب ه، وإلا كعباً. فهذه خاصةُ المجسم الثاني، وهو مع عدد التفاوت بين المسؤول والأعظم يصير معادلاً لما في جانب المجسّم الأول، وهو أشياء بعدّة ضعف ضرب ب ه في ه ج، وأموال بعدّة ه ج. فبقدر زيادة المستثنى على الجانبين يصير جانب المجسم الأول أشياء بعدّة ضعف ضرب ب ه في ه ج وأموالاً

3 وأما: الواو ممحوة لتآكل المخطوطة [ب] – 6 من المجسمين: «من»، ممحوة، وكذلك بعض حروف «المجسمين» [ب] – 10 ومالاً: مالاً [ب، ل] – 15 شيئاً: شيء [ب، ل]

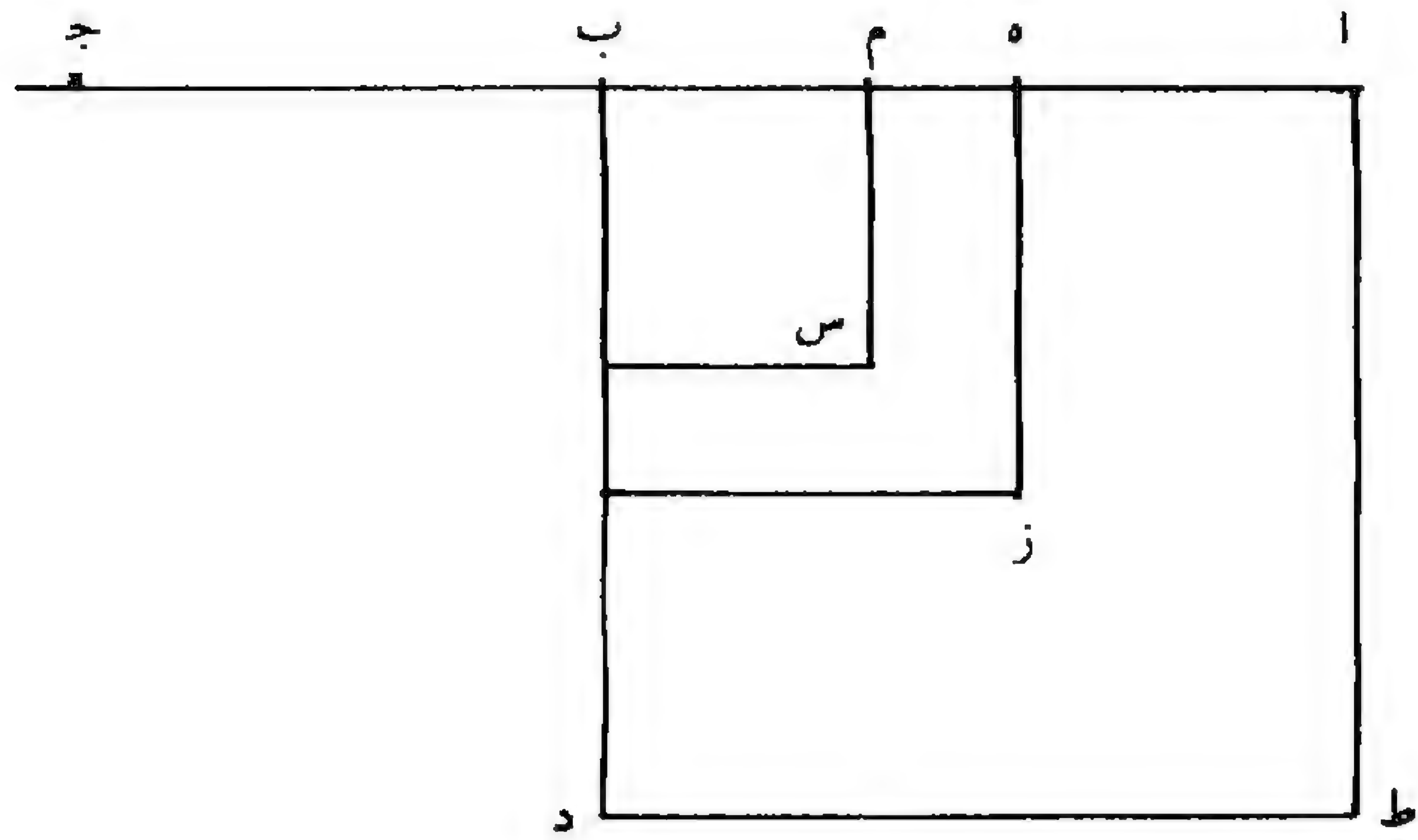
بعدّة هـ جـ وعدّةِ ضعف ب هـ وكعباً، وجانبُ المجسم الثاني أشياءَ بعدّة ضرب ا ب ب هـ مع عدد التفاوت بين المسؤول والأعظم. وعدّةُ الأشياء من الجانبين متساوية، لأن ضرب ا ب في ا هـ مثلُ ضعف ب هـ في هـ جـ لِما عرَفت. فنلقي الأشياء من الجانبين، يبقى في أحد الجانبين أموال بعدّة هـ جـ وضعفِ ب هـ، وهو ثلاثةُ أمثال المطلوب الأول وعددُ الأموال، مع مكعبٍ يعدل عدد التفاوت الذي بقي فى الجانب الآخر. فقد تأدّى إلى مسألة: مكعب وأموال يعدل عدداً؛ والعددُ عددُ التفاوت بين المسؤول والأعظمِ /، وعددُ الأموال ثلاثة أمثال المطلوب الأول وعدد ل – ١٢٨ – و الأموال المسؤولة؛ فيستخرج المطلوب بتلك المسألة، فيخرج هـ ي الشيء، فنزيده على ب هـ فيحصل ب ي.



وأما استخراج التفاوت بين المطلوب الأول والأصغر فيؤدّي إلى مسألة: مكعب وعدد يعدل أموالاً؛ لأنه قد عُرف فيما تقدّم أن التفاوت بين العدد الباقي من المجسم الأول وبين العدد الباقي من المجسم الثاني: هو التفاوتُ بين خاصة المجسم الأول – وهو ضرب العلم الخارج في هـ م – وبين ضرب

9-8 ثلاثة ... الأموال: ناقصة [ل] – 13 من ... الباقي: ناقصة [ل]

العلم الداخل في ب جـ؛ فيكون عدد التفاوت مساوياً لفضل خاصة المجسّم الأول على ضرب العلم الداخل في ب جـ. فيجعل هـ م شيئاً، فالذي في جانب المجسم الأول يكون أشياء بعدّة العلَم الخارج؛ وأمّا في جانب المجسم الثاني فالعلم الداخل من ضرب هـ ب ب م – وهو ضعف ب هـ إلاشيئاً – في هـ م الشيء، يكون أشياء بعدّة ضعف ب هـ إلا مالاً. وإذا ضربناه في م جـ وهو هـ جـ إلا شيئاً، يصير أشياء بعدّة ضعف ب هـ في هـ جـ ومكعباً إلا أموالاً بعدّة ضعف ب هـ وبعدّة هـ جـ، أعني بعدّة ثلاثة أمثال ب هـ، وبعدّة ب جـ، وهو مع عدد التفاوت يعدل أشياءَ بعدّة العلم الخارج في هـ م. فنزيد المستثنى على الجانبين ونلقي الأشياء بالأشياء لكونها متساويةً لِما مرّ، فيحصل في أحد الجانبين أموال / بعدّة ثلاثة أمثال ل – ١٢٨ – ظ المطلوب الأول مع عدد الأموال المسؤولة، وفي الجانب الآخر عدد التفاوت ومكعب. فقد تأدّى إلى مسألة: مكعب وعدد يعدل أموالاً، فيستخرج المطلوب بتلك المسألة، فيخرج لنا هـ م، فإذا نقصناه من ب هـ، المطلوب الأول، يبقى ب م، وهو الجواب الأصغر.



1 ب جـ: م جـ [ب، ل] – 5 شيئا: شيء [ب، ل] / بعدة: ممحوة [ب] – 6 شيئا: شيء [ب، ل] – 7 وبعدة: ممحوة [ب]

مثال المسألة فيما إذا كان الجذر الخارجُ هو المطلوبَ الأول: مكعب وثلاثون مالاً وعدد بهذه الصورة ٦٩٢٤٣٥٥٢ يعدل جذوراً عددها بهذه الصورة ٣٢٨٣٨٣.

فنأخذ ثلث عدد الجذور فيكون بهذه الصورة ١٠٩٤٦١، ونجعلها عدداً ونأخذ ثلثي عدد الأموال، وهو عشرون، ونجعلها جذوراً، فيكون مال وعشرون جذراً يعدل عدداً بهذه الصورة ١٠٩٤٦١، ونستخرج المطلوب على مسألة: مال وجذُور يعدل عدداً، فيخرج الجذر بهذه الصورة ٣٢١، وهو المطلوب الأول. فنجعله مربعاً فيكون بهذه الصورة ١٠٣٠٤١، فننقصه من عدد الجذور وذلك ممكن أبداً، فيبقى عددٌ بهذه الصورة ٢٢٥٣٤٢، فنضربه في المطلوب / الأول، فيحصل المجسم الأعظم بهذه الصورة ٧٢٣٣٤٧٨٢ / ، (ل – ١٢٩ – و / ب – ١٤ – ظ) ونضرب مربع المطلوب الأول في عدد الأموال – وهو ثلاثون – فيحصل بهذه الصورة ٣٠٩١٢٣٠، فننقصه من المجسم الأعظم فيبقى بهذه الصورة ٦٩٢٤٣٥٥٢، وهو مساوٍ للعدد المسؤول. فالجواب هو المطلوب الأول بهذه الصورة ٣٢١؛ وإذا زدنا على العدد المذكور قدراً ما، وتركنا عدد الجذور والأموال بحالها، كان السؤال مستحيلاً.

مثالها فيما إذا كان الجذر المطلوب هو المطلوب الأعظم: مكعب وستون مالاً وعدد بهذه الصورة ٥٧١٢٧٠٨٦ يعدل جذوراً عددها بهذه الصورة ٣٠٠٢٦٧.

فنأخذ ثلث عدد الجذور ونضعه عدداً وثلثي عدد الأموال جذوراً، ونستخرج المطلوب على مسألة: مال وجذور يعدل عدداً، فيخرج الجذر بهذه الصورة ٢٩٧، وهو المطلوب الأول، فينقص مربعه من عدد الجذور،

6-5 مال وعشرون: مالاً وعشرين [ب، ل]، وهذا أيضاً جائز على تقدير – 17 ٥٧١٢٧٠٨٦: ٥٧١٢٠٨٦ [ب، ل] – 19 عدداً: كتب ناسخ [ب] كلمة بعدها ثم حذفها.

ونضرب الباقي في المطلوب الأول، فيحصل المجسّم الأعظم، ونضرب مربع المطلوب الأول في عدد الأموال، وننقص المبلغ من المجسّم الأعظم فيبقى العدد / الأعظم بهذه الصورة ٥٧٦٨٨٦٨٦، وهو أكثر من العدد ل - ١٢٩ - ظ المسؤول؛ فالسؤال ممكن. فنأخذ ثلاثة أمثال المطلوب الأول ونزيد عليه عدد الأموال، فيحصل بهذه الصورة ٩٥١، وننقص العدد المسؤول من العدد الأعظم فيبقى بهذه الصورة ٥٦١٦٠٠، فنجعله عدداً. ونقول: كعب وأموال عِدّتها بهذه الصورة ٩٥١ يعدل عدداً بهذه الصورة ٥٦١٦٠٠، فنستخرج المطلوب على مسألة: مكعب وأموال يعدل عدداً، فيخرج ٢٤، فنزيده على المطلوب الأول، فيحصل الجذر المطلوب بهذه الصورة ٣٢١، وهو الجواب الأعظم.

مثالها فيما إذا كان الجذر المطلوب هو المطلوب الأصغر: كعب وستون مالاً وعدد بهذه الصورة ٨٨٦٥١٨٥٤ يعدل جذوراً عددها بهذه الصورة ٣٩٨٤٧٥.

فنستخرج المطلوب الأول فيكون بهذه الصورة ٣٤٥، ونأخذ ثلاثة أمثاله، ونزيد عليه عدد الأموال فيحصل بهذه الصورة ١٠٩٥ ونجعله أموالاً، ونستخرج العدد الأعظم وننقص منه العدد المسؤول، ونجعل الباقي عدداً ونقول: مكعب مع العدد الباقي يعدل أموالاً بالعِدّة المذكورة، ونستخرج المطلوب / على مسألة: مكعب وعدد يعدل أموالاً، فيخرج ل - ١٣٠ - و المطلوب ٢٤ فننقصه من المطلوب الأول فيبقى بهذه الصورة ٣٢١، وهو الجواب الأصغر؛ وذلك ما أردنا بيانه.

7 ٥٦١٦٠٠: ٥٦١٦١٠٠ [ب، ل] – 14 الأول: يقصد هنا جذر المعادلة المشتقة كما في القسم الأول:
$x^2 + 40x = 132525$

المسألة الرابعة: مكعب وجذور وعدد يعدل أموالاً.

فليكن ا ب عددَ الأموال وب ج جذرَ عددِ الجذور. فأقول: إنْ كان جذر عدد الجذور – وهو ب ج – مثلَ نصف عدد الأموال – وهو ا ب – أو أعظم منه، فالمسألة مستحيلة.

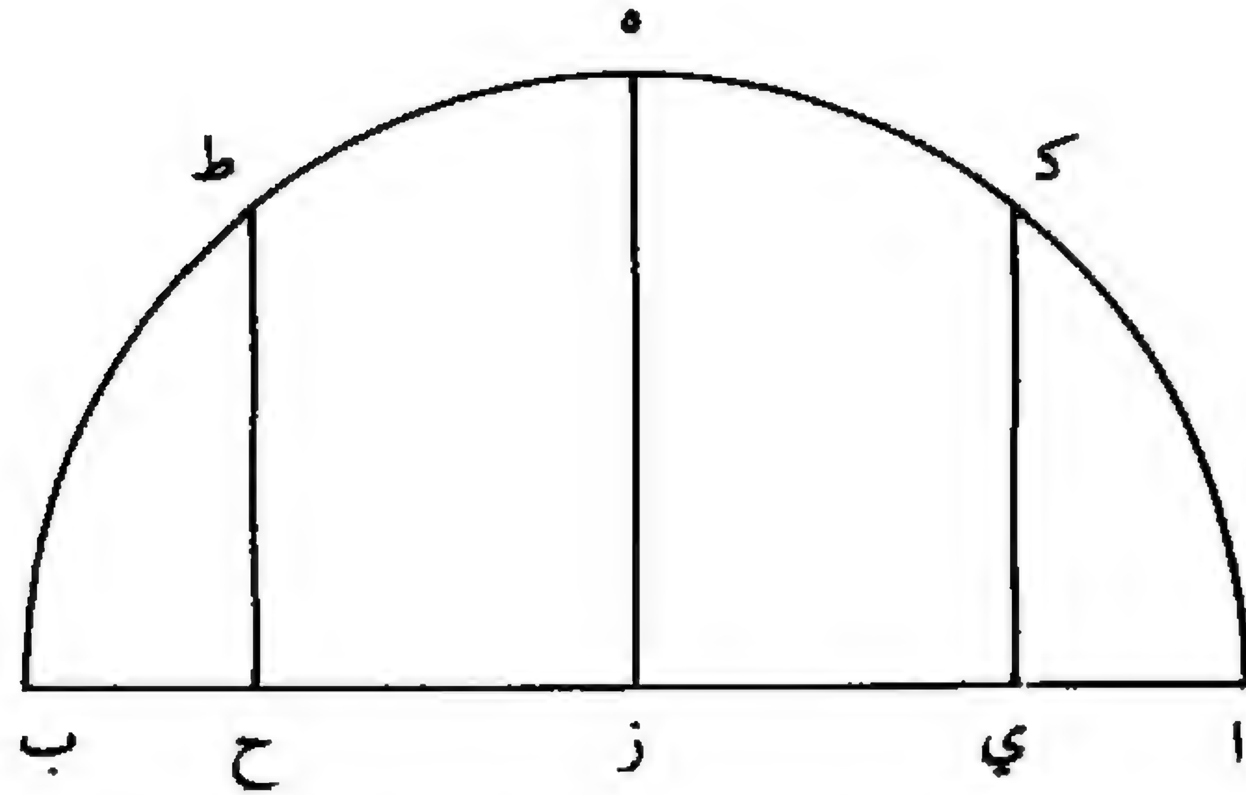
لأن مربّع الجذر المطلوب إذا ضرب في ا ب – الذي هو عدد الأموال – حصل المكعب والجذور والعددُ؛ وإذا ضرب في الجذر المطلوب حصل المكعب فقط. فيكون عدد الأموال – وهو ا ب – أعظمَ من الجذر المطلوب، وينفصل منه المطلوب على مثال ب د، فيكون مربعُ ب د في ا ب مثلَ مكعب ب د، وضربِ ب د في مربع ب ج – وهو الجذورُ – والعددِ. ومربعُ ب د في ا ب ينقسم إلى مربع ب د في ب د – وهو المُكعب – وإلى مربع ب د في ا د وهو المجسم المساوي لمبلغ الجذور والعدد. فيجب أن يكون هذا المجسّم أعظم من مربع ب ج في ب د، وهو مبلغ الجذور، بمقدار العدد. ومتى كان ب ج مثلَ نصف عدد الأموال أو أعظم / يلزم ألّا يكون المجسم المذكور أعظم من مبلغ ل – ١٣٠ – ظ الجذور، فيلزم استحالة المسألة. ولأن ب ج ليس بأصغر من نصف ا ب؛ فحينئذ نعمل على ا ب نصف دائرة مركزها نقطة ز ‹وقطرها ا ب›، ونخرج ه ز عموداً على ا ب، فهو نصف ا ب، والجذرُ المطلوب: إمّا مثلُ نصف ا ب – أعني ب ز – أو أصغر منه أو أعظم.

فإن فرضنا الجذرَ المطلوب مثلَ ب ز، يلزم أن يكون المجسّم المذكور المعادل لمبلغِ الجذور والعددِ هو مربعَ ب ز في ا ز، وهو مكعب نصف ا ب؛ ومربعُ ب ج في ب ز ليس بأصغر من مربع ب ز في ز ه. فيكون

1 المسألة الرابعة: ناقصة [ل] – 16 فحينئذ نعمل: حينئذ فنعمل [ب، ل]

مربع ب ج في ب ز – وهو مبلغ الجذور – ليس بأصغر من المجسّم المذكور.

وأيضاً: إنْ فرضنا الجذرَ المطلوب أصغرَ من نصف ا ب، وهو ب ح، ونُخرج عمود ح ط ؛ فلأن ضرب ب ح في ا ح مثلُ مربع ح ط ، فنسبة ب ح إلى ح ط كنسبة ح ط إلى ا ح. فنسبة مربع ب ح إلى مربع ط ح كنسبة ب ح إلى ا ح. فضرب مربع ب ح في ا ح مثلُ ضرب مربع ح ط في ب ح. ولأن مربع ح ط أصغر من مربع ب ز، ومربع ب ج ليس بأصغر من مربع ب ز؛ فمربع ب ج فى ب ح، وهو مبلغ الجذور، أعظم من مربع ح ط / في ب ح، فيكون مبلغ الجذور أعظم ل – ١٣١ – و من المجسم المذكور.



وأيضاً: إن فرضنا الجذر المطلوب أعظمَ من ب ز وهو ب ي، ونُخرج عمود ي ك ، فلأن نسبة مربع ب ي إلى مربع ي ك كنسبة ب ي إلى ا ي لِما مرّ آنفاً، فمربع ب ي فى ي ا مثل مربع ي ك في ب ي. ولأن مربع ي ك أصغرُ من مربع ب ز ومربعَ / ب ج ليس بأصغر من مربع ب ز، ب – ١٥ – و فمربع ب ج في ب ي – وهو مبلغ الجذور – أعظم من مربع ي ك في ي ب ، وهو المجسم المذكور.

5 كنسبة ح ط : ناقصة [ل] – 14 من (الأولى): كررها ناسخ [ل]

فقد تبيّن أن ب ج – الذي هو جذر عدد الجذُور – إن كان مثلَ نصف عدد الأموال أو أعظم منه كانت المسألة مستحيلة. فمن ضرورةِ صحة هذه المسألة أن يكون ب ج أصغر من نصف ا ب.

ثم إن فرضنا ب ج أصغر من نصف ا ب؛ فالمسألة يقع فيها استحالةٌ من جهة أخرى. وليكن ب د ثلثي ا ب، فنقسم ب د قسمةً يكون ضربُ أحد القسمين في الآخر مثلَ ثلث مربع ب ج، وذلك إنّما يتأتى بأن نجعل ب د عدد الجذور، وثلث مربع ب ج عدداً، ونعمل سؤالاً على مسألة: مال وعدد يعدل جذوراً. وليكن المطلوب الذي يخرج بتلك المسألة خَطَّ ب ه، حتى يكون مربعه مع عدد ثلث مربع ب ج يعدل ضرب ب ه / في ب د. فضرب ب ه في د ه مثل ثلث مربع ب ج. وبعد أن ل – ١٣١ – ظ فرضت ب ج أصغر من نصف ا ب فلا يُعرض في استخراج المطلوب بطريق مسألة: مال وعدد يعدل جذوراً؛ للاستحالة التي تقع في تلك المسألة. ولأنا ننصف ا ب على ز فـ د ز ثلث ب ز، فضرب د ز في ب ز ثلث مربع ب ز، فيكون أعظم من ثلث مربع ب ج لأن ب ج أصغر من ب ز. فيكون ضرب ب ه في د ه أصغر من ضرب ب ز في د ز. ولأنا ننصف ب د على نقطة ح، فلأن ضرب ب ز في ز د مع مربع ز ح مثلُ ضرب ب ه في ه د مع مربع ه ح؛ لكون كلّ واحد منهما مساوياً لمربع نصف خط ب د، وضرب ب ز في ز د أعظم من ضرب ب ه في ه د، فمربع ز ح أصغر من مربع ه ح. فنقطة ه أبعد من نقطة التنصيف، من نقطة ز منها، فيكون ب ه أعظم من ب ز ود ه أصغر من د ز. فـ ب ه أعظم من نصف ا ب.

5 فنقسم: فنقسم [ب، ل] – 11 يعرض: كذا، ولعله يقصد «يُعترض» [ب، ل] – 14 لأن ب ج: ناقصة [ل] – 16 د ز: د ب [ب، ل]

فأقول: إن مربع ب ه إذا ضرب في ا ه حتى حصل المجسّم المذكور، وضرب مربع ب ج – وهو عدد الجذور – في ب ه حتى حصل مبلغ الجذور، ثم نقص مبلغ الجذور من المجسّم المذكور، فإن كان العدد أكثر من البقية فالمسألة مستحيلة.

ا د ه ز ح ب

لأن من ضرورة المطلوب الذي يوجد / في هذه المسألة أن يكون بعض ا ب – وهو عدد الأموال – وأن يكون ضرب مربعه في القسم الآخر – وهو المجسّم المذكور – مثلَ مبلغ الجذور والعدد، أو إذا ضرب في عدد الجذور ونقص من المجسّم المذكور تكون البقية مساويةً للعدد. ل – ١٣٢ – و

وكلّ خط يُفرض أعظم من ب ه أو أصغر منه فإن البقية التي توجد أبداً تكون أقلّ من البقية التي توجد مع خط ب ه. فلو كان العدد المسؤول أكثر من البقية التي توجد مع خط ب ه، تكون المسألة مستحيلة.

وبيان أنّ كلّ خط يُفرض أعظم من ب ه أو أصغر منه فإن البقية التي توجد معه تكون أقل من البقية التي توجد مع ب ه: فليكن أولاً ب ط أعظم من ب ه فأقول: إن البقيّة التي مع ب ط أقل من البقية التي مع ب ه.

وليكن ه ك عموداً على ا ب ومساوياً لـ ب ج ونصل ب ك. فلأن المجسّم الأول – وهو مربع ب ه في ا ه – ينقسم إلى مربع ب ه في ا ط وإلى مربع ب ه في ط ه، والمجسّم الثاني – وهو مربع ب ط في ا ط – ينقسم إلى مربع ب ه في ا ط، وإلى علم م ن في ا ط،

7 أو: و[ب، ل] – 13 فإن البقية: كذا، وهو خبر المبتدأ «بيان»، والصواب هو «أنّ» [ب، ل] – 15 التي: ناقصة [ل] – 20 ا ط (الأولى): ا ه [ب، ل]

فيخصّ المجسّم الأول مربع ب هـ في ط هـ، ويخصّ المجسّم الثاني علم م ن في ا ط. ويُنقص من المجسّم الأول مربع ك هـ في هـ ب ومن المجسّم / الثاني مربع ك هـ في ط ب وهو مربع ك هـ في هـ ب وفي ط هـ. فإذا نقصنا من كلّ واحد من المجسمين مربع ك هـ في ط ب، يكون الفضل بين القسمين ‹ الباقيين › كالفضل بين المجسّمين وبين الخاصتين. وإذا نقصنا من المجسّم الثانى مربع ك هـ في ط ب ومن المجسّم الأول مربع ك هـ في هـ ب، فبقدر الزيادة التي نقصنا من المجسّم الثاني – وهو مربع ك هـ في هـ ط – يقتضي الزيادة في بقية المجسم الأول؛ فلو لم ننقص وزدنا على المجسم الأول يكون كذلك خاصة المجسم الأول وهي مربع ب هـ في هـ ط، ونزيد عليها مربع ك هـ في هـ ط، يصير المجموع مربع ب ك في هـ ط. فيكون التفاضل بين العددين الباقيين من المجسمين كالتفاضل بين العلم في ا ط – وهو خاصة المجسم الثاني – وبين مربع ب ك في هـ ط، وهو المركب من خاصة المجسّم الأول مع الزيادة المذكورة. فلو كان خاصة المجسم الأول مع هذه الزيادة أكثر من خاصة المجسم الثاني لكان العدد الباقي من المجسم الأول أكثر من العدد الباقي من المجسّم الثاني. والأمر بهذه المثابة لأن ضرب د ب في ب هـ مثلُ ثلث ‹ مربع ب جـ › ومربع ب هـ. فيكون ضرب ثلاثة أمثال د ب في ب هـ مثل مربع ب جـ وثلاثة مربعات ب هـ. ولأن د ب ثلثا ا ب / فثلاثة أمثاله ضعف ا ب. فضعف ا ب في ب هـ مثل ثلاثة مربعات ب هـ مع مربع ب جـ. وضرب ضعف ا ب في ب هـ مثل ا هـ في ب هـ مرتين، مع مربع ب هـ مرتين. فثلاثة مربعات ب هـ مع مربع ب جـ مثل مربع ب هـ مرتين، وضرب ا هـ في ب هـ

ل – ١٣٢ – ظ

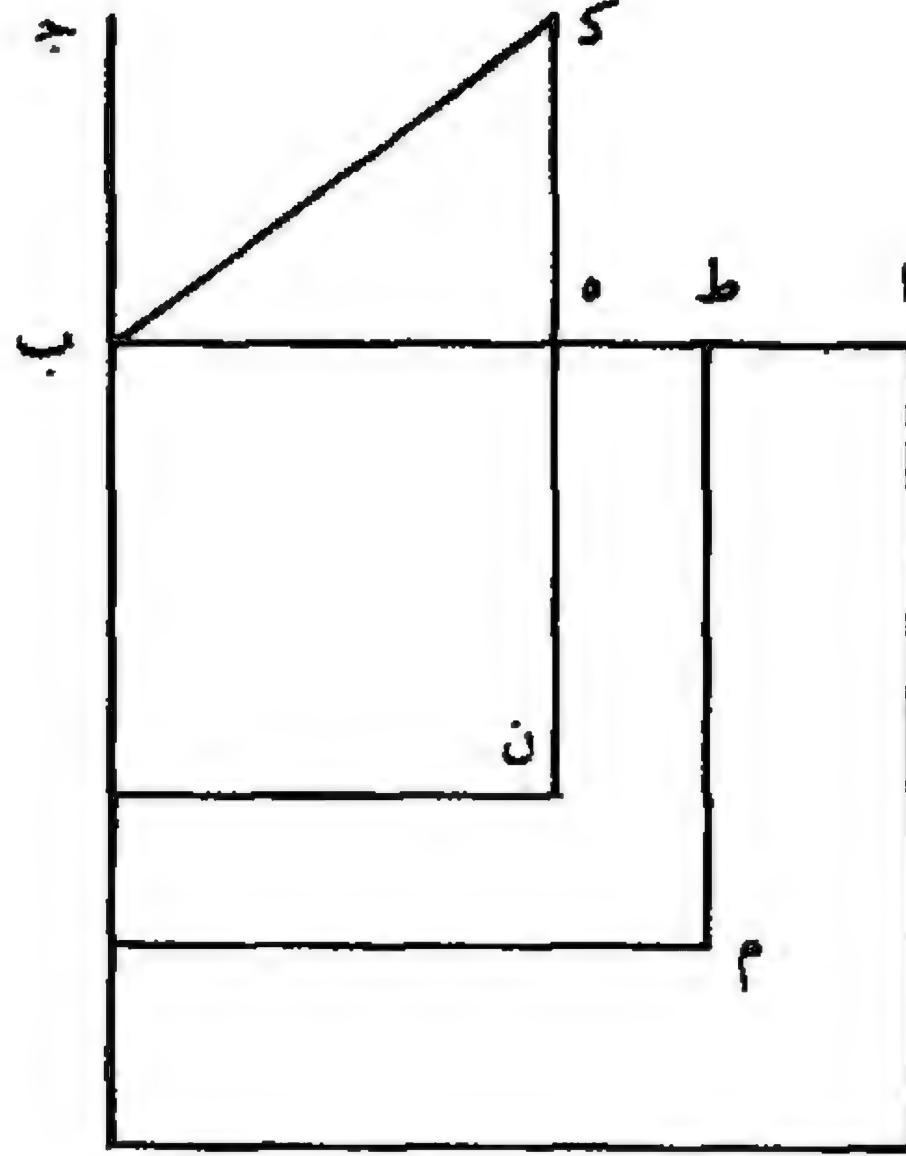
ل – ١٣٣ – و

9 وهي: هو [ب، ل] – 12 ا ط: هـ ط [ب، ل] – 16 ومربع: مربع [ب، ل]

مرتين. فإذا ألقينا من كلّ واحد من الجانبين مربع ب ه مرتين، يبقى في أحد الجانبين ضرب ا ه في ب ه مرتين، مساوياً لما في الجانب الآخر، وهو مربع ب ه مع مربع ب ج. ومربع ب ك مثل مجموع مربع ب ه مع مربع ك ه، أعني مربع ب ج؛ فربع ب ك مثل ضرب ا ه في ه ب مرتين، فهو مثل ضرب ضعف ب ه في ا ه. ولأن ضرب ضعف ب ه في ا ه ينقسم إلى ضرب ضعف ب ه في ا ط وإلى ضعف ب ه في ه ط؛ وضرب مجموع ط ب ب ه في ا ط ينقسم إلى ضرب / ضعف ب – ١٥ – ظ ب ه في ا ط وإلى ط ه في ا ط، فإذا ألقينا ضعف ب ه في ا ه المشترك، يبقى في أحد الجانبين ضعف ب ه في ه ط، وفي الجانب الآخر ضرب ط ه في ا ط. ولأن ب ه أعظم من نصف ا ب، فيكون أعظم من ا ه، فضعف ب ه يكون أعظم من ا ط بكثير. فضعف ب ه في ط ه أعظم من ا ط في ط ه. فإذا زدنا على كلّ واحد منهما ضعف ب ه في ا ط، يكون ضعف ب ه في جميع ا ه المساوي / لمربع ب ك ل – ١٣٣ – ظ أعظم من جميع ط ب ب ه في ا ط. فربع ب ك أعظم من ضرب جميع ط ب ب ه في ا ط. فنسبة جميع ط ب ب ه إلى ب ك أصغر من نسبة ب ك إلى ا ط. فإذا جعلنا نسبة ط ه إلى ب ك مشتركة، تكون النسبة المؤلفة من نسبة ه ط إلى ب ك ومن نسبة ط ب ب ه إلى ب ك، وهي نسبة العلم إلى مربع ب ك، أصغر من النسبة المؤلفة من نسبة ط ه إلى ب ك، ومن نسبة ب ك إلى ا ط، وهي نسبة ط ه إلى ا ط. فنسبة العلم إلى مربع ب ك أصغر من نسبة ط ه إلى ا ط. فضرب العلم في ا ط أصغر من ضرب مربع ب ك في ط ه. فالذي في جانب بقية

2 الجانب: جانب [ب، ل] – 6 في ا ط و: أثبتها ناسخ [ل] في الهامش – 18 ب ك: ك [ب، ل]

المجسّم الثاني، لِعددٍ، أصغر من الذي في جانب المجسّم الأول، فتكون البقية التي تبقى من المجسم الأول، للعددِ، أكثر من الذي يبقى من المجسّم الثانى لعددٍ.



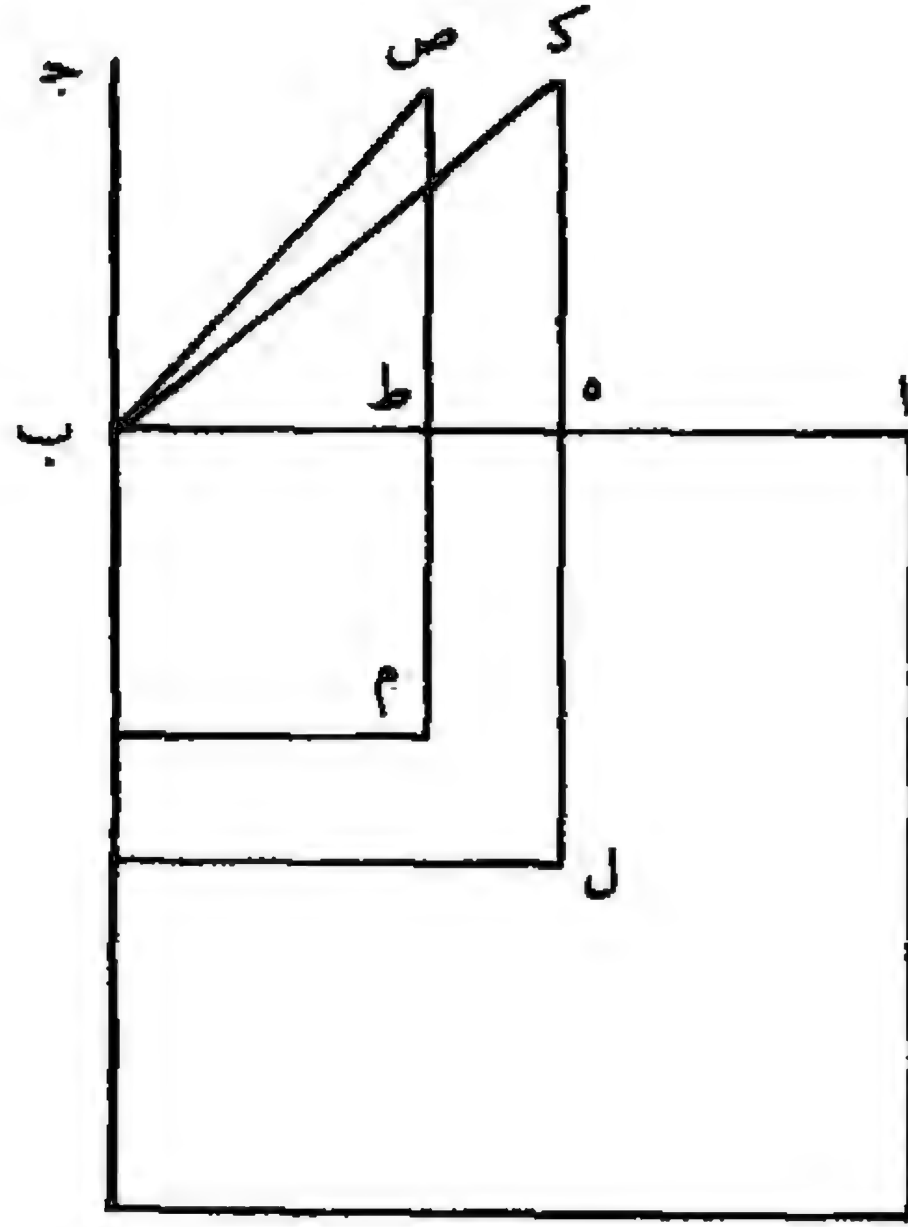
وأيضاً، فليكن ب ط أصغر من ب ه، وليكن كلّ واحدٍ من عمودي ه ك ط ص مثل ب ج. فلأن المجسم الثاني – وهو مربع ب ط في ا ط – ينقسم إلى مربع ب ط في ط ه وفي ا ه، والمجسم الأول ينقسم إلى مربع ب ط في ه ا وإلى علم ل م في ه ا، فيكون خاصة المجسّم الثاني مربع ب ط في ط ه، وخاصة المجسم الأول علم ل م في ه ا. وينقص من المجسم الثاني مربع ك ه في ط ب ومن المجسّم الأول مربع ك ه في ب ه / أعني في ط ب وفي ط ه. فلو كنا ننقص من كل واحد ل – ١٣٤ – و من المجسّمين مربع ك ه في ب ه، يكون الفضل بين البقيتين كالفضل بين المجسّمين وبين الخاصتين. فإذا كنا ننقص من المجسّم الأول مربع ك ه في ب ه، ومن المجسّم الثاني مربع ك ه في ب ط، فبقدر الزيادة التي نقصنا من المجسّم الأول وهو مربع ك ه في ه ط تقتضي الزيادة في بقية

3 لعدد: للعدد [ب، ل] – 9 ومن: ناقصة [ل] – 10 وفي: و [ل]

المجسّم الثاني، فتزيد تلك الزيادةَ على خاصة المجسّم الثاني؛ فيكون الفضل بين البقيتين – وهما العددان – كالفضل بين العلم في ا هـ، وهو خاصة المجسّم الأول، وبين ضرب مربعي ب ط هـ ك في ط هـ. فلو كان العلم في ا هـ زائداً على مجموع مربعي ب ط هـ ك في ط هـ، لكان البقية الأولى أكثر من البقية الثانية. والأمر كذلك لأنّ ضرب مجموع المربعين في ط هـ هو مربع ب ص في ط هـ؛ ولأن مربع ك ب – المساوي لضرب ضعف ب هـ في ا هـ – مساوٍ لمربعي ك هـ ب هـ، ومربع ب ص مساوٍ لمربعي ص ط ب ط، ومربع ص ط مثل مربع ك هـ، فيكون فضل مربع ك ب على مربع ص ب إنما هو فضل مربع ب هـ على مربع ب ط، وهو ضرب هـ ب ب ط في ط هـ، العلم. ونقصان ضرب هـ ب ب ط في ا هـ عن ضرب ضعف هـ ب في ا هـ المساوي لمربع ك ب، إنما هو ضرب ط هـ / في ا هـ. لكن خط ا هـ أصغر من هـ ب ب ط بكثير، فيكون ا هـ في ل – ١٣٤ – ظ هـ ط أصغر من هـ ب ب ط في هـ ط، فنقصان ضرب هـ ب ‹ب ط› في ا هـ عن مربع ك ب أصغر من نقصان مربع ص ب عن مربع ك ب. فضرب ب هـ ب ط في ا هـ أعظم من مربع ص ب. فنسبة هـ ب ب ط إلى ص ب أعظم من نسبة ص ب إلى ا هـ. فنجعل نسبة هـ ط إلى ص ب مشتركة، فيكون النسبة المؤلفة من نسبة هـ ط إلى ص ب، ومن نسبة هـ ب ب ط إلى ص ب، وهي نسبة علم هـ ب ب ط في هـ ط إلى مربع ص ب، أعظم من النسبة المؤلفة من نسبة هـ ط إلى ص ب، ومن نسبة ص ب إلى ا هـ، وهي نسبة هـ ط إلى ا هـ. فضرب العلم في ا هـ أعظم من ضرب مربع ص ب في هـ ط. فالبقية التي تبقى من المجسّم

4 الأولى: الأول [ب، ل] – 5 ضرب: بدل [ب، ل] – 8 فيكون: ناقصة [ل] – 10 العلم: كتبها ناسخ [ب] تحت السطر كأنه أضافها بعد أن نسيها / عن: أعني [ب، ل] – 11 ط هـ: كررها ناسخ [ل] – 13 هـ ب (الثانية): ب هـ [ل]

الأول أكثر ممّا يبقى من المجسّم الثاني. فقد تبين أن البقية التي تكون مع ضلع ب هـ أعظم البقايا.



وطريق استخراج ب هـ إنما يكون بمسألة: مال وعدد يعدل جذوراً. فيجعل هـ ب شيئاً، فضعفه شيئان، ويكون ا هـ عددَ الأموال إلا شيئاً، وضعف ب هـ في ا هـ يكون أشياءَ - بعدّة ضعف عدد الأموال - إلا مالَيْنِ يعدل مربعَ ب ك، وهو مثل مربع هـ ك مع مربع هـ ب وهو عدد الجذور / ومالٌ. فأشياء بعدّة ضعف ا ب إلا مالَيْنِ تعدل عدد الجذور ل - ١٣٥ - و
ومالاً. فبعد الجبْر والزيادة يكون أشياءُ بعدّة ضعف ا ب / تعدل عدد ب - ١٦ - و
الجذور وثلاثة أموال. فأشياء بعدّة ثلثي ا ب تعدل ثلث عدد الجذور ومالاً، فيستخرج المطلوب بتلك المسألة، فيخرج ب هـ المطلوب الأول.
وإن شئنا جعلنا ثلث عدد الجذور عدداً، وثلثي عددِ الأموال عددَ الجذور وعملنا سؤالاً على مسألة: مال وعدد يعدل جذوراً. واستخرجنا المطلوب على قانون تلك المسألة، فيخرج لنا أيضاً ب هـ المطلوب الأول. ثم إذا

1 مع: من [ل] - 4 شيئا (الثانية): شيء [ب، ل] - 7 إلا: ناقصة [ل] - 11 وثلثي عدد: كرر ناسخ [ل] كلمة «عدد» - 12 وعدد: ناقصة [ل]

ضربنا مربعه في ا ه يحصل المجسّم الأول، وإذا ضربناه في مربع ه ك ونقصناه من المجسَّم الأول يبقى العدد الأعظم. فإن كان العدد المسؤول أعظم من العدد الأعظم فالمسْألة مستحيلة، وإن كان مساوياً له فلها مطلوب واحد وهو خط ب ه. وإن كان أقل منه فأقول: إنه يوجد لها مطلوبان، أحدهما أعظم من ب ه، والآخر أصغر منه.

أما المطلوب الأعظم: فنُخرج ب ه على استقامته ونفصل ب م مثل ب ه، ونجعل م ع مثل ا ه. فلأن ب ه أعظمُ من نصف ا ب فهو أعظم من ا ه. فيكون ب م أيضاً أعظمَ / من ا ه وقد حصل ه ع ل - ١٣٥ - ظ معلوماً، فنجعله عددَ الأموال، وفضْلَ العددِ الأعظم على العدد المسؤول عدداً، ونعمل سؤالاً على مسألة: مكعب وأموال بعِدّة ه ع يعدل عددَ الفضل المذكور. وليكن المطلوب الذي يخرج هو خط ز ه حتى يكون مربع ز ه في ز ه وأمواله بعدّة ه ع مثل الفضل المذكور. فأقول: إن خط ب ز هو مطلوبنا في هذه المسألة.

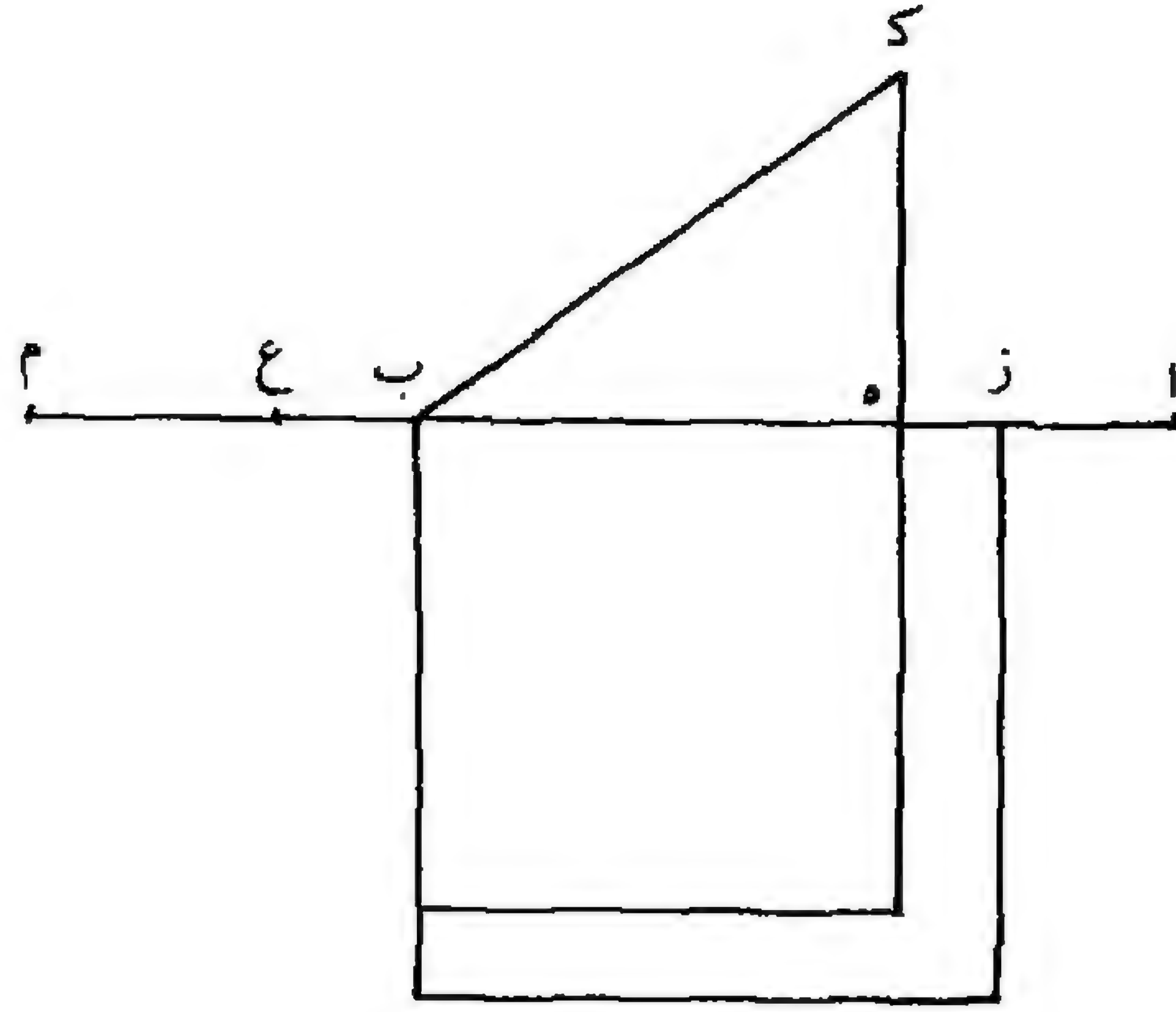
فلأنّ مربع ب ك مثل ضعف ب ه في ا ه، وهذا المسطّح في ز ه ينقسم إلى ضعف ب ه في ز ه ثم في ز ه، وضعف ب ه في ا ز ثم في ز ه، وهو مثل ضعف ب ه في ز ه ثم في ا ز، فربع ب ك في ز ه مثل ضعف ب ه في ز ه ثم في ز ه، وضعف ب ه في ز ه ثم في ا ز. لكن ضعف ب ه في ز ه ثم في ز ه مثل مربع ز ه في ه م، وضعف ب ه في ز ه ثم في ا ز مثل [مربع] م ه في ز ه ثم في ا ز. وأيضاً العلم الذي هو فضل مربع ب ز على مربع ب ه إنما هو من ضرب ضعف ب ه - أعني م ه - في ز ه، ومربع ز ه. فمضروب العلم في ا ز يكون مثل م ه في ز ه ثُمّ في ا ز مع مربع ز ه في ا ز. فإذا ألقينا مضروب م ه في ز ه ثم في ا ز من كلا الجانبين، أعني من مربع ب ك في ه ز ومن

23 ه ز: ا ز [ب، ل]

مضروب / (ل - ١٣٦ - و) العلم في ا ز، يبقى في الجانب الأول مربع ز ه في م ه. وفي الجانب الآخر مربع ز ه في ا ز. فيكون فضلُ مربع ك ب في ز ه على مضروب العلم في ا ز إنما هو فضل مربع ز ه المضروب في م ه على مربع ز ه المضروب في ا ز. وإذا زدنا على بقيتي الجانبين أعني على مربع ز ه في م ه وعلى مربع ز ه في ا ز مربّعَ ز ه في ز ه، فيصير أحدهما مربع ز ه في م ز والآخر مربع ز ه في ا ه؛ ويكون فضلُ مربع ز ه في م ز على مربع ز ه في ا ه، هو فضلَ مربع ب ك المضروب في ز ه على العلم المضروب في ا ز، لكن مربع ز ه في م ز مساوٍ لمربع ز ه في ز ع ولمربع ز ه في ع م. لكنّ م ع مثل ا ه. فإذا نقصنا مربع ز ه في م ع – أعني في ا ه – من مربع ز ه في م ز، يبقى مربع ز ه في ز ع. ففضل مربع ز ه في م ز على مربع ز ه في ا ه – وهو فضل مربع ب ك في ز ه على العلم المضروب في ا ز – هو مربع ز ه في ز ع. فلأن مربع ب ك المضروب في ز ه مثلُ العلم في ا ز مع مربع ز ه في ز ع، فإذا نقصنا من كلا الجانبين مربع ك ه في ز ه، يبقى في أحدهما مربع ب ه في ز ه معادلاً لما في الجانب الآخر، وهو العلم في ا ز مع مربع ز ه في ز ع بنقصان مربع ك ه في ز ه. / (ل - ١٣٦ - ظ) فإذا زدنا على كلا الجانبين مربع ب ه في ا ز، يصير في جانبِ العلم مربع ب ز في ا ز مع مربع ز ه في ز ع بنقصان مربع ك ه في ز ه معادلاً لما في الجانب الآخر، وهو مربع ب ه في ا ه. فإذا نقصنا من كلا الجانبين مربع ك ه في ب ه، يصير في أحد الجانبين مربع ب ز في ا ز مع مربع ز ه في ز ع بنقصان مربع ك ه في ب ز مساوياً لما في الجانب الآخر وهو مربع ب ه في ا ه بنقصان مربع

5 ا ز: ا ب [ب، ل] – 5 في ... مربع ز ه: ناقصة [ل] – 15 لما في: لمال [ب، ل]

ك ه في ه ب، وهي بقية ضلع ب ه. فيكون فضلُ بقية ضلع ب ه على بقية ضلع ب ز هو مربع ز ه في ز ع بعينه. فيكون بقية ضلع ب ز مساوية للعدد المسؤول. فإذا جعلنا ب ز ضلعاً فيكون مربعُه المالَ، وضربُ مربعه في ا ب هو الأموالَ المطلوبة؛ فينقسم الأموالُ إلى مربع ب ز في ب ز، وهو المكعب، وإلى مربع ب ز في ا ز المجسّم. فإذا نقصنا منه مربع ك ه، وهو عدد الجذور، في ب ز وهو الجذر المطلوب، تبقى البقيّة معادلةً للعدد. فالأموال معادلة للكعب والجذور والعددِ.



وأما المطلوب الأصغر: فيجعل ه ع بعينه عدد الأموال، ونجعل فضل بقية ه ب على / العدد المسؤول عدداً، ونعمل سؤالاً على مسألة: ل – ١٣٧ – و مكعب وهذا العدد يعدل أموالاً بعِدّة ه ع. وليكن المطلوب الذي يخرج خطَّ ه ط، فيكون مربعه في ه ع، الأموالِ، معادلاً لمكعبه مع عدد الفضل. فإذا نقصنا منه / مكعبه، وهو مربع ه ط في ه ط، يبقى مربع ب – ١٦ – ظ ه ط في ط ع معادلاً للعدد المذكور، وهو فضل بقية ضلع ب ه على

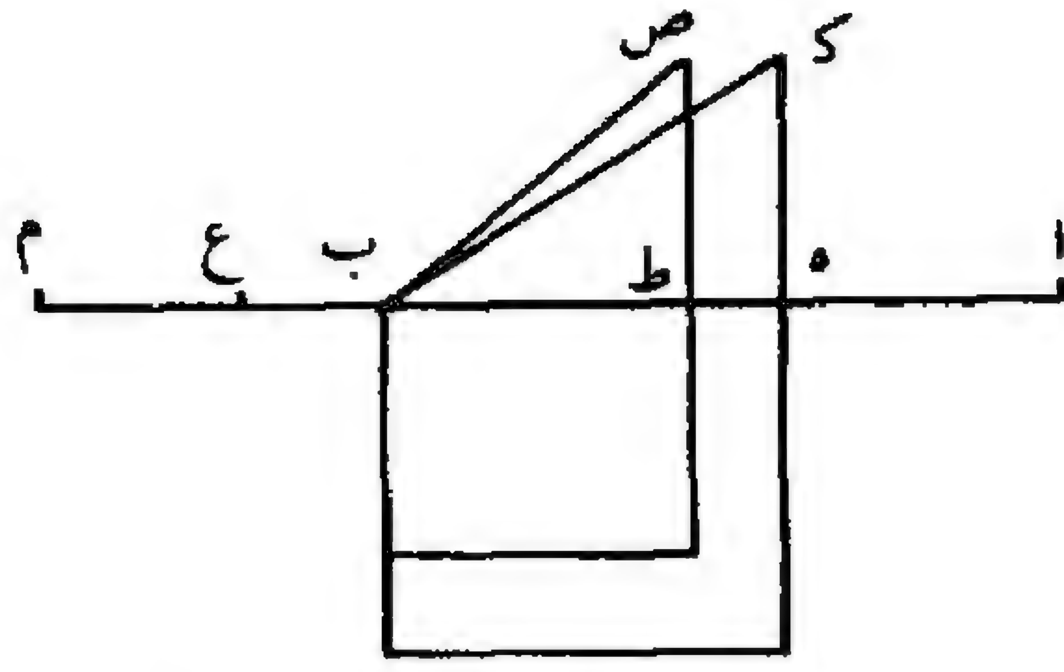
3 مساوية: مساوياً [ب]، متساويا [ل] – 4 فينقسم: وسطها مطموس [ب] – 7 والجذور: والجذر [ب، ل]

العدد المسؤول. وليكن ط ص مثل ه ك، وهو مثل ب ج أعني جذر عدد الجذور. فلأن مربع ب ك مثلُ ضعف ب ه في ا ه، أعني م ه في ا ه، فضربُ م ه في ا ه ثم في ه ط مثلُ مربع ب ك في ه ط. والعلمُ الذي هو فضل مربع ه ب على ‹ مربع › ط ب، هو مثل ضرب م ط في ط ه. فيكون ضرب العلم في ا ه ناقصاً عن ضرب م ه في ط ه ثم في ا ه بمقدار ضرب مربع ط ه في ا ه؛ فينقص عن ضرب مربع ب ك في ه ط بمربع ط ه في ا ه. ولأن مربع ب ص ينقص عن مربع ب ك بمقدار العلم المذكور، وهو ضرب ه ط في ط م، فيكون نقصان مربع ب ص في ه ط عن مربع ب ك في ه ط بمقدار ه ط في ط م ثم في ه ط، وهو مربع ه ط في ط م. فنقصان مضروب مربع ب ص في ط ه عن مضروب مربع ب ك في ه ط إنما هو مربع ط ه في ط م. وقد كان نقصان مضروب العلم في ا ه ‹ عنه › إنما / هو مربع ه ط في ل - ١٣٧ - ظ ا ه، أعني في م ع. فإذا نقصنا مربع ه ط في م ع – وهو نقصان العلم في ا ه ‹ عن مضروب مربع ب ك في ه ط › – عن مربع ه ط في م ط – وهو نقصان مربع ص ب في ط ه ‹ عن مربع ب ك في ه ط › – يبقى مربع ه ط في ط ع زيادة النقصان في مربع ص ب في ه ط؛ فيكون هو بعينه زيادةَ مضروبِ العلم في ا ه على مضروب مربع ص ب في ه ط. فيكون مضروب مربع ص ب في ه ط مع مربع ه ط في ط ع مثل العلم في ا ه. فإذا نقصنا من كلا الجانبين مربع ص ط في ه ط، يبقى في أحد الجانبين مضروب العلم في ا ه بنقصان مربع ص ط في ه ط، وفي الجانب الآخر مربع ب ط في ط ه مع مربع ه ط في

3 ه ط مثل: ممحوة إلا اللام [ب] / والعلم: العلم [ب، ل] – 9 ب ص: ص [ل] – 16 زيادة: بقي الحرفان الأخيران فقط [ب] – 18 ه ط: ممحوة [ب]، ه [ل] / فيكون ... ه ط: كررها ناسخ [ل]

ط ع ، والجانبان متعادلان. فإذا زدنا على كلا الجانبين مربع ب ط في ا هـ ، يحصل في أحد الجانبين مربع ب هـ في ا هـ بنقصان مربع ص ط في ط هـ ، والجانب الآخر مربع ب ط في ا ط ، مع مربع هـ ط في ط ع. فإذا نقصنا من كلا الجانبين مربع ص ط في ب ط ، فيصير في أحد الجانبين مربع ب هـ في ا هـ بنقصان مربع ص ط في ب هـ ، وفي الجانب الآخر مربّع ب ط في ا ط مع مربع هـ ط في ط ع ، بنقصان مربع ص ط في / ب ط ، والجانبان متعادلان. فإذا جعلنا خط ب هـ جذراً ل - ١٣٨ - و فيكون بقيته إنما هي مربع ب هـ في ا هـ ، بنقصان مربع ص ط – الذي هو عدد الجذور – في ب هـ الجذر. وإذا جعلنا ط ب جذراً فيكون بقيته إنما هي مربع ط ب في ا ط ، بنقصان مربع ص ط – وهو عدد الجذور – في ط ب الجذرِ. فيلزم أن يكون في أحد الجانبين المتعادلين بقية ضلع ب هـ وفي الجانب الآخر بقية ضلع ط ب مع مربع هـ ط في ط ع. ففضل بقية ضلع ‹ ب هـ على بقية ضلع › ب ط إنما هو مربع هـ ط في ط ع. وقد كان فضل بقية ضلع ب هـ على العدد المسؤول إنما هو مربع هـ ط في ط ع بعينه ، فيكون بقية ضلع ب ط مثل العدد المسؤول. فيكون ب ط هو الجذرَ المطلوب ؛ لأنا إذا جعلنا ب ط جذراً ، يكون مربعه هو المال ، ومربع ب ط في ا ب هو الأموال ؛ ولأنه ينقسم إلى مربع ب ط في ب ط ، وهو المكعب ، وإلى مربع ب ط في ا ط وهو المجسّم الثاني ، فإذا نقصنا منه مربع ص ط في ط ب وهو الجذور ، فيبقى البقية التي تبيّن أنها مساوية للعدد المسؤول ، فقد انقسمت الأموال إلى المكعب والجذور والعدد.

1 متعادلان: معادلان [ب، ل] – 15 ب ط : ر ط [ب، ل] – 17 هو (الأولى): كتبها ناسخ [ب] كأنها «نر» وهكذا رسمها ناسخ [ل]



واعلم أن المطلوبات الممكنة في هذه المسألة لها نهاية / في العظم ل - ١٣٨ - ظ والصغر.

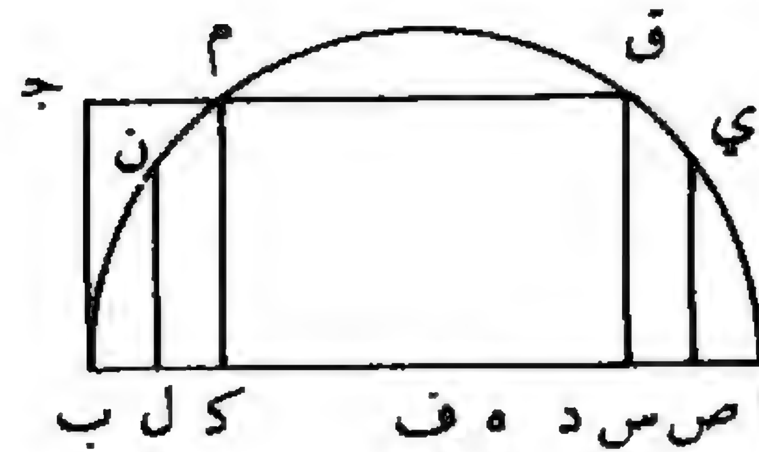
فليكن ا ب عددَ الأموال، ونعمل عليه نصف دائرة على مركز ف، وب د ثلثي ا ب. وب ه هو الضلع الذي لأعظم عددٍ يمكن. وقد تبيّن أن ضلع ب ه أبداً يكون أعظم من ب ف وأصغر من ب د. فنقطة ه أبداً تكون واقعة فيما بين نقطتي د ف وهو المنتصف وموضع الثلث؛ وقد تبيّن أن ب ج، وهو ‹ جذر › عدد الجذور، يكون أصغر من نصف ا ب. فليكن كل واحدٍ من عموديْ س ق ك م مثل ب ج؛ فلأنه قد تبيّن أن مربع ك م في ب ك مثل مربع ب ك في ك ا، فإن فرض ب ك جذراً فيكون المجسّمُ المذكور - المعادلُ للجذور والعدد - هو مربع ب ك في ا ك؛ ومربعُ ك م - الذي هو عدد الجذور - في ب ك الجذر مساوياً لهذا المجسّم، فالجذور مساوية للمجسم الذي يجب أن يساوي مجموع الجذور والعدد؛ هذا خلْف. فلا يجوز أن يكون ب ك جذراً.

وكذلك لو قدرنا ب ل أصغر من ب ك، وأخرجنا عمود ل ن، فلا يجوز أن يكون ل ب جذراً، لأن المجسّم المعادل للجذور والعدد إنما هو مربعُ ب ل في ا ل، وهو مساوٍ لمربع ل ن في ب ل؛ ومربع ل ن أصغر من مربع ك م، فمربع ب ل في / ا ل يكون أصغر من مربع ك م، وهو ل - ١٣٩ - و

3 نصف: ممحوة [ب] - 4 هو: وهو [ب، ل] - 5 فنقطة: ممحوة [ب] - 7 الجذور: الأموال [ب، ل] - 10 هو: وهو [ب، ل] - 11 في ب ك الجذر: ناقصة [ل] / مساوياً: مساو [ب، ل] - 12 فالجذور مساوية: فالجذر مساو [ب، ل] - 15 ل ب: ل ن [ب، ل] - 16 ل ن (الثانية): ل ر [ب، ل]

عدد الجذور، في ب ل الجذر. فالجذور أكبر من المجسّم المذكور، وقد كان يجب أن تكون أصغر منه بمقدار العدد. فقد تبيّن أنه لا يوجد ضلع مطلوب مثل ب ك ولا أصغر منه.

وأقول أيضاً: إنه لا يوجد ‹ ضلع مطلوب › بمقدار ا ك ولا أعظم منه. وإلا فيفرض ا ك جذراً؛ فلأن ق س مثل م ك فـ ا س مثل ك ب. فخط ب س مثل ا ك. ولأنه قد تبيّن أن نسبة مربع ب س / إلى مربع ب – ١٧ – و ق س كنسبة ب س إلى ا س، فيكون مربع ب س – الجذر – في ا س – وهو المجسّم المعادل للجذور والعدد – مثل مربع ق س – الذي هو عدد الجذور – في ب س الجذر. لكن مربع ق س في ب س هو مبلغ الجذور؛ فمبلغ الجذور مساوٍ للمجسّم الذي كان يجب أن يكون أعظم من مبلغ الجذور بمقدار العدد؛ هذا خلْف، فيستحيل أن يكون ب س جذراً، فكذلك ا ك المساوي له.



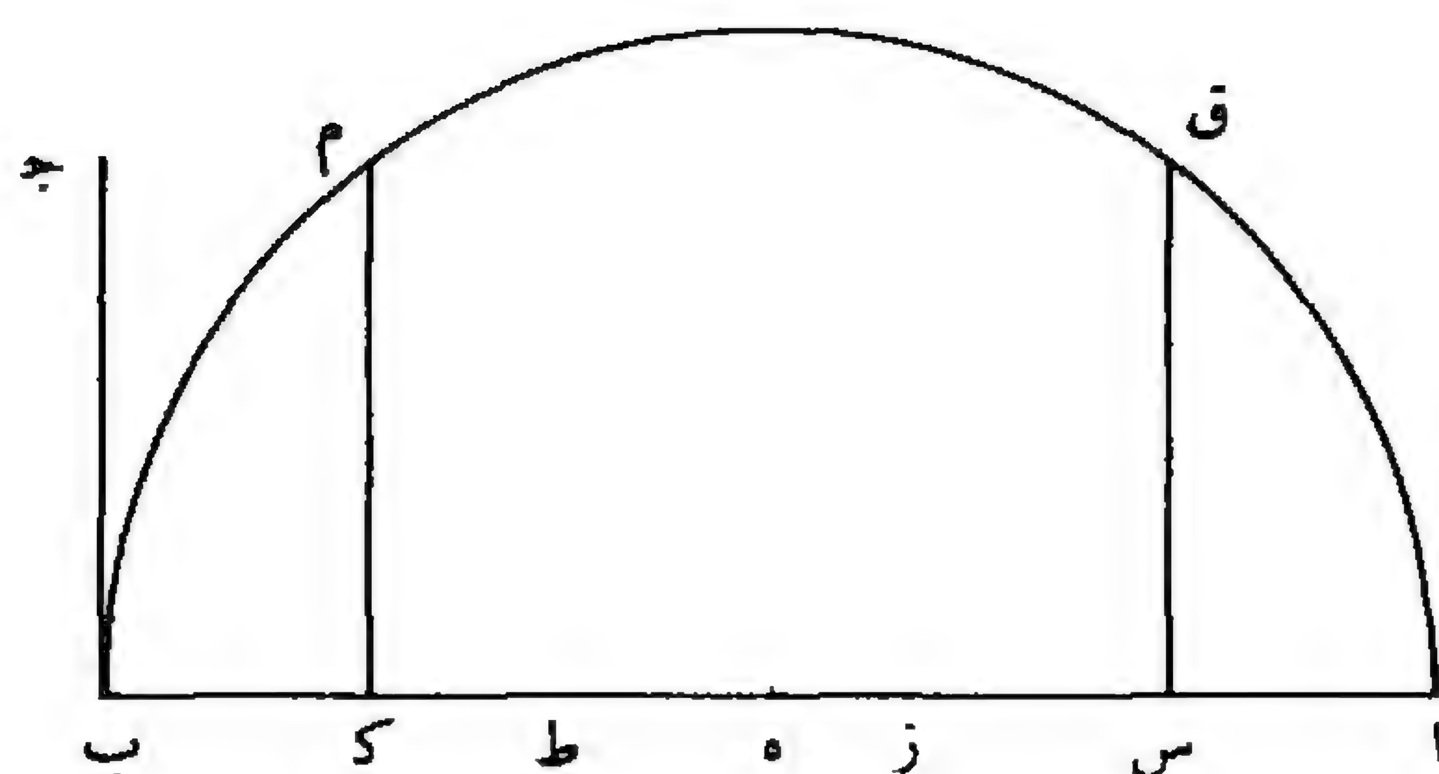
وكذلك لو قدرنا ب ي أعظم من ب س وأخرجنا عمود ي ص، فلا يمكن أن يكون ي ب جذراً، لأن مربع ب ي – الضلع – في ا ي – وهو المجسّم المعادل للجذور والعدد – يكون مساوياً لمربع ي ص في ب ي الجذور. لكن مربع س ق – وهو عدد الجذور – / أعظم من مربع ل – ١٣٩ – ظ ي ص، فمربع س ق في ب ي – وهو الجذور – أعظم من مربع ي ص في ب ي. فالجذور أعظم من المجسّم المعادل للجذور والعدد، هذا خلْف. فلا يمكن أن يكون ب ي جذراً.

1 فالجذور: فالجذر [ب، ل] / أكبر: مهملة في [ب]، أكثر [ل] / المجسم: ممحوة وكذلك الحروف الأولى من الكلمة التالية [ب] – 12 فكذلك: فلذلك [ب، ل] – 16 الجذور (الأولى): الجذر [ب، ل] – 17 فمربع س ق ... مربع ي ص: ناقصة [ل]

فقد تبيّن أن جميع المطالب الممكنة في هذه المسألة إنما هي أعظم من ب ك وأصغر من ا ك. فجميع الأضلاع المطلوبة: أحد طرفيها نقطة ب وطرفها الآخر فيما بين نقطتي ك س. ثم نقول: إن ب ز الذي استخرجناه يكون أبداً أصغر من ب س وكذا ب ط يقع أعظمَ من ب ك حتى لا يلزم الاستحالة من هذه الجهة.

أما الأول: فلأنه قد تبيّن أن فضل بقية ضلع ب ه على العدد المسؤول قد كان مساوياً لمضروب مربع ز ه في ز ع، ومجموعها أعني العدد المسؤول مع التفاوت بين المسؤول ‹ وبين › الأعظم مثلُ بقية ضلع ب ه. فبقية ضلع ب ه أعظم من مربع ز ه في ز ع. وقد تبيّن أن مربع ب ز في ا ز – المجسّم – مع مربع ز ه في ز ع منقوصاً منهما مضروب ‹ مربع › ب ج – وهو عدد الجذور، أعني مربع س ق العمود – في ب ز – الجذر – مساوياً لبقية ضلع ب ه. فإذا كان مربع ز ه في ز ع وحده أقل من بقية ضلع ب ه: فإذا زيد عليه مربع ب ز في ز ا – المجسّم –، ونقص منه مربع س ق – العمود – / في ب ز الضلع، ل – ١٤٠ – و فيبقى مساوياً لبقية ضلع ب ه؛ فيكون الذي زيد عليه، وهو مربع ب ز في ا ز المجسّم، يكون أكثر من الذي ينقص منه وهو مربع س ق – العمود – في ب ز. وقد تبيّن أن مربع س ق في ب ز أصغر من مربع ب ز في ا ز. فلو كان ب ز مثل ب س أو أعظم منه، لكان مربع ب ز في ا ز مساوياً لمربع س ق – العمود – في ب ز أو أصغر منه. فقد تبيّن أن ب ز يكون أصغر من ب س.

4 ب ط: ممحوة [ب]، ه ط [ل] – 10 ز ه: ناقصة [ل] – 14 العمود: رسم ناسخ «ب» فوقها علامة لبيان إضافة في الهامش، وفيه نقرأ ما يبدو أنه «به أو منه». فالكلمة غير واضحة ولا محل لها. ولهذا لم يعرها ناسخ «ل» أي اهتمام. / ب ز: م ر [ب، ل] – 15 ب ه: الهاء ناقصة [ل] – 17 أن مربع: ناقصة [ل] – 19 أصغر: أعظم [ب، ل]



وأما الثاني: فلأن مربع ه ط في ط ع أصغر من بقية ضلع ب ه، وإذا زيد عليه مربع ب ط في ا ط – المجسّم – ونقص منه مربع م ك في ب ط، يكون الباقي مساوياً لبقية ضلع ب ه. فالذي زيد عليه قد كان أكثر مما نُقص منه. فمربع ب ط في ا ط – المجسّم – أعظم من مربع م ك في ب ط. فلو كان ب ط مثل ب ك أو أصغر لكان مربع ب ط في ا ط مثل مربع م ك في ب ط أو أصغر، فـ ب ط أعظم من ب ك.

واعلم أن طريق معرفة كلّ واحدٍ من المطلوبين، أعني الأعظم والأصغر: باستخراج التفاوت بينه وبين المطلوب الأول وهو ب ه.

أما الأول: فلأن العدد الأعظم هو من ضرب مربع ب ه في ا ه منقوصاً منه ه ب في مربع ه ك / – الذي خرج عموداً على ا ب مساوياً ل – ١٤٠ – ظ لجذر عدد الجذور –، والعددَ المسؤول من ضرب مربع ب ز في ا ز منقوصاً منه ضرب مربع ك ه في ب ز، فخاصّةُ المجسّم الأول هو مربع ب ه في ه ز، وخاصة المجسّم الثاني هو ضرب ز ب ب ه في ه ز، ثم في ا ز، وهو العلم في ا ز. والذي ينقص من المجسّم الثاني أكثر مما ننقصه من المجسّم الأول. فإذا زدنا تلك الزيادة على خاصةِ المجسّم الأول، يكون

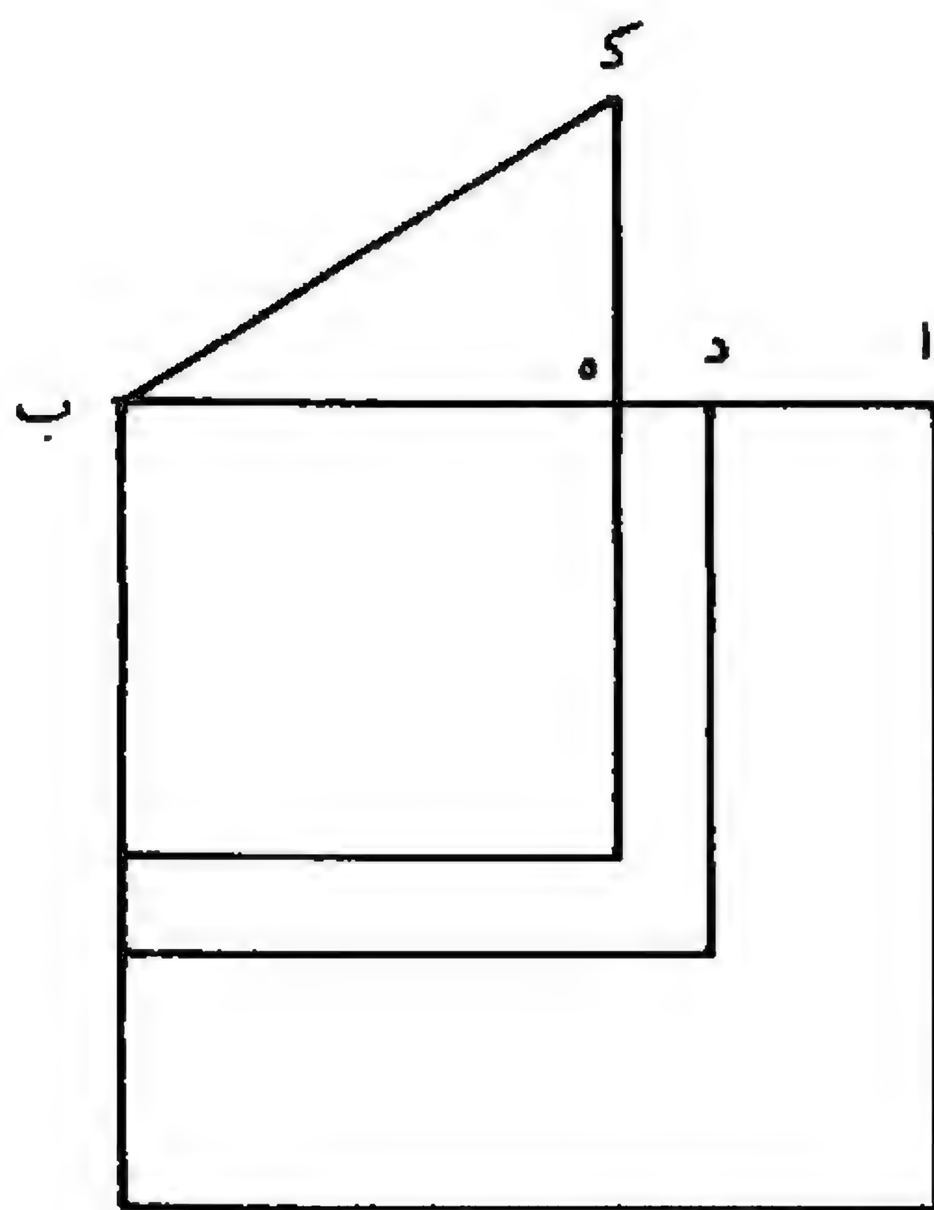
3 ب ط: ا ط [ب، ل] – 6 في ا ط: فوق السطر [ل]

التفاوت بين الحاصل وبين خاصة المجسّم الثاني هو التفاوت بين بقيتي المجسّمين، وهما العددان، أعني العدد الأعظم والمسؤول، والتفاوتُ بينهما معلومٌ. فيكون ضرب ب‌ه ب ز ‹ في ب ه ›، ثم في ا ز، وهو العلم في ا ز، خاصة المجسّم الثاني مع عدد التفاوت بين العدد الأعظم والمسؤول مثلَ خاصة المجسم الأول مع الزيادة المذكورة، ومجموعها ‹ مربع › ب ك في ه ز. ولأن ب ه – وهو المطلوبُ الأول – معلوم؛ فربعه معلوم، ومربع ك ه وهو عدد الجذورِ معلومٌ. فربع ك ب عدد معلوم. فنجعل ه ز شيئاً؛ فيكون في جانب / المجسّم الأول أشياءُ بعِدّة مربع ك ب، فهو مضروبُ مربعِ ك ب في ه ز الشيء. أما خاصّة المجسّم الثاني، فالعلم هو ز ب ب ه – وهو ضعف عدد ب ه وشيء – في / ه ز الشيء، فيكون أشياءَ بعدّة ضعف ب ه ومالاً. وإذا ضربناه في ا ز وهو عدد ا ه إلا شيئاً، يصير أشياء بعدّة ضعف سطح ب ه في ا ه إلا أموالاً بعدة ضعف ب ه إلا ا ه وإلا كعباً، وهي خاصة المجسّم الثاني، ومع عدد التفاوت، يعدل أشياء بعدّة مربع ك ب. فإذا جبرنا وقابلنا وألقينا الأشياء من الجانبين لتساويها ضرورةً – لأنّ ضرب ضعف ب ه في ا ه مثل مربع ك ب – فيصير أموالاً بعدّة ضعف ب ه بنقصان ا ه، وكعباً، يعدل عدد التفاوت؛ فينقص ا ه من ضعف ب ه، فيكون الباقي عددَ الأموال. فيستخرج المطلوب على مسألة: مكعب وأموال يعدل عدداً، فيخرج ه ز الشيء فنزيده على ب ه فيحصل ب ز وهو الجواب الأعظم.

ب – ١٧ – ظ

ل – ١٤١ – و

3 ب ز: رسم ناسخ «ب» فوقها العلامة المعروفة التي ترمز إلى إضافة عبارة ناقصة في الهامش، ولكن نسي إضافة ما أراد الإشارة إليه، ولعله ما أثبتناه – 11 ا ه: ناقصة [ل] – 12 شيئا: شيء [ب، ل] – 15 لأن: أن [ب، ل]

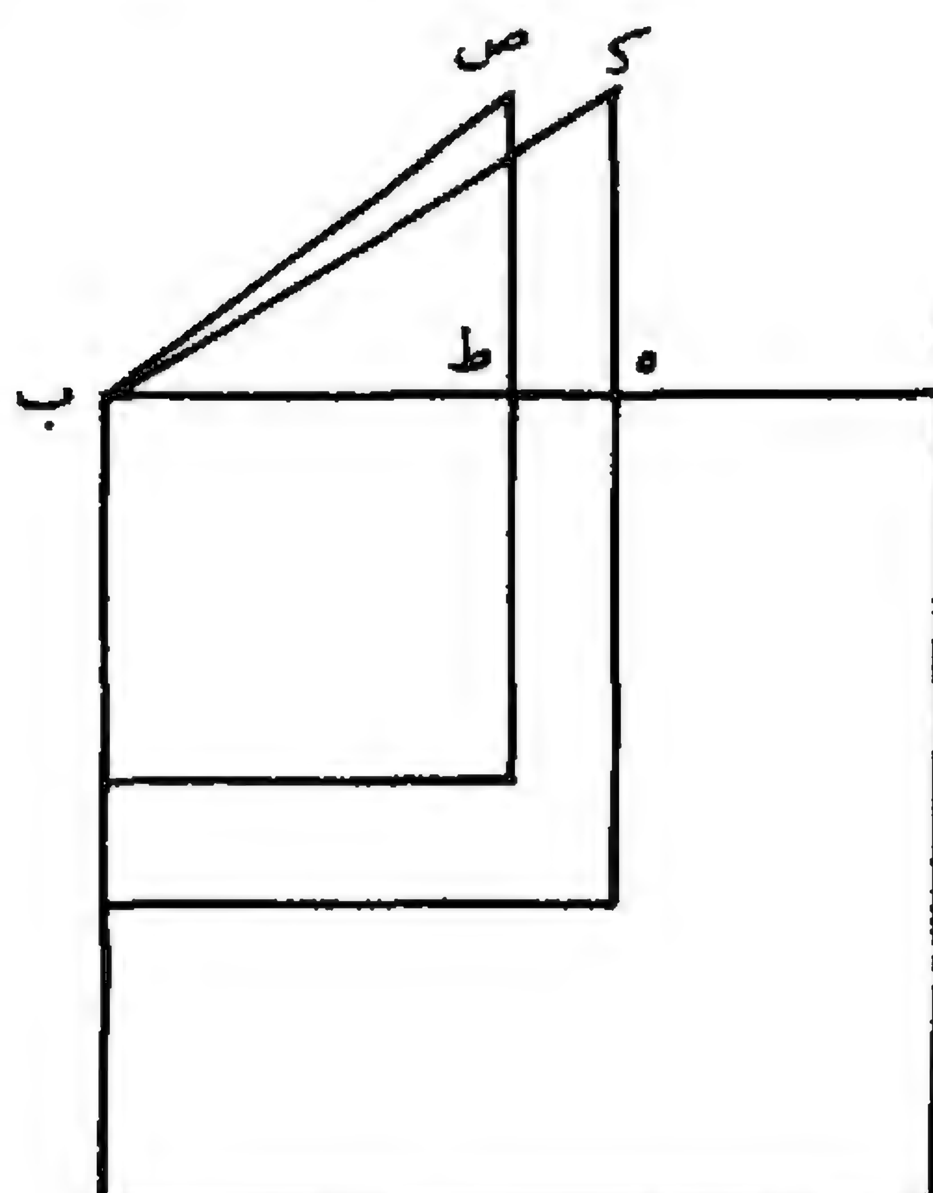


وأما الثاني: فلأن المجسّم الثاني هو من ضرب مربع ب ط في ا ط، فإذا نقص منه الجذور وهي من ضرب مربع ك ه في ب ط، يبقى العدد المسؤول. فتبيّن من البيان المذكور أن فضل العدد الأعظم، الذي هو بقية المجسّم الأول، على العدد المسؤول هو فضل خاصة المجسّم الأول، وهو علم ه ب ب ط في ه ط مضروباً في ا ه، على المركّب من خاصة المجسّم الثاني، مع ضرب عدد الجذور في ه ط، وهو مربع ب ص / في ه ط، لأن ط ص مثل ه ك. فمربع ب ص في ه ط مع عدد التفاوت يكون مساوياً لخاصة المجسّم الأول. فنجعل ه ط شيئاً، فالعلم من ضعف ب ه إلا شيئاً في الشيء. فيكون أشياء بعدّة ضعف ه ب إلا مالاً، ومضروبها في ا ه يصير أشياء بعدّة مسطح ضعف ب ه في ا ه إلا أموالاً بعدّة ا ه، وهو خاصة المجسّم الأول. أما الذي في خاصة المجسّم الثاني: أما مربع ب ط وهو عدد ب ه إلا شيئاً في مثله، فيكون عدداً مثل مربع ب ه ومالاً إلا أشياء بعدّة ضعف ب ه، ومربع ص ط – أعني مربع ه ك، وهو مثل مربع ب ك ‹إلا مربع ب ه –، فمربع ب ط مع مربع ل – ١٤١ – ظ

12 شيئا: شيء [ب، ل]

ص ط مثل مربع ب ك› ومالاً إلا أشياء بعدّة ضعف ب هـ. وإذا ضربناه في هـ ط الشيء، حصل أشياء بعدّة مربع ب ك وكعب وإلا أموالاً بعدّة ضعف ب هـ، وهو مع عدد التفاوت يعدل خاصّةَ المجسّم الأول، وهي أشياء بعدّة سطْح ضعف ضرب ب هـ في ا هـ إلا أموالاً بعدّة ا هـ. فبعد الجبر والمقابلة وإلقاء الأشياء من الجانبين لتساويها؛ يكون كعباً مع عدد التفاوت يعدل أموالاً بعدّة ضعف ب هـ إلا أموالاً بعدّة ا هـ، فننقص من ضعف ب هـ عدد ا هـ، فيكون الباقي عدد الأموال، فنستخرج المطلوب على مسألة: مكعب وعدد يعدل / أموالاً، فيخرج هـ ط الشيء، فننقصه من ب هـ، فيبقى ب ط وهو المطلوب الأصغر. ل – ١٤٢ – و

carrés



فحاصل الكلام في هذه المسألة: أن جذر عدد الجذور إن كان مساوياً لنصف عدد الأموال أو أكثر؛ فالسؤال مستحيل، كما في قولنا: مكعب وستة عشر جذراً وعشرون عدداً يعدل ثمانية أموال. وإن كان أقل منه، فنجعل ثلث عدد الجذور عدداً وثلثي عددِ الأموال جذوراً، ونستخرج المطلوب على مسألة: مال وعدد يعدل جذوراً، فما خرج فهو المطلوب

3 أموالاً: أموال [ب، ل] – 13 جذوراً: المقصود «عدد الجذور».

الأول. فننقصه من عدد الأموال، ونضرب الباقي في مربع المطلوب الأول، فما حصل فهو المجسّم. ثم نضرب المطلوب الأول في عدد الجذور، وننقص المبلغ من المجسّم، فما بقي فهو العدد الأعظم. فإن كان العدد المسؤول أكثر من العدد الأعظم، فالسؤال مستحيل؛ وإن كان مساوياً له فهو ممكن وله جواب واحد، وهو المطلوب الأول؛ وإن كان أقل منه فهو مُمكن، وله جوابان: أحدهما أعظم من المطلوب الأول، والآخر أصغر منه. فننقص العدد المسؤول من العدد الأعظم، ونجعل الباقي عدداً، وننقص المطلوب الأول من عدد الأموال، وننقص الباقي / من ضعف ل – ١٤٢ – ظ المطلوب الأول، ونجعل الباقي عدد أموالٍ. فإن استخرجنا المطلوب على مسألة: مكعب وأموال يعدل عدداً، فنزيد المطلوب الذي يخرج على المطلوب الأول، فما حصل فهو الجواب الأعظم. وإن استخرجْنا المطلوب على مسألة: كعب وعدد يعدل أموالاً، فننقص المطلوب الذي يخرج من المطلوب الأول، فما بقي فهو الجواب الأصغر. وذلك ما أردنا بيانه.

المسألة الخامسة: مكعب وعدد يعدل أموالاً وجذوراً.

فعدد الأموال إما أن يكون مثل ‹ جذر › عدد الجذور، أو أعظم منه، أو أصغر منه.

أما القسم الأول: فإن كان العددُ المسؤول أكثر من مكعبِ عددِ الأموال، فالسؤال مستحيل. وليكن $\overline{\text{ا ب}}$ جذرَ عددِ الجذور و $\overline{\text{ز ج}}$ عددَ الأموال وهو مثل $\overline{\text{ا ب}}$. فالجذر المطلوب إذا ضرب في مربع $\overline{\text{ا ب}}$ حصل مبلغ الجذور، وإذا ضرب مربعه في $\overline{\text{ز ج}}$ وزيد عليه، كان المجموع مساوياً

2 فما: كتب ناسخ [ب] الفاء في الكلمة فبدت كأنها ميم. ورسم ناسخ [ل] «مما» – 3 فإن: ممحوة [ب] – 13 الجواب: ممحوة [ب] – 14 المسألة الخامسة: ناقصة [ل] – 18 $\overline{\text{ز ج}}$: $\overline{\text{ر خ}}$ [ب، ل] – 20 مربعه في: في مربع [ب، ل]

للمكعب مع العدد المسؤول. فأقول: / إن أعظم عدد يزاد على مكعب المطلوب حتى يصير معادلاً للأموال والجذور إنما هو مكعب ا ب، حتى لو كان العدد المسؤول أكثر من مكعبه يكون السؤال مستحيلاً. ب – ١٨ – و

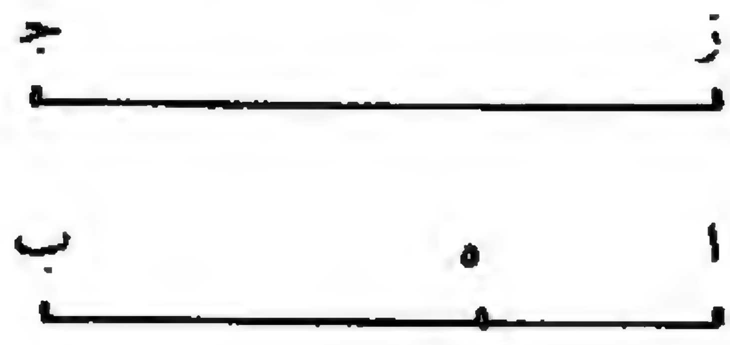
وبيان ذلك: أن أيّ ضلع / يُفرض أعظمَ أو أصغر من ا ب، ويُضرب مربّعه في ز ج، ثم يُضرب في مربع ا ب، ويزاد عليه، فالعدد الذي يمكن أن يجمع مع مكعبه حتى يصير مساوياً لمجموع الأموال والجذور يكون أقلَّ من مكعب ا ب. ل – ١٤٣ – و

وليكن ب د ضلعاً أعظم من ا ب، فيكون مربع ب د في ا ب الأموالَ المطلوبةَ؛ لأن ا ب مثل ز ج، ومربعَ ب د في ب د هو المُكعب، فيكون فضلُ المكعب على الأموال هو مربع ب د في ا د؛ فيجب أن يكون فضل الجذور على العدد أيضاً مثلَه، حتى إذا نقصنا من الجذور مربع ب د في ا د يكون الباقي مثلَ العدد؛ لكن الجذور هي مربع ا ب في ب د. فإذا نقصنا منه مربع ب ا في ا د، يبقى مكعب ا ب؛ وإذا نقصنا من الجذور مربع ب د في ا د، يكون الباقي – وهو العدد – أقل من مكعب ا ب بمقدار علَم د ب ب ا في ا د ‹ مضروباً في ا د ›. فالعدد الذي يجب أن يكون مع ب د حتى تصح المسألة أقلُّ من مكعب ا ب.

وليكن ب ه ضلعاً أصغر من ا ب، فيكون الأموالُ هي مربع ب ه في ا ب، وفضله على المكعب هو مربع ب ه في ا ه، فيكون فضلُ

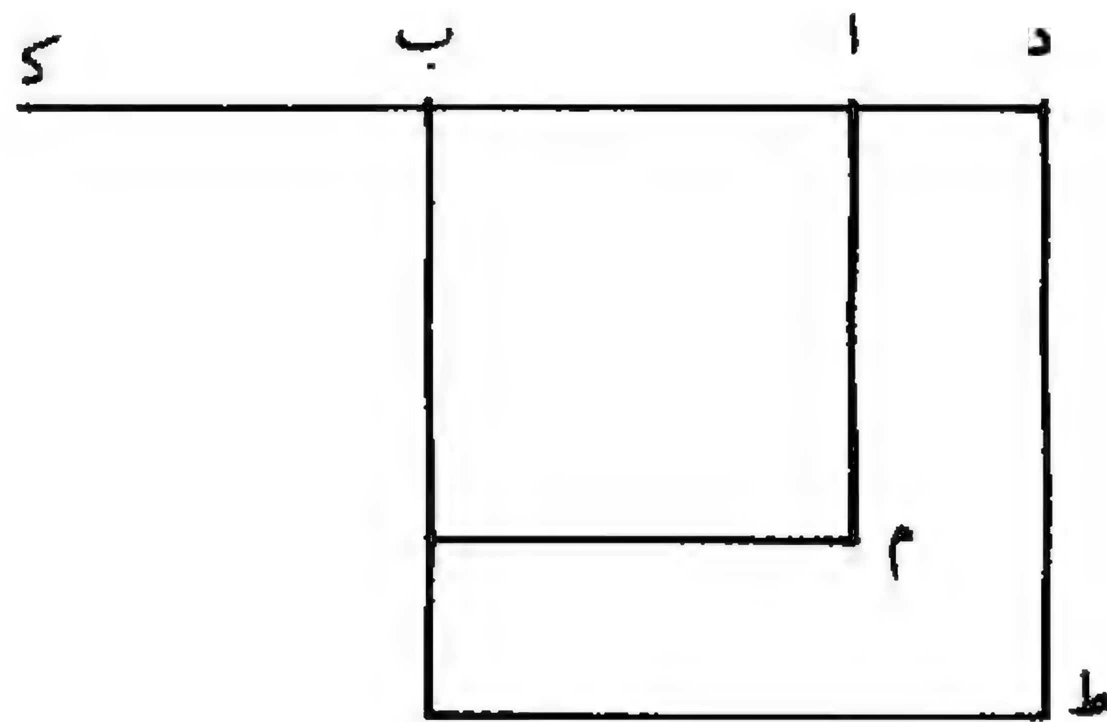
19 في ا ب: في ا ه [ب، ل]

العدد على الجذور أيضاً مثلَ مربع ب ه في ا ه، حتى لو زدنا على الجذور مربع ب ه في ا ه صار معادلاً / للعدد. لكن الجذور هي مربع ا ب في ب ه. فهي تنقص عن مكعب ا ب بمربع ا ب في ا ه، وتنقص عن العدد بضرب مربع ب ه في ا ه. فيلزم أن يكون العدد أقلّ من مكعب ا ب بمقدار علم ا ب ب ه في ا ه، مضروباً في ا ه. فالعدد الذي يجب أن يكون مع ضلع ب ه حتى تصح المسألة أقلُّ من مكعب ا ب. ل - ١٤٣ - ظ



فقد تبيّن أن أعظم عدد يمكن في هذا القسم من هذه المسألة إنما هو مكعب ا ب. فإنْ كان العدد المسؤول أعظمَ من مكعب ا ب، فتكون المسألة مستحيلة؛ وإن كان مثلَ مكعب ا ب فهي مُمكنة ولها مطلوب واحد، وهو خط ا ب الذي هو مثل عدد الأموال؛ وإن كان أقلّ منه فلها مطلوبان: أحدهما أعظم من ا ب، والآخر أصغر منه.

أما المطلوب الأعظم: فنجعل ب ك مثلَ ا ب، ونجعل ا ك عددَ أموالٍ، ونجعل فضل مكعب ا ب، وهو العدد الأعظم، على العدد المسؤول عدداً، ونعمل سؤالاً على: مكعبٍ وأموال يعدل عدداً. وليكن المطلوب الذي يخرج هو ا د. فأقول: إن د ب هو مطلوبنا في هذه المسألة.



3 عن مكعب: من مكعب [ب، ل]

لأن مربع د ا في د ك هو مثل ضرب د ب ب ا في ا د، مضروباً في ا د، وهو علم ط م مضروباً في ا د، فمع العدد المسؤول / يعادل مكعبَ ا ب. فإذا زدنا على كلا الجانبين مربع ا ب في ا د، يصير في أحد الجانبين مربع ب د في ا د مع العدد المسؤول، وفي الجانب الآخر مربع ا ب في ب د، والجانبان متعادلان. فإذا زدنا على كلا الجانبين مربع د ب في ا ب، يصير في أحد الجانبين مربع ب د في ب د، وهو مكعب ب د، مع العدد المسؤول، وفي الجانب الآخر مربع ا ب في ب د مع مربع ب د في ا ب. فالعدد المسؤول مع مكعب ب د مثل مربع ا ب في ب د مع مربع ب د في ا ب. فإذا جعلنا ب د جذراً، فيكون ضربُ مربع ا ب في ب د جذوراً، وضربُ مربع ب د في ا ب أموالاً؛ فالجذور والأموال مثل المكعب والعدد. ل – ١٤٤ – و

وأقول أيضاً: إن هذا المطلوبَ له نهايةٌ في العِظَم.

لأنه قد تبيّن أن فضل مكعب ا ب على العدد المسؤول هو مربعُ ا د في د ك، فيكون مربع ا د في د ك أصغرَ من مكعب ا ب ضرورةً، فيكون د ا أصغر من ا ب؛ لأنه لو كان مساوياً له أو أعظم منه، لكان مربع د ا – ‹وهو مساوٍ لمربع ا ب› أو أعظم منه – في ‹د ك وهو› ثلاثة أمثال ا ب أو أعظم منه، [أو] أصغرَ من مكعب ا ب، هذا خلْف. فـ د ا أصغر من ا ب؛ وهذا المطلوب مركب من د ا ومن ا ب، فهو لا يبلغ ضعف ا ب، فله نهاية في العظم ضرورة.

/ وأما المطلوب الأصغر: فنجعل فضلَ مكعب ا ب على العدد المسؤول عدداً و ا ك عددَ الأموال، ونعمل سؤالاً على مسألة: مكعب ل – ١٤٤ – ظ

9 مع مربع ... ا ب: ناقصة [ل] – 10 ا ب: ا ز [ب، ل] / جذوراً: ممحوة [ب]، جذرا [ل] – 13 ا ب: ا ز [ب، ل] – 19 يبلغ: أولها مطموس [ب]، بلغ [ل]

وعدد يعدل أموالاً. وليكن المطلوب الذي يخرج هو خطّ ا هـ حتى يكون مربع ا هـ في هـ ك مثلَ عدد الفضل؛ فأقول: إن هـ ب هو مطلوبنا في هذه المسألة.

لأن مكعب ا ب ينقسم إلى مربع ا ب في ب هـ، وإلى مربع ا ب في ا هـ، والقسم الثاني ينقسم إلى مربع ب هـ في ا هـ، وإلى علم ط م في ا هـ. لكن العلم في ا هـ من ضرب ا ب ب هـ في ا هـ، ثم في ا هـ، وهو مثل مربع ا هـ في هـ ك. فكعب ا ب مثل مربع ا ب في ب هـ مع مربع ب هـ في ا هـ ومربّع ا هـ في ك هـ. لكن مكعب ا ب أيضاً مثلُ العدد مع مربع ا هـ في هـ ك. فإذا ألقينا مربع ا هـ في هـ ك المشترك، يبقى العدد مساوياً لمربع ا ب في ب هـ مع مربع ب هـ في ا هـ. فإذا جعلنا ب هـ جذراً، يكون مكعبه مع العدد مثلَ مربع ب هـ في ب هـ ومربع ب هـ في ا هـ، ومربع ا ب في ب هـ؛ ومجموع القسمين الأولين مثلُ مربع ب هـ في ا ب. فالمكعب مع العدد مثل مربع ب هـ / في ا ب، وهو الأموال، ب – ١٨ – ظ مع مربع ا ب في ب هـ وهو الجذور. / فالأموال مع الجذور مثلُ المكعب ل – ١٤٥ – و والعدد.

وهذا المطلوبُ للبيانِ: ‹ له › نهايةٌ في الصغر.

9 فإذا ألقينا ... هـ ك: ناقصة [ل] – 14 مربع: ناقصة [ل] – 16 للبيان: مطموسة [ب]، لبيان [ل]

لأن ب ه بأيّ مقدارٍ يُفرض، يكون الأموالُ، وهي مربع ب ه في ا ب، أعظمَ من مكعب ب ه بمقدار مربع ب ه في ا ه؛ فالعدد أعظم من الجذور، - وهي ب ه في مربع ا ب - بمقدار مربع ب ه في ا ه. فإذا زدنا مربع ب ه في ا ه على مضروب ب ه في مربع ا ب، وجعلناه عدداً، فيصحّ منه المسألة، ويكون الجذر المطلوب هو ب ه في أي حدٍّ يكون من الصغر.

أما استخراج كل واحدٍ من المطلوبين، أعني الأعظم والأصغر، ‹ فيكون › باستخراج التفاوت بينه وبين ا ب الذي هو مثل عدد الأموال.

أما الأعظم: فقد تبيّن أن فضل العدد الأعظم، وهو مكعب ا ب، على العدد الذي يكون مع ضلع ب د، هو ضرب ب د ب ا في ا د، مضروباً في ا د؛ وهو العلم في ا د. فيجعل ا د شيئاً، فالعلم من ضرب ضعف ب ا وشيءٍ في الشيء، فيكون أشياءَ بعِدّة ضعف ا ب ومالاً، ومضروبُه في ا د الشيءِ يكون أموالاً بعِدّة ضعف ا ب، وكعباً، يعدل عدد التفاوت. فيستخرج المطلوب بتلك المسألة، فيخرج لنا ا د الشيءُ، فنزيده على ا ب الذي هو مثل عدد الأموال، / فيحصل ب د. ل - ١٤٥ - ظ

ب ا د

وأما الأصغر: فقد تبيّن أن فضل العدد الأعظم على العدد الذي مع ضلع ب ه، هو ضرب ا ب ب ه في ا ه مضروباً في ا ه. فنجعل ا ه شيئاً، فيكون ا ب ب ه في ا ه، وهو ضعف ا ب إلا شيئاً، في ا ه الشيء، يكون أشياءَ بعدّة ضعف ا ب إلا مالاً، ومضروبُها في ا ه الشيء، يكون أموالاً بعدّة ضعف ا ب إلا كعباً يعدل عدد التفاوت.

5 ب ه: فوق السطر [ل] - 10 هو ضرب: كررها ناسخ [ل] / ب ا: ناقصة [ل] - 18 ا ه (الأولى): ممحوة [ب] - 19 ا ب: ا ه [ب، ل]

فنزيد الكعب على الجانبين. فكعب وعدد التفاوت يعدل أموالاً بعدّة ضعف ا ب. فيستخرج المطلوب بتلك المسألة، فيخرج ا ه الشيء، فننقصه من عدد الأموال، فما بقي فهو المطلوب الأصغر.

ا ه ب

فحاصل الكلام في هذا القسم أن نضرب عدد الأموال في مثله، [ونضرب المبلغ في مثله] ونضرب المبلغ في عدد الأموال فما حصل فهو العدد الأعظم. فإن كان العدد المسؤول أكثر من العدد الأعظم فالمسألة مستحيلة؛ وإن كان مساوياً له فهي ممكنة ولها جواب واحد، وهو عدد الأموال؛ وإن كان أقلّ منه فهي أيضاً ممكنة ولها جوابان: أحدهما أعظم من عدد الأموال، والآخر أصغر منه. فننقص العدد المسؤول من العدد الأعظم، ونجعل الباقي عدداً، ونجعل ضعف عدد الأموال المسؤولة عددَ أموالٍ. / فإن استخرجنا المطلوب على مسألة: مكعب وأموال يعدل عدداً، فنزيد المطلوب – الذي يخرج – على عدد الأموال المسؤولة، فما حصل فهو الجواب الأعظم. وإن استخرجنا المطلوب على مسألة: مكعب وعدد يعدل أموالاً، فالمطلوب الذي يخرج ننقصه من عدد الأموال المسؤولة، فما بقي فهو الجواب الأصغر. ل – ١٤٦ – و

وأما القسم الثاني – وهو أن يكون عدد الأموال أعظم من جذر عدد الجذور – فليكن ا ب جذرَ عدد الجذور، وب ج عددَ الأموال، ونجعل ثلث مربع ا ب الذي هو عدد الجذور عدداً، وثلثي ب ج عددَ جذورٍ، ونعمل سؤالاً على مسألة: جذور وعدد يعدل مالاً. وليكن المطلوب الذي يخرج: ب د، فيكون أعظم من ا ب وأصغر من ب ج. لأن ب د ينقسم إلى قسمين: أحدهما مثل ثلثي عدد الأموال، والآخر هو

الذي يكون مضروبُ ب د فيه مثلَ ثلثِ مربع ا ب، أعني مثلَ ضرب ا ب في ثلثه، وهو ثلث مربع ا ب، فلا يجوز أن يكون ب د مثل ا ب وإلا كان مربع ا ب هو المال، وضربُ ا ب في ثلثه، مع ضرب ب د في ثلثي ب ج، أعني ا ب في ثلثي ب ج، يعادل المالَ. لكنّ ضرب ا ب في ثلث / ا ب وا ب في ثلثي ب ج مثلُ مربع ا ب المال، فيكون ضربُ ل – ١٤٦ – ظ ا ب في ثلثي ا ب مثلَ ضرب ا ب في ثلثي ب ج؛ هذا خلْف.

ولا يجوز أن يكون أصغر منه؛ إذ لو كان أصغر منه وضُرب ب د في أحد قسميه، ‹ لكان › مثلَ ضرب ا ب في ثلثه؛ فيكون ثلث ا ب أصغر من ذلك القسم، وقسمه الآخر مثل ثلثي ب ج وهو أعظم من ثلثي ا ب، فـ ب د أعظم من ا ب وقد كان أصغر منه؛ هذا خلْف.

وأما أنه أصغر من ب ج، فلأن أحد قسميه مثلُ ثلثي ب ج، وقسمه الآخر إذا ضُرب فيه يكون مثلَ مضروب ا ب في ثلثه. لكن ب ج أعظم من ا ب. فثلث ا ب أعظم من قسمه الآخر، فثلث ب ج أعظم من قسمه الآخر بكثير. فأحدُ قسمي ب د مثلُ ثلثي ب ج، وقسمه الآخر أصغر من ثلثه، فيكون ب د أصغر من ب ج. فتبيّن أن ب د أعظم من ا ب وأصغر من ب ج.

ج د ا ب

فلأن مربع ب د – وهو المال – يعدل ضرْب ب د في ثلثي ب ج، وهو الجذور، مع ثلث مربع ا ب، فضرْب ب د في ثلثي ب ج ثلاثَ مراتٍ – أعني في مثلي ب ج – مع مربع ا ب، يعدل ثلاث مربّعاتِ

2 ب د: ب ج [ب، ل] – 3 كان: لكان [ب، ل] – 4 ب ج (الثانية): ا ب [ب، ل] – 5 ب ج: ا ب [ب، ل] – 6 مثل ضرب: ممحوة [ب] – 8 ا ب: الألف ممحوة [ب] / أصغر: الألف ممحوة [ب] – 10 كان: أي فُرض أصغر منه.

ب د. فإذا ألقينا من كلا الجانبين ضعفَ مربع ب د، يبقى ضعفُ ب د في د ج، مع عدد الجذور، وهو مربع ا ب، مساوياً / لمربع ب د. ل – ١٤٧ – و فإذا ألقينا من الجانبين أيضاً مربع ا ب، يبقى ضعف ب د في د ج مثلَ مربع ب د بنقصان مربع ا ب، وهو العلم الحاصلُ من ضرب د ب ب ا في د ا. فضرْب د ب ب ا في د ا مثلُ ضعف د ب في د ج. فنجعل ب د جذراً مطلوباً، فيكون الأموال هي مربع د ب في ب ج، والمكعب ‹وهو› مربع د ب في د ب، وفضل الأموال على المكعب، وهو مربع ب د في د ج. فيجب أن يكون فضل العدد على الجذور مثل ذلك. حتى يكون العدد مع المكعب معادلاً / للأموال والجذور، فيكون العدد مثل ب – ١٩ – و ضرب ب د في مربع ا ب، وهو الجذور، مع مربع ب د في د ج.

فأقول: إن هذا العدد هو أكثر عددٍ يمكن أن يؤخذ مع فرض هذه الأموال والجذور، حتى لو كان العددُ المسؤول أكثر منه، فتستحيل المسألة؛ وأيّ ضلعُ يفرض أعظمَ أو أصغرَ من ب د يكون العددُ – الذي يجتمع مع مكعبه حتى تصح المسألة – أقلَّ من هذا العدد.

ب ا د ه ج

فنفرض ب ه ضلعاً أعظم من ب د وأصغر من ج ب. فيكون الأموال مربعَ ب ه في ب ج والجذورُ ب ه في مربع ا ب، والمكعبُ هو مربع ب ه في ب ه. فيكون الأموال / أكثر من المكعب بمقدار ضرب ل – ١٤٧ – ظ مربع ب ه في ج ه. فيجب أن يكون العددُ أكثر من الجذور بهذا المقدار. فالعدد مساوٍ لمبلغ الجذور، وهو ب ه في مربع ا ب، مع ضرب مربع ب ه في ج ه، وهو أقل من العدد الأول؛ لأن العدد الأول هو

5 ب ا: د ا [ب، ل]

مربع ب د في ج د، مع ضرب ب د في مربع ا ب. لكن مربع ب د في ج د ينقسم إلى مربع ب د في ج ه وفي ه د، فيكون العدد الأعظم مربع ب د في ج ه، وفي د ه، وضرب ب د في مربع ا ب. وأيضاً: مربعُ ب ه في ج ه من العدد الثاني ينقسم إلى مربع ب د في ج ه، وإلى ه ب ب د في ه د، وهو العلم، في ج ه، فمع ه ب في مربع ا ب، وهو الجذور، هو العدد الثاني. وه ب في مربع ا ب ينقسم إلى ه د في مربع ا ب وإلى ب د فيه. فالعدد الثاني ينقسم إلى أربعة أقسام، وهي: مربع ب د في ج ه، والعلم في ج ه، وه د في مربع ا ب ود ب في مربع ا ب. والعدد الأول ⟨ينقسم⟩ إلى ثلاثة أقسام، ويشتركان في قسمين، وهما: مربع د ب في ج ه، وب د [مع] ⟨في مربع⟩ ا ب. فإذا ألقيناهما من الجانبين تبقى خاصةُ العدد الأول مربعَ ب د في د ه / وخاصةُ العدد الثاني هو العلم في ج ه ومربع ا ب في ل - ١٤٨ - و
ه د. فإذا ألقينا مربع ا ب في ه د من كل واحدٍ من الجانبين، تكون خاصّةُ العدد الثاني ه ب ب د في ه د، وهو العلم في ج ه، وخاصة العدد الأول هو د ب ب ا في د ا، وهو العلم في د ه. ولأن ضعف د ب في ج د ينقسم إلى ضعف د ب في د ه وفي ج ه، وضرب ب ه د ب في ج ه، ينقسم إلى ضعف د ب في ج ه، وإلى د ه في ج ه؛ فإذا ألقينا ضعف د ب في ج ه المشترك؛ يبقى ضعفُ د ب في د ه من أحد الجانبين أعظم من د ه في ج ه الباقي من الجانب الآخر، لأن ضعف د ب أعظمُ من ج ه، لأن أحد قسمي ب د مثلُ ثلثي ب ج، فـ ب د أعظم من ج ه، فضعفه أعظم من ج ه. فيُجعل ضعف ب د في ج ه مشتركاً، فيحصل في أحد الجانبين ضعفُ ب د في ج د، وفي

2 وفي: في [ب، ل] / الأعظم: لعلها الأول – 3 وفي د ه: ناقصة [ل] – 9 ود ب: ممحوة [ب] – 16 ب ه: ه د [ب، ل]

الجانب الآخر ضرْبُ ه ب ب د في ج ه. فضعفُ د ب في ج د أعظم من ضرب ه ب ب د في ج ه. لكنّ ضِعف د ب في ج د مثلُ د ب ب ا في ا د، لِما تبيّن قبل ذلك، فهذا أيضاً أعظم منه. فنسبة د ب ب ا إلى ه ب ب د أعظم من نسبة ج ه إلى د ا. فنجعل نسبة د ا إلى د ه مشتركة، فيكون النسبةُ المؤلفة من نسبة د ب ب ا إلى ه ب / ب د، ومن نسبة ا د إلى د ه – وهي نسبة علم د ب ب ا في ا د ل – ١٤٨ – ظ إلى علم ه ب ب د في د ه – أعظمَ من النسبة المؤلفة من نسبة ج ه إلى د ا، ومن نسبة ا د إلى د ه، وهي نسبة ج ه إلى د ه. فضربُ علم د ب ب ا في ا د مضروباً في د ه أعظمُ من علم ه ب ب د في د ه مضروباً في ج ه. فخاصّة العدد الأول أكثر من خاصّة العدد الثاني. فالعدد الأول أكثر من العدد الثاني.

وأيضاً لو فرضْنا الضلع مثل ب ج، فيكون مربع ب ج في ب ج هو الأموالَ، وهو المكعب أيضاً. فالأموال مثل المكعب، فالجذور مثل العدد، وهو ب ج في مربع ا ب. لكن العددَ الأولَ مثلُ د ب في مربع ا ب مع مربع ب د في د ج. فإذا ألقينا د ب في مربع ا ب من الجانبين، يبقى من العدد الأول مربع د ب في د ج، ومن العدد الثاني مربع ا ب في ج د. لكنّ مربع د ب في د ج أعظمُ من مربع ا ب في د ج بمقدار ضرب علم د ب ب ا في د ا مضروباً في د ج. فخاصّة العدد الأول أكثر من خاصّة العدد الثاني. فالعدد الأول أكثر من العدد الثاني.

ب ا د ج

3 فهذا: قد تقرأ فهل أو فهي [ب]، وكذلك قد تقرأ «فبين» [ل] – 4 ج ه: ج د [ب، ل] –
9 ب ا: ب د [ب، ل] – 12 فرضنا: ممحوة [ب] – 18 ب ا: ا [ل]

وأيضاً: لو فرضنا الضلعَ أعظمَ من عدد الأموال مثل ب س، / فيكون الأموالُ مربعَ ب س في ج ب، والجذورُ ب س في مربع ا ب، والمكعب مربع س ب في س ب. فالمكعب أعظم من الأموال بمقدار مربع س ب في س ج. فإذا نقصنا من الجذور – وهي ب س في مربع ا ب – بمقدار ضرْب مربع ب س في س ج، فالباقي – وهو العدد – أقلّ مما لو نُقص منه مضروبُ مربع ا ب في س ج. لكن إذا نقص منه هذا يبقى مربع ا ب في ب ج، وقد تبيّن أنه أقلّ من العدد الأول. فإذا نقص منه مربع س ب في س ج يكون الباقي – وهو العدد الذي مع ضلع ب س – أقل من العدد الأول بكثير. فقد تبيّن أن أيّ ضلع يُفرض أعظمَ من ب د: فالعددُ الذي يوجد معه أقلُّ من العدد الأول.

ل – ١٤٩ – و

س ج د ا ب

وأيضاً: فليفرض الضلعُ أصغرَ من ب د وأعظم من ا ب وهو ب م. فيكون الأموالُ مربعَ ب م في ب ج، والمكعبُ مربع ب م في ب م، فيكون فضلُ الأموال على المكعب هو مربع ب م في ج م. فيكون فضلُ العدد على الجذور – وهي مربع ا ب في ب م – مثلَ ذلك. فيكون العددُ مساوياً لمجموع مربع ب ا في ب م – وهو / الجذور – مع مربع ب م في ج م. فأقول: إن العدد الأول أعظمُ منه.

ب – ١٩ – ظ

لأن ضرب د ب ب م في ج د ينقص عن ضرب ضعف د ب في ج د / بمقدار ضرب د م في ج د، وضرْب م ب ب ا في م ا ينقص

ل – ١٤٩ – ظ

4 وهي: وهو [ب، ل] – 6 مضروب مربع ا ب في: ممحوة [ب] – 12 ب د: ممحوة، وكذلك أول الكلمة التالية [ب] – 18 عن: من [ب، ل]

عن ضرب د ب ب ا في د ا بمقدار د ب ب م في د م، وهذا النقصان أكثر من النقصان الأول، أعني من جـ د في د م، لأن د ب أعظم من جـ د لِما تبيّن؛ فـ د ب ب م أعظم من جـ د، فضرب د ب ب م في د م أعظم من ضرب جـ د في د م، وضعف ب د في جـ د مثلُ د ب ب ا في د ا، فـ د ب ب م في جـ د أعظم من م ب ب ا في ا م. فنسبة م ب ب ا إلى د ب ب م أصغر من نسبة جـ د إلى ا م. فإذا جعلنا نسبة ا م إلى م د مشتركة، فيكون النسبة المؤلفة من نسبة م ب ب ا إلى د ب ب م، ومن نسبة ا م إلى د م، وهي نسبة علم م ب ب ا في ا م إلى علم د ب ب م في د م، أصغر من النسبة المؤلفة من نسبة جـ د إلى ا م، ومن نسبة ا م إلى د م، وهي نسبة جـ د إلى د م. فنسبة علم م ب ب ا في ا م إلى علم د ب ب م في د م، أصغر من نسبة جـ د إلى د م. فعلم م ب ب ا في ا م مضروباً في د م أصغر من علم د ب ب م في د م مضروباً في جـ د. فإذا زدنا على كلا الجانبين مربع ب م في جـ د يحصل في الجانب الأعظم مربع ب د في جـ د، وفي الأصغر علم م ب ب ا في ا م مضروباً في د م مع / مربع ب م في جـ د. فإذا زدنا على ل - ١٥٠ - و كلا الجانبين مربع ب ا في د م يصير ‹في› الجانب الأعظم مربع ب د في جـ د مع مربع ب ا في د م، وفي الأصغر مربع ب م في د م، مع مربع ب م في جـ د، ومجموعها مربع ب م في جـ م. فإذا زدنا على كلا الجانبين مربع ب ا في ب م، يصير الجانب الأعظم مربع ب د في جـ د مع مربع ب ا في ب د، وهو العدد الأعظم، والجانب الأصغر مربع ب م في جـ م مع مربع ب ا في ب م، وهو العدد الذي مع ضلع ب م؛ فالعدد الأول أعظم منه.

12 م ب : د ب [ب، ل] – 15-18 فإذا زدنا ... في جـ د : مكررة [ل] – 20 في ب د : إلى ب د [ب، ل]

س ج د م ا ب

وأيضاً: لو فرضنا الضلع مثلَ ا ب، فيكون المكعب مثلَ ضرب ا ب في مربعه وهو الجذور. فالمكعب مثل الجذور، فالعدد مثل الأموال، وهو مربع ا ب في ب ج. والعدد الأول قد تبيّن أنه مثل مربع ا ب في د ب، ومربع د ب في ج ب؛ ومجموعها أكثر من مربع ا ب في ب ج بمقدار ضرب علم د ب ب ا في ا د مضروباً في ج د لِما تبيّن قبل ذلك. فالعدد الأول / أعظم من العدد الثاني. ل - ١٥٠ - ظ

ج د ا ب

وأيضاً: لو فرضنا الضلع أقلّ من ا ب مثلَ ب ه، فيكون الجذور – وهي ضرب ب ه في مربع ا ب – أكثرَ من المكعب بمقدار ضرب ب ه في علم ا ب ب ه في ا ه. فيكون العدد أكثر من الأموال بمثل ذلك. فإذا جمع مع الأموال – أعني مربع ب ه في ب ج – يكون مثلَ العدد الذي مع ضلع ب ه. والعدد الأول مثل مربع ا ب في ب د، ومربع ب د في د ج، وهو أكثر من جميع مربع ا ب في جميع ب ج لِما مرّ. لكن مربع ب ه في جميع ب ج بعض مربع ا ب في جميع ب ج، والعلم في ب ه، وهو بعضه الآخر، هو في بعض ب ج. فالكل أقلّ من مربع ا ب في جميع ب ج، فهو أقل من العدد الأول ضرورةً.

ج د ا ه ب

8 وهي: وهو [ب، ل]

فقد تبيّن أن أيّ ضلع يفرض أصغرُ من ب د ، فالعدد الذي يوجد معه حتى تصح المسألة يكون أقلّ من العدد الأول، وهو مربع ا ب المعلوم في ب د المعلوم مع مربع ب د المعلوم في جـ د المعلوم. فيكون العدد الأول معلوماً. فإن كان العدد المسؤول أعظم منه، فالمسألة مستحيلة؛ وإن كان مساوياً له فهي ممكنة ولها جواب واحد وهو المطلوب الأول وهو ب د؛ وإن كان أقلّ منه فهي ممكنة / ولها مطلوبان: أحدهما أعظم من ب د، ل - ١٥١ - و والآخر أصغر منه.

أما المطلوب الأعظم: فالعدد المسؤول إن كان أكثر من مربع ب ا في جـ ب ، فالمسألة مطلوبٌ أعظم من ب د وأقل من جـ ب .

لأنا نخرج د ب على الاستقامة، ونجعل ب ي مثل د ب ونفصل منه م ي مثل جـ د ، ونجعل عدد التفاوت بين العدد الأعظم والعدد المسؤول عدداً و د م عددَ أموالٍ، ونستخرج المطلوب على مسألة: مكعب وأموال يعدل عدداً، فالمطلوب الذي يخرج بتلك المسألة يكون أصغر من د جـ؛ لأن العدد المسؤول أعظمُ من مربع ب ا في ب جـ ، ففضل العدد الأعظم على مربع ب ا في ب جـ أكثرُ من فضله على العدد المسؤول. لكن العدد الأعظم هو مربع د ب في د جـ مع مربع ب ا في ب د ، وهو يشارك مربع ب ا في ب جـ بمربع ب ا في ب د. فإذا ألقيناه من الجانبين يبقى في الأعظم مربع ب د في جـ د ، وفي الجانب الأصغر مربع ب ا في جـ د ، والفضل بينهما علم د ب ب ا في ا د ثم في جـ د. وعلم د ب ب ا في د ا مثل ضعف د ب في جـ د لِما مرّ. فالعدد الأعظم أكثر من مربع ا ب في جـ ب بضرب ضعف ب د في جـ د مضروباً في جـ د. فضرب د ي في

12 و د م عدد: ناقصة [ل] – 14-15 ففضل ... ب جـ: أثبتها في الهامش مصححا للنص [ب]، ناقصة [ل] – 15 مربع: بع [ب]

ج د مضروباً في ج د، أعني مربع ج د / في د ي، أعني مربع ج د في ل - ١٥١ - ظ ج م، أعني مكعب ج د مع ضرب مربع ج د في د م؛ وفضل العدد الأعظم على العدد المسؤول ‹ هو › بمكعب المطلوب الذي يخرج بتلك المسألة مع ضرب مربعه في د م. فالمطلوب الذي يخرج بتلك المسألة أقل من ج د، وليكن د ع. فأقول: إن ب ع / هو الضلع المطلوب في هذه ب - ٢٠ - و المسألة.

ج ع د ا ب م ي

لأن ضرب د ب ب ا في د ا وهو العلم مثلُ ضعف د ب، أعني ي د، في ج د لما مرّ، فالعلم في د ع مثل ي د في ج د ثم في د ع، لكن ي د في ج د ثم في د ع مثلُ ي د في د ع ثم في ج ع مع مربع د ع في ج ع ‹ مضروباً في ع م › لكون مربع د ع في ج م ينقسم إلى مربع د ع في ع م، وإلى مربع د ع في ج ع. لكن ضرب ي د في د ع ثم في ج ع مع مربع د ع في ج ع هو مثل ضرب ي ع في ع د ثم في ج ع. فضرب العلم في د ع مثلُ مربع د ع في ع م، مع ضرب ي ع في ع د ثم في ج ع. لكن ي ع في ع د ثم في ج ع هو ضرب ع ب ب د في ع د، وهو العلم، مضروباً في ج ع. فالعلم الأول في د ع مثل العلم الثاني في ج ع مع مربع د ع في / ع م. فإذا زدنا على كلا الجانبين ل - ١٥٢ - و مربع ب ا في ب ع، يصير في أحد الجانبين مربع ب د في د ع مع مربع ب ا في ب د، وفي الجانب الآخر العلم الثاني في ج ع مع مربع ع د في

1 أعني (الثانية): كذا، والأفضل أن تكون «مساوياً ل» وهذا ما يعنيه – 3 بتلك: تلك [ب، ل] – 5 المطلوب: المطلوب الذي [ل]، ومن البيّن أن اسم الموصول لا محل له هنا. – 7 لأن ضرب: ممحوة [ب] – 10 لكون: لكن [ب، ل]

ع م، ومع مربع ب ا في ب ع، مع تعادل الجانبين. فإذا زدنا على كليهما مربع ب د في ج ع، يصير في أحدهما مربع ب د في ج د مع مربع ب ا في ب د، وهو العدد الأعظم، وفي الآخر مربع ب ع في ج ع، مع ضرب مربع ب ا في ب ع، ومع مربع ع د في ع م. لكن مربع ب ع في ج ع، مع مربع ب ا في ب ع، هو العدد الذي يكون مع ضلع ب ع. ففضل العدد الأعظم على العدد الذي يكون مع ضلع ب ع هو مثل مربع ع د في ع م. وقد كان فضل العدد الأعظم على العدد المسؤول هو مربع ع د في ع م. فالعدد المسؤول مثل العدد الذي يكون مع ضلع ب ع. فالضلع المطلوب هو ب ع.

وإن كان العدد المسؤول مثلَ مربع ب ا في ب ج، كان للمسألة مطلوبٌ مثل ب ج، وهو عدد الأموال، لأن العدد المسؤول إذا كان مثل مربع ا ب – وهو عدد الجذور – في ج ب /، وهو عدد الأموال، كان ل – ١٥٢ – ظ
المطلوب عددَ الأموال وهو ج ب. لأنا إذا جعلنا ج ب ضلعاً، فيكون ج ب في مربع ا ب إنما هو الجذور، وهو مثل العدد، ويكون المكعبُ هو مربعَ ج ب في ج ب، وهو بعينه الأموالُ. فالجذور مثل العدد، والأموالُ مثل المُكعبِ، فالجذور والأموال مثل المكعب والعدد. من هذا تبيّن أن ا ب حينئذ يكون مطلوباً أصغر من ب د، لأنّا ‹إذا› جعلنا ا ب ضلعاً، فيكون مربع ا ب في ا ب هو المكعب، وهو الجذور، ومربع ا ب في ج ب هو الأموال وهو العدد، فالجذور مع الأموال مثل المكعبِ والعددِ.

ي ب ا د ع ج

9 هو ب ع: ممحوة [ب]

وإن كان العدد المسؤول أقلّ من مربع ا ب في ب ج، فالمسألة مطلوب أعظم من ج ب. لأنا نجعل عدد التفاوت بين العدد الأعظم والمسؤول عدداً، و د م عدد الأموال، ونعمل سؤالاً على مسألة: مكعب وأموال يعدل عدداً. فالمطلوب الذي يخرج بتلك المسألة يكون أعظم من ج د، لأن فضل العدد الأعظم على العدد المسؤول أكثر من فضله على مربع ا ب في ج ب؛ لكن فضله على مربع ا ب في ج ب هو مكعب ج د، مع ضرب مربع ج د في د م لما مرّ؛ وفضله على العدد المسؤول مكعب المطلوب / الخارج بتلك المسألة مع ضرب مربعه في د م. ل – ١٥٣ – و فالمطلوب الذي يخرج بتلك المسألة أعظم من ج د، وليكن د ط. فأقول: إن ب ط هو المطلوب في هذه المسألة.

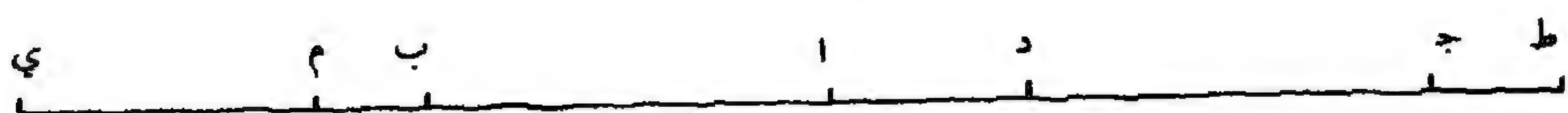
لأن مربع ب ا في ب د، مع مربع ب د في ج ب جذورٌ وأموالٌ لضلع ب د؛ وفضلُ هذا المجموع على مكعب ب د إنما هو العدد الأعظم، فيجعل هذا المجموع في جانب، ومكعب ب د في جانب. فإذا زدنا على كلا الجانبين مربع ب ا في د ط، يصير في جانب المكعبِ مكعبُ ب د ومربعُ ب ا في ط د، وفي الجانب الآخر مربعُ ب ا في ب ط مع مربع ب د في ج ب؛ وفضلُ الجانب الآخر على جانب المكعب يكون على حاله، وهو العدد الأعظم. فإذا زدنا على كلا الجانبين علم ط ب ب د في ط د المضروب في ج ب، يحصل في جانب المكعبِ: ‹العَلَمُ› المضروبُ في ج ب مع مربع ب ا في ط د ومع مكعب ب د، وفي الجانب الآخر: مربعُ ب ا في ب ط ومربع ب ط في ج ب؛ وفضل هذا الجانب على جانب المكعب إنما هو العدد الأعظم. فإذا جعلنا ب ط ضلعاً، يكون ما في هذا الجانب الأموال والجذور. / ففضلُ الأموال ل – ١٥٣ – ظ

13 المجموع في: المجموع من [ب، ل] – 15 ب ا في ط د: ممحوة [ب]

والجذور على ما في جانب مكعب ب د إنما هو العدد الأعظم. فإذا زدنا على ما في جانب مكعب ب د مقداراً ما، يصير فضل الأموال والجذور على ما يحصل في ذلك الجانب أنقص ممّا كان. وهو العدد الأعظم، بمقدار هذا المزيد. فلنزد على جانب مكعب ب د علمَ د ب ب ا في ا د، مضروباً في ط د مع علم ط ب ب د في ط د مضروباً في ط ج، فيصير في هذا الجانب مكعب ب د ومربع ب ا في ط د، وعلم ط ب ب د في ط د مضروباً في ج ب، وعلم د ب ب ا في ا د مضروباً في ط د، وعلم ط ب ب د في ط د مضروباً في ط ج. وهذه الجملة تُساوي مكعب ب ط. ففضل الأموال والجذور على مكعب ب ط أقلّ من العدد الأعظم بمقدار العلمين المزيدين، وهما علم د ب ب ا في د ا المضروب في ط د، وعلم ط ب ب د في ط د المضروب في ج ط. لكنّ فضل الأموال والجذور على مكعب ب ط إنما هو العددُ الذي يكون مع ضلع ب ط. / فالعدد الذي يكون مع ضلع ب ط لتصح المسألة أقلّ من ب – ٢٠ – ظ العدد الأعظم بمقدار العلمين المزيدين. فيكون العدد الذي / مع ضلع ل – ١٥٤ – و ب ط مع هذين العلمين مثلَ العدد الأعظم. ولأن علم د ب ب ا في ا د مثل ضعف ب د في ج د، فمضْروب هذا العلم في ط د مثلُ ضعف ب د في ج د مضروباً في ط د. لكنّ علم ط ب ب د في ط د المضروبِ في ج ط ينقسم إلى قسمين: القسم الأول منه مثل ج ط في ضعف ب د مضروباً في ط د، والقسم الآخر هو مربع ط د في ج ط. فقد حصل جميع أقسام العلمين المذكورين، إنما هو ضعف ب د في ج د مضروباً في ط د، وضعف ب د في ج ط مضروباً في ط د، ومربع ط د في

5 ط د مع علم: ممحوة [ب] – 15 ب ط: الطاء ممحوة [ب]، ب ج [ل] – 18 القسم: والقسم [ب، ل] – 21 وضعف... ط د: ناقصة [ل]

جـ ط. لكنّ مجموع القسمين الأولين من هذه الثلاثة هو ضعف ب د في ط د ثم في ط د، وهو ضعف ب د في مربع ط د، أعني ي د في مربع ط د، أعني جـ م في مربع ط د. فإذا جمعنا معهما القسم الثالث، وهو مربع ط د في ط جـ، يحصل مربّع ط د في ط م. ففضل العدد الأعظم على العدد الذي يكون مع ضلع ب ط حتى تصح المسألة إنما هو مربع ط د في ط م. وقد كان فضلُ العدد الأعظم أيضاً على العدد المسؤول إنما هو مربع ط د في ط م. فالعدد الذي مع ضلع ب ط إنما هو القدر المشترك. فيكون ب ط هو الضلعَ المطلوب.



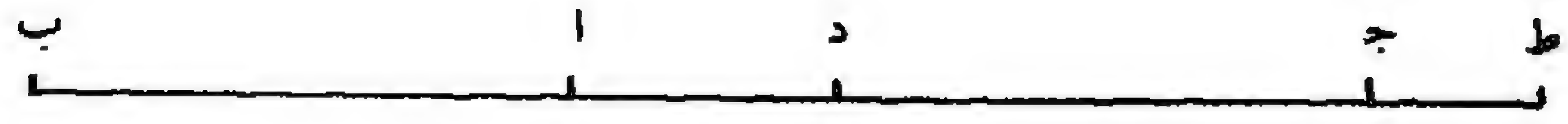
وأقول أيضاً: / إن المطلوب الأعظم له نهاية في العِظم. ل - ١٥٤ - ظ

لأنا نجعل مربع ب ا، وهو عدد الجذور، عدداً، وجـ ب، وهو عدد الأموال، عددَ جذورٍ ونعمل سؤالاً على مسألة: مال يعدل جذوراً وعدداً. وليكن المطلوب الذي يخرج بتلك المسألة هو ب ط، حتى يكون ماله يعدل ضربه في جـ ب، وهو الجذور، مع مربع ا ب وهو العدد.
فأقول: إن أيّ ضلع يُفرض يكون أقل من ب ط.

لأن مربع ب ط يعادله مربع ب ا، وضرب ط ب في جـ ب؛ فإذا ضربنا كلا الجانبين في ط ب يبقى المعادلة، ويصير في أحدهما مُكعب ط ب، وفي الآخر مربع ب ا في ب ط، مع مربع ب ط في جـ ب، وهما متساويان. فإذا فرضنا ب ط ضلعاً، فيكون مربع ب ط في ب جـ هو الأموال، ومربع ب ا في ب ط هو الجذور. فالجذور والأموال معادلة لمكعبه. وقد كان يجب أن تكون معادلة للمكعب والعدد حتى تصح

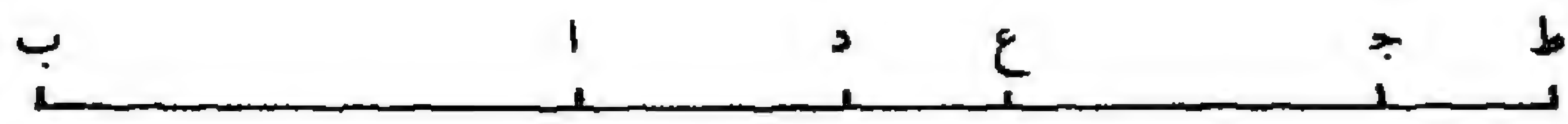
4 ط جـ: ط د [ب، ل] – 13 الجذور: الجذر [ب، ل] – 14 يكون: فيكون [ب، ل]

المسألة؛ فلا يكون ب ط ضلعاً البتّة. فأيّ ضلع يُفرض يكون أقلّ من ب ط.



وأقول أيضاً: إن أيّ خط يفرض أصغر من ب ط يصلح أن يكون مطلوباً.

فليفرض ب ع أصغر من ب ط. فلأن فضل مكعب ب ط على مكعب ب ع إنما / هو مربع ع ب في ط ع مع علم ط ب ب ع في ط ع مضروباً في ط ب، وهو بعينه فضل أموال وجذور ب ط على مكعب ب ع. وفضل أموال وجذور ب ط على أموال وجذور ب ع إنما هو مربع ا ب في ط ع مع العلم المذكور في ب ج. وهذا الفضل أقل من الفضل الأول بكثير، فمكعب ب ع أصغر من أمواله وجذوره. فإذا جُعل فضلُ أمواله وجذوره على مكعبه عدداً؛ فيصحّ منه المسألة، ويكون مكعب ب ع مع ذلك العدد مساوياً لأمواله وجذوره. ل - ١٥٥ - و



وأما المطلوب الأصغر: فنجعل عدد التفاوت بين العدد الأعظم والعدد المسؤول عدداً، ود م عددَ أموالٍ، ونعمل سؤالاً على مسألة: مكعب وعدد يعدلُ أموالاً. فالمطلوب الذي يخرج بتلك المسألة إن كان أقل من د ا مثل د ه فأقول: إن ب ه هو المطلوب في هذه المسألة.

لأن ضعف ب د في ج د مثل د ب ب ا في د ا لِما مرّ، فضرب ضعف ب د في ج د مضروباً في د ه مثل د ب ب ا في د ا، وهو

3 يصلح: فيصلح [ب، ل] – 8 وجذور (الثانية): ناقصة [ل] – 18 د ا: د ه: [ب، ل]

العلم، مضروباً في د ه. لكن العلم ينقسم إلى علمين: أحدهما ه ب ب ا في ا ه، والآخر د ب ب ه في د ه. فيكون ضعف ب د في ج د مضروباً في د ه مثلَ ضرب / كلٍّ واحدٍ من العلمين في د ه. لكن علم ل – ١٥٥ – ظ د ب ب ه في د ه، ثم في د ه، هو مربع د ه في ب ه وفي د ب، أعني ي ه؛ وضرب ضعف ب د في ج د مضروباً في د ه هو ضعف ب د في د ه ثم في ج د؛ وضعف ب د في د ه أعظم من ضرب د ب ب ه في د ه، وهو العلم، بمقدار مربع د ه. فضرب هذا العلم في ج د أنقص من ضعف د ب في د ه ثم في ج د، بمقدار مربع د ه في ج د. فلينقص من كلٍّ واحدٍ من الجانبين المتساويين مربع د ه في ج د، يَصِرْ في أحد الجانبين علم د ب ب ه في د ه مضروباً في ج د، وفي الجانب الآخر علم ه ب ب ا في ا ه مضروباً في د ه، ومربع د ه في ه م. فإذا زدنا على كلٍّ واحدٍ من الجانبين مربع ب ه في ج د، ومربعَ ب ا في د ه، يصير في أحد الجانبين مربع ب د في ج د ومربعُ ب ا في د ه، وفي الآخر مربع ه ب في ج ه، ومربعُ د ه في ه م. فإذا زدنا على كلا الجانبين مربع ب ا في ب ه، يصير في أحد الجانبين مربع ب د في ج د، ومربعُ ب ا في د ب، وهو العدد الأعظم، وفي الجانب الآخر مربع ب ه في ج ه مع مربع ب ا في ب ه ومربع د ه في ه م. والأولان مثل العدد الذي يجب أن يكون مع ضلع / ه ب في المسألة. ل – ١٥٦ – و فعدد ضلع ه ب مع مربع د ه في ه م مثل العدد الأعظم، وقد كان العدد المسؤول مع مربع د ه في ه م مثل العدد الأعظم. فالعدد المسؤول / هو العدد الذي يكون مع ضلع ب ه ‹ف› ه ب هو الضلع المطلوب. ب – ٢١ – و

9 يَصِرْ: يصير [ب]، تصير [ل]، والصواب ما أثبت لأن الفعل مجزوم لوقوعه جواباً لطلب – 21 ب ه: الهاء ممحوة [ب] / ه ب: ممحوة [ب]

ج د ه ا ب م ي

وإن كان المطلوب الذي يخرج بتلك المسألة مثلَ د ا فأقول: إن ا ب هو مطلوبنا في هذه المسألة.

لأن ضعف ب د في ج د مثل د ب ب ا في د ا لما مرّ، فضرب ضعف ب د في ج د مضروباً في ا د مثل د ب ب ا في ا د، وهو العلم، مضروباً في ا د. لكن العلم مضروباً في ا د، هو مربع د ا في ا ب وفي د ب، أعني مربع د ا في ا ي؛ وضرب ضعف ب د في ج د مضروباً في ا د، هو ضعف ب د في د ا، ثم في ج د؛ وضعف د ب في ا د أعظم من د ب ب ا في ا د بمقدار مربع د ا. فضرب هذا العلم في ج د أنقص من ضعف د ب في ا د ثم في ج د بمقدار مربع ا د في ج د. فلينقص من كلٍّ واحدٍ من الجانبين المتساويين مربع ا د في ج د، يَبْقَ في أحد الجانبين علم د ب ب ا في ا د مضروباً في ج د، وفي الجانب الآخر مربع د ا في ا م. فإذا زدنا على كلا الجانبين مربع / ب ا في ل – ١٥٦ – ظ ج د، يصير في أحدهما مربع ب د في ج د، وفي الآخر مربع د ا في ا م، مع مربع ب ا في ج د. فإذا زدنا على كلا الجانبين مربع ب ا في ب د، يصير في أحد الجانبين مربع ب د في ج د مع مربع ب ا في ب د وهو العدد الأعظم، وفي الجانب الآخر مربع د ا في ا م مع مربع ب ا في ب ج، أعني العدد الذي يجب أن يكون مع ضلع ب ا؛ فعدد ضلع ب ا مع مربع د ا في ا م مثل العدد الأعظم. وقد كان العدد المسؤول مع مربع د ا في ا م مثلَ العدد الأعظم، فالعدد المسؤول هو العدد الذي يكون مع ضلع ا ب، فـ ا ب هو الضلع المطلوب.

11 يبق: يبقى [ب، ل] – 15 ب د (الثانية): ناقصة [ل]

ج د ا ب م ي

وإن كان المطلوب الذي يخرج بتلك المسألة أعظم من د ا مثلَ ضلع د ه فـ ب ه هو مطلوبنا في هذه المسألة.

لأن د ب مثل ب ي، فيكون د ب ب ه مثل ي ه. فضرب د ب ب ه في د ه، وهو العلم، مثل ي ه في د ه. فضرب العلم في د ه مثل ي ه في د ه ثم في د ه، وهو مربع د ه في ي ه. فعلمُ د ب ب ه في د ه المضروب في د ه مثلُ مربع د ه في ي ه. ولأن علم د ب ب ا في د ا مثلُ ضعف ب د في ج د لِما مرّ، فإذا ضربنا كلّ واحدٍ منهما في د ه، يكون علم د ب ب ا / في د ا مضروباً في د ه مثلَ ضعف د ب ل - ١٥٧ - و في ج د مضروباً في د ه؛ فيكون أيضاً مربع د ه في ه ي مع علم د ب ب ا في د ا مضروباً في د ه، وهو في أحد الجانبين مثلَ علم د ب ب ه في د ه مضروباً في د ه مع ضعف ب د في ج د مضروباً في د ه، وهو في الجانب الآخر. ولأن د ب ب ه في ج د أقلُّ من ضعف د ب في ج د بمقدار ضرب د ه في ج د، فيكون ضرب ‹د ب› ب ه في ج د المضروب في ه د أقلّ من ضعف ب د في ج د ثم في د ه بمقدار مربع د ه في ج د، وهو مثل ضرب د ب ب ه في د ه ثم في ج د. فإذا نقصنا من ضعف د ب في ج د المضروب في د ه مربع ه د في ج د، يبقى في هذا الجانب علم د ب ب ه في د ه المضروب في ج د، وعلم د ب ب ه في د ه المضروب في د ه، ومجموعهما هو علم د ب ب ه في د ه المضروب في ج ه. وإذا نقصنا مربع ه د في ج د من مضروب مربع ه د في ي ه الذي في الجانب الآخر، يبقى ‹في› ذلك الجانب مربع ه د في ه م، مع علم د ب ب ا في د ا المضروب في د ه، مع

1 ضلع: مربع [ب، ل] – 12 ج د: ممحوة [ب]، ج [ل] / أقل: ممحوة [ب]

تساوي الجانبين. فعلم د ب ب ه في د ه المضروب في ج ه مثلُ علم د ب ب ا / في د ا المضروب في د ه، مع مربع د ه في ه م. ففضل علم د ب ب ه في د ه المضروب في ج ه على علم د ب ب ا في د ا المضروب في د ه، إنما هو مربع د ه في ه م. ولأن فضل الأموال والجذور التي لضلع ‹ ب ه على مكعبه أصغرُ من فضل الأموال والجذور التي لضلع › ب د على مكعبه إنما هو العدد الأعظم، فإذا نقصنا من أمواله علم د ب ب ه في د ه المضروب في ج ب، يبقى مربع ب ه في ج ب، وهو أموال ضلع ب ه، وإذا نقصنا من جذوره مربع ب ا في د ه، يبقى مربع ب ا في ب ه وهو جذور ضلع ب ه، وإذا نقصنا من مكعبه مربع د ب في د ه وعلم د ب ب ه في د ه المضروب في ب ه، يبقى مكعب ضلع ب ه؛ وفضل الأموال والجذور التي لضلع ب ه على مكعبه أقلُّ من فضل الأموال والجذور التي لضلع ب د على مكعبه، أعني من العدد الأعظم، والنقصانُ الواقعُ في جانب الأموال والجذور أكثرُ من النقصان الواقع في جانب المكعب بمقدار مربع د ه في ه م. فيكون فضل الأموال والجذور التي لضلع ب ه على مكعبه، وهو العدد الذي معه، أقلَّ من فضل الأموال والجذور التي لضلع ب د على مكعبه، أعني من العدد الأعظم، بمقدار مربع د ه في ه م. ل – ١٥٧ – ظ

ج د ا ه ب م ي

بيانُ أن نقصان الأموال والجذور أكثرُ من نقصان المُكعب بمقدار مربع د ه في ه م:

1 ب ه في د ه: ممحوة [ب] – 3 على: ممحوة [ب] / علم: ممحوة [ب]، م [ل] – 6 ب د: ب ه [ل] – 6-9 على مكعبه ... ضلع ب ه: ناقصة [ل] – 8 وإذا: فإذا [ب]

لأنا قد ذكرنا أن نقصان الأموال / والجذور هو علم د ب ب هـ [ل - ١٥٨ - و] المضروب في د هـ ثم في ج ب، مع مربع ا ب في د هـ، وهذان في جانب، ونقصان المكعب هو مربع د ب في د هـ وعلم د ب ب هـ في د هـ مضروباً في ب هـ، وهذا في جانب آخر؛ فإذا ألقينا من كلا الجانبين العلم المضروب في ب هـ، يبقى في جانب نقصان الأموال والجذور العلمُ مضروباً في ج هـ ومربّعُ ب ا في د هـ، ويبقى في جانب نقصان المكعب مربع د ب في د هـ. فإذا ألقينا من كلا الجانبين مربع ب ا في د هـ، يبقى في جانب نقصان / الأموال والجذور علم د ب ب هـ في د هـ مضروباً في [ب - ٢١ - ظ] ج هـ، وفي جانبِ نقصانِ المكعب علم د ب ب ا في د ا مضروباً في د هـ. وقد تبيّن أن فضل علم د ب ب هـ في د هـ المضروب في ج هـ على علم د ب ب ا في د ا ثم في د هـ بمقدار مربع د هـ في م هـ. فيكون فضلُ العدد الأعظم على العدد الذي يكون مع ضلع ب هـ إنما هو مربع د هـ في هـ م. وقد كان فضله أيضاً على العدد المسؤول هو مربع د هـ في هـ م بعينه. فالعدد الذي مع ضلع ب هـ إنما هو العدد المسؤول، فضلع ب هـ هو المطلوب /. [ل - ١٥٨ - ظ]

وأما استخراج المطلوب الأعظم، فالعدد المسؤول إن كان أعظم من مربع ا ب في ب ج، فالمطلوب الأعظم يكون أقلَّ من ب ج مثلَ ب هـ. فلأنه قد تبيّن أن خاصّة العدد الأعظم هو د ب ب ا في ا د مضروباً في د هـ، وخاصّةَ العدد الثاني الذي مع ضلع ب هـ هو هـ ب ب د في د هـ المضروب في ج هـ؛ ففضل خاصّة العدد الأعظم على خاصة العدد الثاني مثلُ فضل العدد الأعظم على العدد المسؤول، وهو عدد التفاوت بينهما.

2 د هـ (الثانية): الهاء ممحوة [ب] / هذان: ممحوة [ب] – 3 د ب (الأولى): ا ب [ب، ل] –
18 أن: ناقصة [ل] / خاصة: فخاصة [ب]

فيكون خاصّة العدد الثاني مع عدد التفاوت مثلَ خاصّة العدد الأعظم. وإذا تَقَدَّر هذا، فنجعل د ه شيئاً، فيكون خاصّة العدد الأعظم – وهو علم ا ب ب د في د ا المضروب في د ه – أشياء بعدّة هذا العلم. وه ب ب د في ه د، وهو العلم، يكون ضعف ب د، وهو المطلوب الأول، وشيء في شيء، فيكون أشياءَ بعدّة ضعف المطلوب الأول ومالاً. فإذا ضربناه في ج ه – وهو عدد ج د إلا شيئاً – يصير أشياءَ بعدّة ضعف ب د في ج د إلا أموالاً بعدّة ضعف المطلوب الأول منقوصاً من هذا الضعف ج د. وإلا كعباً. وهو خاصّة / العدد الثاني. فمع عدد التفاوت ل – ١٥٩ – و يعدل خاصّة العدد الأعظم، وهو أشياءُ بعدّة د ب ب ا في د ا وهو العلم. فإذا جبرنا يصير المبلغُ هذه الأشياءَ وكعباً وأموالاً بعدّة ضعف ب د بنقصان ج د يعدل أشياء بعدّة ضعف ب د في ج د وعدد التفاوت. لكنّ عدد الأشياء من كلا الجانبين متساوية، فنُسقطها، يبقى كعب وأموال بعدّة ضعف ب د، منقوصاً منه ج د، يعدل عدد التفاوت بين المسؤول والأعظم. فإذا جعلنا عدد التفاوت عدداً، ونقصنا من ضعف ب د – المطلوب الأول – ج د، وهو فضل عدد الأموال على المطلوب الأول، وجعلنا الباقي أموالاً، واستخرجنا المطلوب بتلك المسألة، فيخرج د ه، فنزيده على ب د فيحصل ب ه، وهو المطلوب الأعظم.

ي ب ا د ه ج

1 فيكون: ناقصة [ل] – 2 تقدَّر: ومعناها «تهيأ» – 6 شيئا: شيء [ب. ل] – 11 بنقصان ... ب د: ناقصة [ل]

وإن كان العدد المسؤول مثلَ مربع ب ا في ب جـ؛ فالمطلوب مثلُ ب جـ.

وإن كان أقلَّ منه فالمطلوب أعظم من ب جـ مثلُ ب هـ.

فلأنه إذا كان مقدارٌ له فضلٌ على مقدار آخر، وزيدَ على الفاضل مقدارٌ أقلّ وعلى المفضول أكثرُ؛ فيكونُ فضلُ حاصل الفاضلِ على حاصل المفضولِ أقلَّ من الفضل الأول بمقدار تفاوت ما بين الزيادتين. ومكعب / ب د مع العدد الأعظم مثلُ مجموع المجسّمين: أحدهما مربع ب د في ل - ١٥٩ - ظ ب جـ، وهو مجسّم الأموال، والآخر ب د في مربع ا ب وهو مجسّم الجذور. فمجموع المجسّمين هو الفاضل، والمكعبُ هو المفضول. فإذا زدنا على مجسّم الجذور - وهو ب د في مربع ا ب - ضَرْبَ هـ د في مربع ا ب؛ يصير المبلغ ضَرْبَ ب هـ في مربع ا ب. وإذا زدنا على مجسّم الأموال - وهو مربع ب د في ب جـ - ضَرْبَ هـ ب ب د في هـ د، ثم في ب جـ، يصير مربع هـ ب مضروباً في ب جـ. فإذا جمعنا الجانبين الزائدين، يكون هـ ب في مربع ا ب، ومربع ب هـ في جـ ب، وهما مجسّمان، وزاد مجموعها على مجموع المجسّمين الأولين بمقدار ضَرْب هـ د في مربع ا ب، مع العلم المذكور في جـ ب.

أما الجانب المفضول، وهو مكعب ب د: فإذا زدنا عليه مربع ب د في هـ د وضُرب العلم المذكور في ب هـ، يحصل المبلغُ مكعبَ ب هـ. فإذا جعلنا ب هـ ضلعاً، فيكون المجسّمان الحاصلان من الزيادتين جذورَه وأموالَه، والمكعبُ الحاصلُ من هذه الزيادة مكعبَه. وفضلُ مجموع المجسّمين على هذا المكعب هو العدد / الذي يجب أن يكون معه. فيلزم ل - ١٦٠ - و نقصان هذا العدد على فضل المجسّمين الأولين على المكعب الأول، وهو

6 ما: ناقصة [ل] - 12 في (الأولى): ناقصة [ل] - 14 جـ ب: جـ [ل]

العدد الأعظم، بمقدار فضل الزيادة التي زدناها على المكعب الأول حتى حصل المكعب الثاني على الزيادة التي زدناها على المجسّمين الأولين حتى حصل المجسّمان الآخران. ولما كان زيادةُ المكعب الأول مربعَ ب د في هـ د وعلم هـ ب ب د في هـ د ثم في ب هـ، وزيادةُ المجسمين هـ د في مربع ا ب والعلمَ المذكور في ب ج: فإذا ألقينا العلم في ب د من كل واحد من الجانبين، يبْقى زيادةُ المكعب مربعَ ب هـ في هـ د، وزيادةُ المجسمين هـ د في مربع ا ب والعلم في ج د؛ فإذا ألقينا من كل واحدٍ من الجانبين مربّع ا ب في هـ د، يبقى منهما زيادةُ المكعب: علم هـ ب ب ا في ا هـ، ثم في هـ د، وزيادةُ المجسمين علم هـ ب ب د في هـ د، ثم في ج د. ففضْل الزيادة الباقية للمكعب على الزيادة الباقية للمجسمين، هو فضل العدد الأعظم على العدد المسؤول الذي يكون مع ضلع هـ ب. فليكن هـ د شيئاً، أمّا الزيادة الباقية في جانب المكعب / فتكون علمَ هـ ب ب ا في ل – ١٦٠ – ظ
ا هـ مضروباً في هـ د. أما هـ ب ب ا فهو عدد / المطلوب الأول، أعني ب – ٢٢ – و
ب د مع جذر عدد الجذور، أعني ا ب وشيئاً، وهـ ا وهو عددُ د ا وشيءٌ، ومن ضرب عددِ د ب ب ا وشيءٍ، في عددِ د ا وشيء يحصل عدد معلوم، وهو عدد د ب ب ا في د ا وأشياءُ بعدّة ضعف د ب ومالٌ. وهذه الجملة هو العلم ‹والأشياء والمال› ومضروبها في هـ د، الشيء، يكون أشياءَ عدَدُها ضرْب د ب ب ا في د ا، وأموالاً بعدّة ضعف د ب وكعباً، وهو حاصل الزيادة الباقية من ‹زيادة› المكعب. وأما زيادة المجسمين فعلم هـ ب ب د في هـ د وهو ضعف عدد ب د وشيء

2 المكعب: كتب ناسخ [ل] «العدد»، ثم كتب «المكعب» بين «حصل» «والعدد» فوق السطر. وكلمة «العدد» هنا زائدة – 3 الأول مربع: الثاني مع [ب، ل] – 10 هو: وهو [ب، ل] – 13 فهو: هو [ب، ل] – 14 وشيئا: وشيء [ب، ل] / وهـ ا: هـ ا [ل] / وهو: هو [ل] – 15 يحصل: ناقصة [ل] – 17 وهذه: وهذا [ب، ل]

في هـ د، الشيء، يكون أشياءَ بعدّة ضعف ب د، ومالاً، وهو العلم، ومضروبها في جـ د المعلوم يكون أشياءَ بعدة ضعف ب د في جـ د وأموالاً بعدّة جـ د، وهو حاصل الزيادة الباقية من زيادة المجسّمين. فنسقط هذه الجملة من زيادة المكعب، ‹أعني› من أشياءَ عدَدُها ضرْب د ب ب ا في د ا وأموال بعدّة ضعف د ب وكعب. أما الأشياء من الجانبين فتساوية. نقصنا تلك الأشياء من هذه الأشياءِ فلم يبق منه شيء. وإذا ألقينا تلك الأموال من هذه الأموال يبقى فضلُ زيادةِ / المكعب على ل - ١٦١ - و زيادة المجسّمين، أموال بعدّة ضعف د ب بنقصان جـ د من هذا الضعف ومكعب، وهو مساوٍ لعدد التفاوت بين العدد الأعظم والمسؤول. فقد تأدّى إلى مسألة: مكعب وأموال يعدل عدداً. والعددُ هو التفاوت بين العددِ الأعظم والمسؤولِ، وعدد الأموال هو ضعف المطلوب الأول بنقصان فضل عدد الأموال عليه. فيستخرج المطلوب بتلك المسألة، فيخرج د هـ، فنزيده على المطلوب الأول فيحصل المطلوب الأعظم.

ه ج د ا ب

وأما استخراج المطلوب الأصغر فننقص فضل عدد الأموال على المطلوب الأول من ضعف المطلوب الأول، ونجعل الباقي عدد أموالٍ، ونجعل عدد التفاوت بين العدد الأعظم والمسؤولِ عدداً، ونستخرج المطلوب بمسألة: مكعب وعدد يعدل أموالاً. فالمطلوب الذي يخرج: إن كان أقلّ من الفضل بين المطلوب الأول وجذر عدد الجذور؛ فالمطلوب الأصغر أعظم من جذر عدد الجذور مثل ب هـ.

فلأن العدد الأعظم قسمان: أحد قسميه، وهو مربع ا ب في ب د،

6 فتساوية: متساوية [ب، ل] – 15 من ... الأول: ناقصة [ل]

ينقسم إلى مربع ا ب في هـ ب، وإلى مربع ا ب في هـ د، وقسمه الآخر وهو مربع ب د في جـ د / [ل – ١٦١ – ظ] ينقسم إلى مربع هـ ب في جـ د وإلى ضرب علم د ب ب هـ في د هـ ثم في جـ د؛ والعدد المسؤول هو مربع ب ا في ب هـ ومربع هـ ب في جـ هـ المنقسم إلى مربع ب هـ في جـ د، وإلى مربع ب هـ في هـ د. فنسقط مربع ب هـ في جـ د، ومربع ا ب في ب هـ من الجانبين، يبقى من العدد الأعظم مربع ا ب في هـ د، وعلم د ب ب هـ في د هـ مضروباً في جـ د، ومن العدد المسؤول مربع هـ ب في هـ د. فإذا ألقينا من كلا الجانبين مربع ا ب في د هـ، تبقى خاصّة العدد الأعظم علم د ب ب هـ في د هـ مضروباً في د جـ، وخاصّة العدد المسؤول علم هـ ب ب ا في هـ ا مضروباً في د هـ. وفضل خاصّة العدد الأعظم على خاصّة العدد المسؤول هو عدد التفاوت بين الأعظم والمسؤول. فنجعل د هـ شيئاً.

أما خاصّة العدد الأعظم فعلم د ب ب هـ في د هـ، وهو ضعف د ب إلا شيئاً في شيء، يكون أشياءَ – بعدّة ضعف د ب – إلا مالاً، ومضروبُها في جـ د يكون أشياءَ – بعدّة ضعف د ب في د جـ – إلا أموالاً – بعدّة د جـ – وهو خاصّة العدد الأعظم. وأما خاصّة العدد المسؤول فعلم هـ ب ب ا في ا هـ مضروباً في د هـ. أما هـ ب ب ا فمجموع د ب ب ا / [ل – ١٦٢ – و] إلا شيئاً، وهـ ا عدد د ا إلا شيئاً، والعلم الحاصل من ضربها يكون عدد الحاصل من ضرب د ب ب ا في د ا، وهو العلم إلا أشياء بعدّة ضعف د ب، ومال. ومضروبُها في د هـ الشيء يكون أشياءَ – بعدّة العلم – وكعباً إلا أموالاً بعدّة ضعف د ب، وهو خاصّة العدد المسؤول، فمع عدد التفاوت يعدل خاصّة العدد الأعظم، وهي أشياء بعدّة ضعف د ب في

2 علم: م [ل] – 13 شيئا: شيء [ب، ل] – 17 شيئا (الأولى والثانية): شيء [ب، ل] – 20 وهو: ممحوة [ب]

جـ د إلا أموالاً بعدّة جـ د. فإذا جبرنا وقابلنا وألقينا الأشياء من الجانبين لتساويها، يصير أموالاً بعدّة ضعف د ب منقوصاً منه د جـ، يعدل عددَ التفاوت وكعباً. فيُستخرج المطلوب بتلك المسألة، فيخرج د هـ الشيء، وننقصه من المطلوب الأول، فيبقى ب هـ وهو المطلوب الأصغر.

جـ د هـ ا ب

وإن كان المطلوب الذي يخرج بتلك المسألة مثلَ الفضل بين المطلوب الأول وجذر عدد الجذور، فالمطلوب الأصغر هو جذر عدد الجذور، وإن كان أعظم منه، فالمطلوب الأصغر أقلّ من جذر عدد الجذور مثل ب ز.

فلأنه إذا كان مقدارٌ له فضل على مقدارٍ آخر ونقص من الفاضل مقدارٌ أكثر مما نقص من المفضول، فيكون / فضل الباقي من الفاضل على ل - ١٦٢ - الباقي من المفضول أقلَّ من الفضل الأول بمقدار التفاوت بين المنقوصين. وفضلُ مجموع الجسمين المذكورين اللذين مع ضلع ب د - وهما جذوره وأمواله - على مكعبه هو العددُ الأعظم. فمجموع الجسمين هو الفاضل، والمكعب هو المفضول. فإذا نقصنا من جذوره، وهو ضرب ب د في مربع ا ب، ضَرْبَ د ز في مربع ا ب، يبقى ضرب ب ز في مربع ا ب. وإذا نقصنا من أمواله - وهو مربع ب د في ب جـ - علمَ د ب ب ز في د ز مضروباً في ب جـ، يبقى مربع ب ز في ب جـ. وإذا نقصنا من مكعبه / - وهو ضرب مربع د ب في د ب - علمَ د ب ب ز في د ز مضروباً ب - ٢٢ - في د ب، ومربعَ ب ز في د ز، يبقى مكعب ب ز. فإذا جعلنا ب ز ضلعاً، فيكون جذوره هو [مربع] ب ز في مربع ا ب وهو الباقي من

6 عدد الجذور (الأولى): ممحوة [ب] - 8 مقدار (الأولى والثانية): مقدارا [ب، ل] - 9 من المفضول: ممحوة [ب] - 13 مربع: ناقصة [ل]

الجذور الأُوَل، وأمواله مربع ب ز في ب جـ وهو الباقي من الأموال الأُوَل، ومكعبه هو مكعب ب ز الباقي من المكعب الأول. والعددُ الذي يكون معه مثلُ فضل مجموع جذوره وأمواله، وهي بقية المجسّمين المذكورين بعد النقصانين المذكورين، ‹ على المكعب الذي يكون معه ›. وهذا المكعبُ بقيةُ المفضول. وفضلُ مجموع هذين المجسّمين على هذا المكعب هو العددُ / الذي يكون مع ضلع ب ز، وهو أقلُّ من الفضل ل - ١٦٣ - و الأول، وهو العدد الأعظم، بقدْر زيادة النقصان الذي نقصناه من المجسّمين على النقصان الذي نقصناه من المكعب. فهذا التفاوت بين النقصانين مثلُ التفاوت بين العدد الأعظم والمسؤول. ونقصان المجسّمين د ز في مربع ا ب وعلم د ب ب ز في د ز ثم في ب جـ، ونقصانُ المكعب مربّعُ ز ب في د ز، والعلم في د ب. فإذا ألقينا ضرْب العلم في ب ز من كلا الجانبين، يبقى منهما نقصان المجسّمين د ز في مربع ا ب والعلم في ز جـ، ونقصان المكعب مربع ز ب في د ز والعلم في د ز. فإذا ألقينا من كلا الجانبين مربع ا ب في د ز يبقى منهما نقصان المجسّمين، العلم وهو د ب ب ز في د ز ثم في ز جـ، ونقصان المكعب، علم د ب ب ا في د ا مضروباً في د ز. وهاتان البقيّتان هما جانبا النُّقصانين. فليكن د ز شيئاً. أما خاصّة نقصان المكعب فتكون أشياءَ بعدّة العلم الذي في خاصيته. وأما خاصّة نقصان المجسّمين فالعلم – وهو د ب ب ز في د ز وهو ضعف د ب إلا شيئاً في شيء – يكون أشياء بعدّة ضعف ب د / إلا مالاً، ومضروبُها في جـ ز وهو عددُ د جـ وشيء يصير أشياء بعدّة ل - ١٦٣ - ظ ضعف د ب في د جـ، وأموالاً بعدّة ضعف د ب بنقصان جـ د، وإلّا

6 من: بين [ب، ل] – 10 ب ز: ب ا [ب، ل] – 12 د ز: ز ب: [ب، ل] – 17 فتكون: فيكون [ب، ل] – 19 شيئا: شيء [ب، ل]

كعباً. فلأنا بيّنا أن فضل المجسّمين الأولين على المكعب الأول – وهو مكعب ب د – هو العددُ الأعظمُ، وفضلَ مجموع المجسمين الآخرَيْن على مكعب ب ز هو العدد الثاني، وهو العدد المسؤول، وهذا الفضل أقلّ من ذلك الفضل، أعني هذا العدد ‹ أقل › من ذلك العدد بمقدار زيادةِ النقصان الواقع في المجسّمين ‹ على النقصان الواقع في المكعب ›، وزيادةُ أحد النقصانين على الآخر هي بعينها زيادة أحد الفضلين على الآخر، فيكون فضل العدد الأعظم على العدد المسؤول بمقدار زيادة خاصّة نقصان المجسّمين على خاصة نقصان المكعب. فذلك الفضل، إذا جُمع مع خاصّة نقصان المكعب، يصير معادلاً لخاصّة نقصان المجسّمين. فعدد التفاوت بين الأعظم والمسؤول، إذا جمعناه مع خاصة نقصان المكعب – وهي أشياء بعدّة [ضعف] علم د ب ب ا في د ا – يكون معادلاً لخاصّة نقصان المجسّمين، وهي أشياء بعدّة ضعف د ب في د ج، وأموالٌ بعدّة ضعف د ب بنقصان ج د وإلا كعباً. فإذا جبرنا وقابلنا وألقينا الأشياء / من كلا الجانبين لتساويهما، يبقى عدد التفاوت وكعبٌ يعدل أموالاً بعدّة ل – ١٦٤ – و
ضعف د ب منقوصاً منه د ج. فيُستخرج المطلوب بتلك المسألة، فيخرج د ز، فننقصه من المطلوب الأول، فيحصل المطلوب الأصغر.

ج د ا ز ب

فحاصل الكلام في هذا القسم، أن نجعل ثلث عدد الجذور عدداً، وثلثي عددِ الأموال جذوراً، ونستخرج المطلوبَ بمسألةٍ: عدد وجذور يعدل مالاً؛ فما خرج فهو المطلوب الأول. ونضرب مربع المطلوب في فضل

13 كعباً: كعب [ب، ل]

عدد الأموال على المطلوب الأول؛ فما حصل فهو المجسّم. ونضرب المطلوب في عدد الجذور، ونزيد المبلغ على المجسّم؛ فما حصل فهو العدد الأعظم. فإن كان العدد المسؤول أكثر من العدد الأعظم فالمسألة مستحيلة؛ وإن كان مساوياً له فهي مُمكنة، ولها جواب واحد وهو المطلوب الأول؛ وإن كان أقلّ منه فهي أيضاً ممكنةٌ ولها جوابان: أحدهما أعظم من المطلوب الأول، والثاني أصغر منه. فإن كان العدد المسؤول مثلَ ضرب عدد الجذور في عدد الأموال، فالمطلوب الأعظم مثلُ عدد الأموال، والأصغرُ مثل جذر عددِ الجذور؛ وإن كان أقلَّ منه / أو أكثر ل - ١٦٤ - ظ
فننقص العدد المسؤول من العدد الأعظم، ونجعل الباقي عدداً، ونضعف المطلوب الأول، وننقص من ضعفه فضلَ عدد الأموال على المطلوب الأول، ونجعل الباقي عدد الأموال. فإن استخرجنا المطلوبَ بمسألة: مكعب وأموال يعدل عدداً، فالمطلوب الذي يخرج نزيده على المطلوب الأول، فيحصل الجواب الأعظم؛ وإن استخرجناه بمسألة: مكعب وعدد يعدل أموالاً؛ فالمطلوب الذي يخرج ننقصه من المطلوب الأول، فيبقى الجواب الأصغر.

وأما القسم الثالث: وهو أن يكون عدد الأموال أقلّ من جذر عدد الجذور:

فليكن اب جذر عدد الجذور، وبج عددَ الأموال. ونجعل ثلث مربع اب - وهو ثلث عدد الجذور - عدداً، وثلثي بج عددَ جذورٍ، ونستخرج المطلوب على مسألة: عدد وجذور يعدل مالاً. وليكن المطلوب

11 الأموال: ممحوة [ب]

الذي يخرج ب د، فيكون مربعه مثل ضربه في ثلثي ب ج مع ثلث مربع ا ب، فأقول: إن ب د يكون أعظم من ب ج وأصغر من ا ب.

لأنه إن كان مثلَ ب ج فيكون فضلُ مربعه على ضربه في ثلثيه أقلَّ من ثلث مربع ا ب، وكان من الواجب / أن / يعادل ثلثه؛ وإن كان ب د (ب – ٢٣ – و) (ل – ١٦٥ – و) أصغر من ب ج فيكون فضلُ مربعه على ضربه في ثلثي ب ج أقلّ من ثلث مربع ا ب بكثير؛ وإن كان مثلَ ا ب ففضْل مربعه على ضربه في ثلثي ب ج أكثر من ثلث مربع ا ب؛ وإن كان أعظم من ا ب ففضْل مربعه على ضربه في ثلثي ب ج أكثر من ثلث مربع ا ب بكثير. فقد تبيّن أن ب د أعظم من ب ج وأصغر من ا ب.

فلأن مربع ب د مثلُ ضرب ب د في ثلثي ب ج وثلثُ مربع ا ب، فثلاثة مربّعات ب د تعدل ضرب ب د في ب ج مرّتين ومربع ا ب. فإذا ألقينا من كلا الجانبين مربع د ب مرّةً، يبقى مربعا د ب مثل ضرب ا ب ب د في ا د، وهو العلم، مع ضرب ب د في د ج مرتين. فإذا ألقينا ضرب ضعف ب د في ب ج من الجانبين، يبقى من المربعين ضعف د ب في د ج مساوياً للعلم الباقي من الجانب الآخر. فعلم ا ب ب د في ا د مثل ضعف ب د في د ج. فنسبة ا ب ب د إلى ضعف ب د كنسبة ج د إلى ا د. فإذا جعلنا ب د ضلعاً، فالأموال هو مربع ب د في ب ج، والمكعب فمربع ب د في ب د، والجذور ضرب ب د في مربع ا ب.

فلأن الجذور أكثرُ من المكعب بمقدار ضرب ب د في العلم، يلزم أن يكون العدد أكثر من الأموال / بمثل ذلك. فمربّع ب د في ب ج، وهو (ل – ١٦٥ – ظ) الأموال، مع ضرب ب د في العلم يكون مثلَ العدد، وهو العدد الأول.

فأقول: إنه أعظم عددٍ يوجد مع فرض هذه الأموال والجذور حتى لو كان

16 د ج: د هـ [ب، ل] – 18 في ب د: ناقصة [ل]

العددُ ‹ المسؤول › أكثرَ من ذلك تستحيل المسألة. وأيّ ضلع يفرض أعظم من ب د أو أصغر منه، فإن العدد الذي يوجد معه حتى تصحّ المسألة يكون أقل من العدد الأول.

فليكن ب ه أعظم من ب د، فأقول: إن العدد الذي يكون مع ضلع ب ه أقلُّ من العدد الأعظم.

فلأن ضرب ضعف د ب في د ج مثلُ علم ا ب ب د في ا د؛ لكن علم ا ب ب ه في ا ه أصغرُ من ذلك العلم، وضرب ه ب ب د في د ج أعظم من ضعف ب د في د ج؛ فيكون ضرب د ب ب ه في د ج أعظمَ من علم ا ب ب ه في ا ه. فنسبة ه ب ب د إلى ا ب ب ه أعظم من نسبة ا ه إلى د ج. فنجعل نسبة د ه إلى ا ه مشتركة، فيكون النسبة المؤلفة من نسبة د ه إلى ا ه ومن نسبة ه ب ب د إلى ا ب ب ه – وهي نسبة علم ه ب ب د في د ه إلى علم ا ب ب ه في ا ه – أعظم من النسبة المؤلفة من نسبة د ه إلى ا ه ومن نسبة ا ه إلى د ج ‹ وهي نسبة د ه إلى د ج ›. فنسبة علم ه ب ب د في د ه إلى علم ا ب ب ه في ا ه أعظم من نسبة د ه إلى د ج؛ فعلم ه ب ب د في د ه مضروباً في د ج أعظم من علم اب ب ه في ا ه مضروباً في د ه. فإذا / زدنا على كلا الجانبين علم ا ب ب ه في ا ه مضروباً في د ج، ل – ١٦٦ – و فيصير في الجانب الأعظم علم ا ب ب د في ا د مضروباً في د ج، وفي الأصغر علم ا ب ب ه في ا ه مضروباً في ه ج. فإذا زدنا على الجانبين

12-9 أعظم من ... وهي نسبة: ناقصة [ل] – 11 د ه: حـ ه [ب] – 13 ومن نسبة ا ه: ناقصة [ل] – 16 علم: ناقصة [ل]

علم ا ب ب ه في ا ه، وعلم ه ب ب د في د ه مضروبين في ب ج، فيصير الأعظمُ علمَ ا ب ب د في ا د مضروباً في د ب، والأصغر علم ا ب ب ه في ا ه مضروباً في ه ب مع علم ه ب ب د في ه د مضروباً في ب ج. فإذا زدنا على كلا الجانبين مربع د ب في ب ج، يصير الجانب الأعظم هو العدد الأعظم، والأصغر هو علم ا ب ب ه في ا ه المضروب في ه ب، مع مربع ه ب في ب ج، وهو العدد الذي يكون مع ضلع ب ه؛ لأنه فضْلُ أموالِه وجذوره على مكعبه.

ا ه د ج ب

وإن فرضنا الضلع مثل ا ب ‹ الذي › مكعبه مساوٍ لجذوره، فيكون عدده مثلَ أمواله، وهو مربع ا ب في ب ج. فلنبيّن أنه أيضاً أقلُّ من العدد الأعظم.

فلأن علمَ ب ا ب د في ا د مضروباً في ب د أعظمُ من مضروبه في ب ج، فإذا زدنا على كلا الجانبين مربع د ب في ب ج يصير الجانبُ الأعظم هو العدد الأعظم والأصغر هو مربع ا ب في ب ج.

ا د ج ب

وأيضاً: إن فرضنا الضلع أعظم من ا ب مثل ب ط؛ فلأن فضلَ مكعبِ ب ط على جذوره، وهو علم ط ب ب ا في ا ط مضروباً / في ط ب، فيكون فضل أمواله على العدد مثلَ ذلك. فإذا نقصنا هذا الفضل من أمواله، أعني من مربع ب ط في ب ج، يكون الباقي مثل العدد الذي ل - ١٦٦ - ظ

8 الضلع مثل: ممحوة [ب] – 11-13 فلأن علم ... العدد الأعظم: ناقصة [ل] – 11 علم ب ا ب د: ممحوة [ب]

معه. فلأنا إذا نقصنا من مضروب مربع ب ط في ب ج مضروبَ العلم في ب ج، يبقى مضروبُ مربع ا ب في ب ج، فلو نقصنا مضروب العلم في ب ط يكون الباقي، وهو العدد، أقلّ من مضروب مربع ا ب في ب ج. وهذا المضْروب قد تبيّن أنه أقلّ من العدد الأعظم، فعدد ضلع ب ط أقل من العدد الأعظم بكثير.

ط ا د ج ب

وأيضاً: إن فرضنا الضلع أصغر من ب د وأعظم من ب ج مثل ب ز، فيكون فضلُ جذوره على مكعبه هو علم ا ب ب ز في ا ز مضروباً في ب ز؛ فيكون فضل العدد الذي معه على أمواله بهذا المقدار؛ فيكون علم ا ب ب ز في ا ز مضروباً في ب ز مع الأموال، وهو مربع ب ز في ب ج، مساوياً للعدد الذي يكون معه. فلأنه قد / تبيّن أن ب – ٢٣ – ظ ضعفَ ب د في د ج مثل ا ب ب د في ا د، العلم، فيكون هذا العلم أعظم من ضرب د ب ب ز في د ج. فنسبة ا ب ب د إلى د ب ب ز أعظم من نسبة ج ز إلى ا د. ونجعل نسبة ا د إلى د ز مشتركة. فالنسبةُ المؤلفة من ا ب ب د إلى د ب ب ز، ومن نسبة ا د إلى د ز، وهي نسبة علم ا ب ب د في د ا إلى علم د ب ب ز في د ز، أعظم / من ل – ١٦٧ – و النسبة المؤلفة من نسبة ج ز إلى ا د، ومن نسبة ا د إلى د ز، وهي نسبة ج ز إلى د ز. فنسبةُ العلم إلى العلمِ أعظمُ من نسبة ج ز إلى د ز؛ فيكون علمُ ا ب ب د في ا د المضروب في د ز أعظمَ من علمِ د ب ب ز في د ز المضروب في ز ج. فإذا زدنا على كلا الجانبين علمَ ا ب ب د في ا د المضروب في ز ج، صار الجانبُ الأعظم هذا العلم مضروباً

4 الأعظم فعدد: ممحوة [ب] – 6 إن: ناقصة [ل]

في د ج، والأصغرُ علم ا ب ب د في ا ز مضروباً في ز ج. فإذا زدنا على كلا الجانبين علم ا ب ب د في د ا، وعلم د ب ب ز في د ز مضروبيْن في ب ج، يصير الجانبُ الأعظم علمَ ا ب ب د في ا د مضروباً في د ب، مع علم د ب ب ز في د ز مضروباً في ب ج، والأصغر علم ا ب ب ز في ا ز مضروباً في ب ز. فإذا زدنا على كلا الجانبين مربع ب ز في ب ج، يصير الجانبُ الأعظم هو العدد الأعظم، والأصغرُ عددَ ضلع ب ز.

ا د ز ج ب

وأيضاً: إن فرضنا الضلع المطلوب مثل ب ج، فيكون مكعبه مثلَ أمواله، فعددُه مثل جذوره، وهو مربع ا ب في ب ج. فلأن علم ا ب ب د في ا د المضروب في د ب أعظم من مضروبه في ب ج، فإذا زدنا على الجانبين علم د ب ب ج في د ج مضروباً في ب ج، يصير الجانبُ / الأعظم هو العلم الأول في د ب والعلم الثاني في ب ج، والأصغر علم ل - ١٦٧ - ظ
ا ب ب ج في ا ج مضروباً في ب ج. فإذا زدنا على الجانبين مربع ب ج في ب ج يصير الجانب الأعظم هو العلم الأوّل في د ب، ومربع د ب في ب ج، وهو العدد الأعظم، والأصغر مربع ا ب ‹في› ب ج، وهو عدد ضلع ب ج.

ا د ج ب

وأيضاً: إن فرضنا الضلع أصغر من ب ج مثل ب ي، فلأن فضل أمواله، وهو مربع ب ي في ب ج، على مكعبه، وهو مكعب ب ي، إنَّما هو مربع ب ي في ي ج، ففضلُ عدده على جذوره مثل ذلك. فيكون

جذوره، وهو مربع ب ا في ب ي، مع مربع ب ي في ي ج، مثلَ عدده. فلأن مربع ا ب في ب ج أعظمُ من مربع ا ب في ب ي ومربع ب ي في ي ج، الذي هو عدد ضلع ب ي؛ وقد كان مربع ا ب في ب ج أصغر من العدد الأعظم، فعدد ضلع ب ي أصغر من العدد الأعظم بكثير.

فقد تبيّن أن أعظم عددٍ يمكن أن يوجد في هذه المسألة بعد فرض عدد الأموال والجذور، إنّما هو العدد الذي مع ضلع ب د، وهو العدد الأعظم حتى لو فُرض عددٌ أكثر من العدد الأعظم فلا يمكن أن يوجد له ضلع، فيكون مستحيلاً؛ فإن / كان العدد المسؤول مثلَ العدد الأعظم ل - ١٦٨ - و فالضلع المطلوب هو ب د، وإن كان أقلّ من العدد الأعظم فيوجد له ضلعان: أحدهما أعظم من ب د، والآخر أصغر منه.

أما المطلوب الأعظم: فليكن ب ك مثلَ ب د، ولنجعل ك م مثلَ د ج، ونجعل فضلَ العدد الأعظم على العدد المسؤول عدداً، وخطَّ د م عددَ أموالٍ. ونستخرج المطلوب على مسألة: مكعب وأموال بعدّة د م يعدل عدد التفاوت. وليكن المطلوبُ الذي يخرج أولاً أقلَّ من ا د، مثل د ه. فأقول: إن ب ه هو الضلع المطلوب.

فلأنه قد تبيّن أن ضعفَ د ب في د ج مثلُ ا ب ب د في ا د، وأيضاً علمَ ه ب ب د في د ه مثلُ مربع د ه وضرْب ه د في ضعف د ب، فمضروب هذا العلم في د ج، ونسمّيه: المجسم الأول، مثلُ مربع ه د في د ج وضعف د ب في ه د ثم في د ج، أعني ضعف د ب في

8 له: ا • [ل]

د ج ثم في هـ د، وهو مثل علَم ا ب ب د في ا د ثم في هـ د. فالمجسّم الأول مثل مربع هـ د في د ج، أعني في ك م مع هذا العلم في د هـ. لكن هذا العلم في هـ د ينقسم إلى علم ا ب ب هـ في ا هـ ثم في هـ د، ونسمّيه المجسّم الثاني، وإلى علم هـ ب ب د في هـ د ثم في هـ د، وهو مثل مربع / هـ د في هـ ب ب د أعني في هـ ك. فالمجسّمُ الأول مثل المجسّم ل - ١٦٨ - ظ الثاني مع مربع هـ د في هـ م. فإذا زدنا على كلا الجانبين علمَ ا ب ب هـ في ا هـ ثم في د ج، يصير جانبُ المجسّمِ الأول علم ا ب ب د في ا د مضروباً في د ج، وجانب المجسّم الثاني علم ا ب ب هـ في ا هـ مضروباً في هـ ج، مع مربع هـ د في هـ م، ويتعادل الجانبان. فإذا زدنا على الجانبين علمَ ا ب ب هـ في ا هـ، وعلم هـ ب ب د في هـ د مضروبين كلاهما في ب ج؛ يصير أحد الجانبين علم ا ب ب د في ا د مضروباً في د ب، يعادل الجانب الآخر وهو علم ا ب ب هـ ‹في ا هـ› مضروباً في هـ ب مع علم هـ ب ب د في هـ د مضروباً في ب ج، ومع مربع هـ د في هـ م. فإذا زدنا على الجانبين مربع د ب في ب ج يصير أحد الجانبين علم ا ب ب د في ا د مضروباً في د ب، مع مربع ب د في ب ج، وهو العدد الأعظم، وفي الجانب الآخر علم ا ب ب هـ في ا هـ مضروباً في هـ ب مع مربع هـ ب في ب ج، ومجموعها عدد ضلع ب هـ، مع مربع هـ د في هـ م. ففضل العدد الأعظم على ‹عدد› ضلع ب هـ هو / مربع ل - ١٦٩ - و هـ د في هـ م. وقد كان فضلُه على العدد المسؤول هو بعينه، فالعدد المسؤول هو مثل عدد / ضلع هـ ب، فـ ب هـ هو الضلع المطلوب. ب - ٢٤ - و

م ك ب ج د ه ا

4 الثاني: ناقصة [ل] – 7 يصير: ناقصة [ل]

وأيضاً: فليكن المطلوب الذي يخرج مثلَ ا د، فأقول: إن ا ب هو الضلع المطلوب.

فلأن ا ب إذا كان ضلعاً، فيكون مكعبه مثلَ جذوره، فيبقى عددُه مثلَ أمواله، أعني مثلَ مربع ا ب في ب ج. فلأن مربع ا د في ا م ينقسم إلى مربع ا د في م ك، أعني في د ج، وإلى مربع ا د في ا د د ك، أعني في ا ب ب د، وهو مثل ضرب ا ب ب د في ا د المضروب في ا د، أعني ضعف د ب في د ج المضروب في ا د، فمربع ا د في ا م مثلُ مربع ا د في د ج، وضعف ب د في ا د ثم في د ج، ومجموعها ا ب ب د في ا د ثم في ‹ د ج. فإذا زدنا على كلا الجانبين علم ا ب د ب في ا د مضروباً في › ب ج، يصير أحد الجانبين مربع ا د في ا م، وهذا العلمُ المضروبُ في ب ج، والآخر هذا العلمُ مضروباً في د ب. فإذا زدنا على كلا الجانبين مربع ب د في ب ج، يصير أحد الجانبين مربع ا د في ا م، مع مربع ا ب في ب ج، وفي الجانب الآخر العدد الأعظم. ففضلُ العدد الأعظم على مربع ا ب ‹ في › ب ج إنّما هو مربع / ا د في ل – ١٦٩ – ظ ا م، وفضله على العدد المسؤول هو بعينه. فالعدد المسؤول هو عدد ضلع ا ب، فـ ا ب هو الضلع المطلوب.

وأيضاً: فليكن المطلوبُ الذي يخرج بتلك المسألة أعظمَ من د ا، مثل د ط. فأقول: إن ب ط هو الضلع المطلوب.

فليكن مكعب ب د في جانب وأموالُه وجذورُه في الجانب الآخر. وفضلُ جانب الأموال والجذور على جانب المكعب هو العدد الأعظم، وهو علم ا ب ب د في ا د المضروب في ب د، مع مربع ب د في

3 فلأن: مطموسة [ب] – 7 أعني... في ا د: مكررة [ب، ل] – 12 ا د: ا ب [ب، ل] – 21 في ا د: في ا ب ب د في ا د [ل]

ب ج. فإذا زدنا على كلا الجانبين علم ط ب ب د في ط د مضروباً في ب ج، ومربع ا ب في ط د، يصير جانب الأموال والجذور هو مربع ب ط في ب ج، وهو أموالُ ضلع ب ط، ومربعَ ا ب في ب ط، وهو جذوره، وفي الجانب الآخر مكعب ب د وعلم ط ب ب د في د ط مضروباً في ب ج، ومربع ا ب مضروباً في د ط. وفضل جانب الأموال والجذور على هذا الجانب يكون باقياً على حاله، أعني يكون مثل العدد الأعظم. فإذا زدنا على هذا الجانب فقط ط ب ب د في ط د المضروب في ج د، وعلم ط ب ب ا في ا ط المضروب في ط د؛ يصير فضلُ جانب الجذور والأموال / ‹على الجانب الآخر› أنقصَ ممّا كان، أعني ل - ١٧٠ - و من العدد الأعظم بمقدار هذين العلمين اللَّذَيْن زدناهما على هذا الجانب خاصّةً، فيصير هذا الجانب مثلَ مكعب ب ط. فإذا جعلنا ب ط ضلعاً، فيكون أحدُ هذين الجانبين – وهو جانب الأموال والجذورِ – أموالَه وجذورَه، وهذا الجانب مكعبه، وفضل أمواله وجذوره على مكعبه يكون أنقص من العدد الأعظم بمقدار هذين المزيدين، أعني علمَ ط ب ب د في ط د المضروبَ في د ج، وعلمَ ط ب ب ا في ط ا المضروبَ في ط د. لكن فضل الجذور والأموال التي لضلع ب ط على مكعبه إنّما هو عدده. فيكون عددُه مع هذين العلمين المزيدين مثلَ العدد الأعظم. فلأن علم ط ب ب د في ط د هو مربع ط د، وضعف ب د في ط د، فمضروب هذا العلم في د ج هو مربع ط د في د ج، مع ضعف ب د في ط د ثم في د ج، أعني ضعفَ ب د في د ج ثم في ط د، أعني علم ا ب ب د في ا د ثم في ط د. فعلمُ ط ب ب د في ط د ثم في د ج، وهو أحد المزيدين، مثلُ مربع ط د في د ج مع علم ا ب ب د في ا د ثم

7 ب د: ممحوة [ب] – 21 ب د في ط د ثم: ممحوة [ب]

في ط د. والمزيدُ الآخر علمُ ط ب ب ا في ط ا ثم في ط د. فصار مجموعُ المزيدين / هو مربع ط د في د ج، مع مجموع هذين العلمين في ل – ١٧٠ – ظ ط د. ومجموعُ هذين العلمين هو علمُ ط ب ب د في ط د. فمجموع هذين المزيدين هو مربعُ ط د في د ج، أعني في ك م، مع علم ط ب ب د في ط د مضروباً في ط د. لكن هذا العلم هو مربع ط د، وضربُ ط د في ضعف ب د، أعني في د ك. فالعلم مثل ك ط في ط د، ومضروبُ العلم في ط د هو مضروبُ ك ط في ط د ثم في ط د، وهو مربع ط د في ط ك. فقد صار مجموع هذين المزيدين مثل مربع ط د في ط ك، وفي ك م، أعني مربع ط د في ط م. فمربع ط د في ط م مع عدد ضلع ب ط إنّما هو مثل العدد الأعظم. وقد كان مع العدد المسؤول أيضاً مثل العدد الأعظم، فعدد ضلع ب ط هو العدد المسؤول، فـ ب ط هو الضلع المطلوب.

م ك ب ج د ا ط

وأقول: إن المطلوب الأعظم له نهاية في العظم.

فنجعل مربع ا ب عدداً وهو عدد الجذور، وعددَ ب ج – وهو عددُ الأموال – جذوراً، ونستخرج المطلوبَ على مسألة: مال يعدل عدداً وجذوراً. وليكن المطلوبُ الذي يخرج ب ط. فأقول: إن أيَّ ضلع يوجد في هذه المسألة هو أصغر من ب ط.

فلأن مربع ب ط /، وهو المال، في جانبٍ، وهو مثل ضرب ب ط ل – ١٧١ – و في ب ج – وهو الجذور – مع مربع ا ب وهو العدد، وهذان في

2 هو: وهو [ب، ل] – 4 هو مربع ط د: ممحوة [ب] – 6 في د ك. فالعلم مثل ك ط: ممحوة [ب] – 7 ثم في ط د: ناقصة [ل] – 15 جذوراً ونستخرج: ممحوة [ب] – 17 هو: فهو [ب، ل] – 18 ب ط وهو المال: ممحوة [ب]

جانب، فإذا ضربنا كلا الجانبين في ب ط ، يصير في أحد الجانبين مكعب ب ط ، وفي الجانب الآخر مربع ب ط في ب ج، وهو أمواله، ومربع ا ب في ب ط وهو جذوره. فمكعبه مساوٍ لأمواله وجذوره. وكان من الواجب أن يكون مكعب الضلع أنقص من أمواله وجذوره بمقدار العدد. فـ ب ط لا يصلح أن يكون مطلوباً، وأيٌّ ضلعٍ يُفرضْ فهو أقل من ب ط ضرورةً. / ب – ٢٤ – ظ

ب ج د ا ط

وأقول أيضاً: إن كل خط يفرض أصغرَ من ب ط يصلح أن يكون مطلوباً.

فليفرض ب ع أصغرَ من ب ط ، فلأن فضلَ مكعب ب ط على مكعب ب ع إنّما هو مربع ع ب في ط ع ، مع علم ط ب ب ع في ط ع مضروباً في ط ب ، وهو بعينه فضلُ أموالِ وجذورِ ب ط على مكعب ب ع . وفضلُ أموالِ وجذورِ ب ط على أموالِ وجذورِ ب ع إنّما هو مربع ا ب في ط ع مع العلم المذكور في ب ج ؛ وهذا الفضل أقلّ من الفضل الأول بكثير، فكعب ب ع / أصغر من أمواله وجذوره. فإذا جُعل فضلُ أمواله وجذوره على مكعبه عدداً، فتصحُّ المسألةُ، ويكون مكعّب ب ع مع ذلك العدد مثلَ أموالِهِ وجذوره. ل – ١٧١ – ظ

ب ج د ا ع ط

1 كلا: كل [ب، ل] – 7 يصلح: فيصلح [ب، ل] – 15 فتصح: فيصح [ب، ل]

وأما المطلوب الأصغر: فلنجعل فضل العدد الأعظم على المسؤول عدداً، و د م عددَ أموالٍ، ونستخرج المطلوب على مسألة: مكعب وعدد يعدل أموالاً.

وليكن المطلوب الذي يخرج بتلك المسألة أولاً أصغرَ من د ج، وهو د ه. فيكون مربع د ه في ه م مثلَ عدد الفضل. فأقول: إن ب ه هو الضلع المطلوب.

فلأن ا ب ب د في ا د، العلم، هو مثلُ ضعف ب د في د ج، فضروبا كلّ واحدٍ منهما في د ه متساويان. لكن مضروب ضعف ب د في د ج، ثم في د ه، هو ضعف ب د في د ه ثم في د ج. لكن ضعف ب د في د ه هو مربع د ه مع علم د ب ب ه في د ه. فمربّع د ه في د ج، أعني ك م، مع هذا العلم في د ج، أعني ‹ د ب مع ب ه › في د ه وفي د ج، مثلُ علم ا ب ب د في ا د المضروب في د ه. لكن علم د ب ب ه في د ه ثم في د ه، مثلُ مربع د ه في ه ك ‹ الذي › مع مربع ه د في م ك، هو مربع ه د في ه م. فعلم ا ب ب د في ا د ثم في د ه – وهو أحد الجانبين – / يعادل مربع د ه في د ج مع علم د ب ل – ١٧٢ – و ب ه في د ه المضروب في د ج وهو الجانب الآخر. فليُزد على الجانبين علمُ ا ب ب د في ا د ثم في ه ج، فيصير أحدهما هذا العلم مضروباً في د ج والآخر كلا العلمين ‹ أحدهما › في ه ج ‹ والآخر في د ه › أعني علم ا ب ب ه في ا ه المضروب في ه ج، ومربع د ه في ه م. فإذا زدنا على كلا الجانبين علمَ ا ب ب د في ا د المضروبَ في ب ج، يصير أحدهما هذا العلمَ مضروباً في د ب، والآخر علم ا ب ب ه في ا ه

12 وفي د ج: وفي ه ج [ب، ل] – 13 مع: ومع [ب، ل] – 14 هو: وهو [ب، ل] – 15 د ج: ه ب [ب، ل] / د ب: ا ب [ب، ل] – 16 د ج: ه ج [ب، ل]

المضروب في هـ ج، ومربع د هـ في هـ م، وعلم ا ب ب د في ا د مضروباً في ب ج. فإذا زدنا على كلا الجانبين علم د ب ب هـ في د هـ المضروب في ب ج، يصير أحدهما علم ا ب ب د في ا د المضروب في د ب، مع علم د ب ب هـ في د هـ المضروب في ب ج، والآخرُ علم ا ب ب هـ في ا هـ المضروب في ب هـ، مع مربع د هـ في هـ م. فإذا زدنا على الجانبين مربعَ هـ ب في ب ج، يصير أحدهما علمَ ا ب ب د في ا د المضروبَ في د ب، ومربع د ب في ب ج، وهو العددُ الأعظم، والآخرُ علم ا ب ب هـ في ا هـ المضروب في ب هـ، / ومربع هـ ب في ب ج، ل - ١٧٢ - ظ وبمجموعُهما عددُ ضلعِ هـ ب، مع مربع د هـ في هـ م. فعددُ ضلع هـ ب مع مربع د هـ في هـ م مثلُ العدد الأعظم. وقد كان العددُ المسؤول مع مربع د هـ في هـ م مثلَ العدد الأعظم. فالعدد المسؤول مثلُ عدد ضلع هـ ب، فـ هـ ب هو الضلع المطلوب.

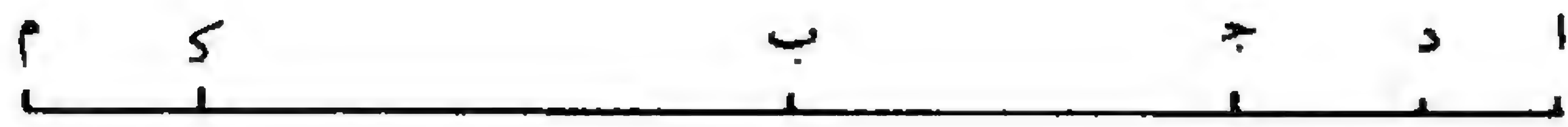
م ك ب ج د ا

وأيضاً: فليكن الضلعُ الذي يخرج بتلك المسألة إنّما هو د ج، فأقول: إن ب ج هو الضلع المطلوب.

فلأن علم ا ب ب د في ا د المضروبَ في ج د هو مربعُ د ج في ضعف ب د، أعني في د ك، أعني في ج م، فعلم ا ب ب د في ا د المضروب في د ج، وهو في جانب، مثل مربع د ج في ج م، وهو في الجانب الآخر. فإذا زدنا على كلا الجانبين هذا العلم في ب ج، يصير أحدهما العلمَ في د ب، والآخرُ العلمَ في ب ج مع مربع د ج في ج م. فإذا زدنا على كلا الجانبين مربع د ب في ب ج، يصير أحدهما مثلَ العدد

6 ب ج: ب د [ب]، مطموسة [ل] – 18 ب ج: ممحوة [ب]

الأعظم، والآخر هو مربع ا ب في ب ج ، وهو عدد ضلع ب ج ، / مع ل - ١٧٣ - و مربع د ج في ج م. ففضلُ العدد الأعظم على العدد الذي مع ضلع ب ج إنّما هو مربع د ج في ج م . وقد كان فضله على العدد المسؤول بعينه مربع د ج في ج م. فالعدد المسؤول مثل مربع ا ب في ب ج. فإذا جعلنا ب ج ضلعاً فمكعبه يكون مثلَ أمواله، فعدده أيضاً مثل جذوره، وهو مربع ا ب في ب ج. فالعدد المسؤول مثل عدد ضلع ب ج، فـ ب ج هو الضلع المطلوب.



وليكن المطلوبُ الذي يخرج بتلك المسألة إنّما هو د ط ، وهو أعظم من د ج ، فأقول: إن ب ط هو الضلع المطلوب.

فلأن فضلَ أموالِ وجذورِ د ب على مكعبه هو العددُ الأعظم، فليكن أموالُ وجذورُ د ب في جانب، ومكعبُه في جانبٍ آخر، وفضلُ أحد الجانبين على الآخر هو العدد الأعظم؛ فإذا نقصنا من كلا الجانبين علم د ب ب ط في د ط المضروب في ب ط ، وهو من الأموال، ومربع د ب في د ط ، / وهو من الجذور، يبقى جانبُ المكعبِ مكعبَ ب ط ، ب - ٢٥ - و وجانبُ الأموالِ والجذور الأموال والجذور بنقصان هذين المنقوصين، ويكون فضل الجانبين على حالها، وهو مثل العدد الأعظم. فإذا نقصنا من جانب / الأموال والجذور فقط العلمَ المذكور في ج ط ، وهو من ل - ١٧٣ - ظ الأموال، وعلم ا ب ب د في ا د المضروب في د ط ، وهو من الجذور، يصير فضل الباقي في جانب الأموال والجذور على مكعب ب ط أنقص

2 الأعظم: كرر ناسخ [ل] بعدها العبارة السابقة وهي «والآخر هو مربع ... في ج م» – 16 العدد: ممحوة [ب]

ممّا كان، أعني من العدد الأعظم، بهذا المنقوص، أعني بمقدار علم د ب ب ط ‹في د ط› المضروب في ج ط، وبمقدار علم ا ب ب د في ا د المضروب في د ط، ويصير جانب الأموال والجذور إنّما هو مربع ب ط في ب ج، وهو أموال ضلع ب ط، ومربع ا ب في ب ط، وهو جذوره. ففضل أموال وجذور ب ط على مكعبه أقلّ من العدد الأعظم بالمقدارين المذكورين. لكن هذا الفضلَ هو عدد ضلع ب ط؛ فعدد ضلع ب ط أقلّ من العدد الأعظم بالمقدارين المذكورين. وأحد المقدارين، وهو علم ا ب ب د في ا د ثم في د ط، هو ضعف د ب في د ج ثم في د ط، أعني ضعف د ب في د ط ثم في د ج. لكن ضعف د ب في د ط مثل مربع د ط مع علم د ب ب ط في د ط. فضعف د ب في د ط ثم في د ج مثلُ مربع د ط في د ج، أعني في م ك، مع علم د ب ب ط في د ط ثم في د ج. فأحد المقدارين مثل / مربع د ط في م ك ل – ١٧٤ – و
مع هذا العلم المذكور في د ج. وقد كان المقدارُ الآخر هو العلمَ المذكورَ فى ج ط. فكلا المقدارين مثل مربع د ط في م ك مع علم د ب ب ط في د ط ثم في د ط، أعني مربع د ط في ط ك. وكلا المقدارين مثل مربع د ط في ط م. وقد كان العدد المسؤول أقلّ من العدد الأعظم بهذا المقدار. فعدد ضلع ب ط مثل العدد المسؤول، فـ ب ط هو الضلع المطلوب.



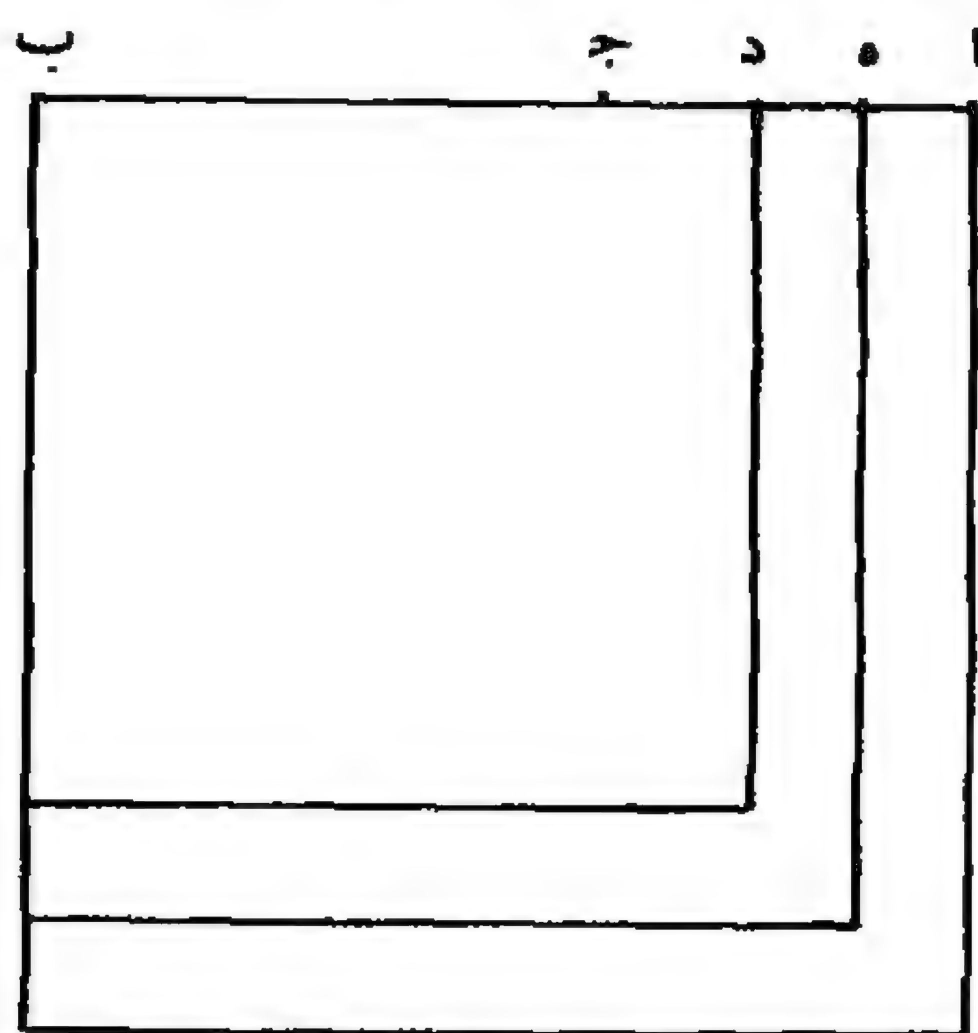
وأما استخراج المطلوب الأعظم: فنجعل عدد التفاوت بين العدد الأعظم والمسؤول عدداً، ونزيد فضل المطلوب الأول على عدد الأموال،

10-9 لكن ضعف د ب في د ط : كررها ناسخ [ل]، بعد أن أبدل د ط بـ د ج – 14 ج ط : خط [ل] / فكلا: فكل: [ب، ل]

على ضعف المطلوب الأول، ونجعل المبلغ عددَ أموالٍ، ونستخرج المطلوب بمسألة: مكعب وأموال يعدل عدداً. فإن كان المطلوب الذي يخرج بتلك المسألة أصغرَ من فضلِ جذرِ عدد الجذور على المطلوب الأول مثل د ه؛ فلأن العدد الأعظم هو ضربُ ب د في العلم الباقي من مربعه – وهو ضرب ب د في العلم الداخل، وب د في العلم الخارج – ومربع ب د في ب ج؛ فهو ثلاثة أقسام. وأما العدد الذي مع ضلع ب ه فهو ب ه في العلم / الخارج ومربع ب ه في ب ج. أما ب ه في العلم ل – ١٧٤ – ظ
الخارج، فينقسم إلى ب د في العلم الخارج وإلى د ه في العلم الخارج. ومربعُ ب ه في ب ج ينقسم إلى العلم الداخل في ب ج، ومربع ب د في ب ج. فقد انقسم العدد الذي مع ضلع ب ه إلى أربعة أقسام؛ وب د في العلم الخارج، ومربعُ د ب في ب ج مشتركان في كلا الجانبين، فإذا ألقيناهما يبقى في جانب العدد الأعظم ضربُ ب د في العلم الداخل، وفي جانب العدد المسؤولِ ضربُ ه د في العلم الخارج، وب ج في العلم الداخل. والذي بقي في جانب العدد الأعظم – وهو ضرب ب د في العلم الداخل – ينقسم إلى ضرب ب ج في العلم الداخل وإلى د ج في العلم الداخل. فإذا ألقينا ب ج في العلم الداخل من كلا الجانبين يبقى خاصّةُ العدد الأعظم، ضربَ ج د في العلم الداخل، وخاصّةُ العددِ المسؤولِ، ضربَ ه د في العلم الخارج. فنجعل د ه شيئاً. أما خاصّة العدد الأعظم فهو علم ه ب ب د في ه د المضروب في د ج. وه ب ب د الذي هو ضعف عدد ب د وشيءٌ، في ه د الشيء يكون أشياءَ بعدّة ضعف ب د، ومالاً؛ ومضروبُه في عدد د ج أشياءُ بعدّة ضعفِ / د ب في ل – ١٧٥ – و

6 فهو: وهو [ب، ل] – 7 فهو: هو [ب، ل] – 8 فينقسم: ينقسم [ب، ل] – 11 العلم: ناقصة [ل] – 19 فهو: هو [ب، ل]

د ج وأموالٌ بعدّة د ج. وخاصّةُ العدد المسؤول هو علم ا ب ب ه في ا ه المضروب في ه د. وا ب ب ه الذي هو ا ب ب د وشيء، في ا ه الذي هو عددُ ا د إلّا شيئاً يكون عدداً بعدّة علم ا ب ب د في ا د إلّا أشياء بعدّة ضعف ب د وإلّا مالاً. ومضروبُها في د ه يصير أشياء بعدّة العلم، إلّا أموالاً بعدّة ضعف ب د، وإلّا كعباً، فمع عدد التفاوت يعدل خاصّةَ العدد الأول، وهو أشياءُ بعِدّة ضعف د ب في د ج، وأموالٌ بعدّة د ج. فبعد الجبر والمقابلة وإلقاء الأشياء من الجانبين لتساويهما، يصير أموالاً بعدّة ضعف ب د، وهو ضعف المطلوب الأول وزيادة ج د الذي هو فضل المطلوب الأول على عدد الأموال، مع كعب، تعدل عدد التفاوت. فيستخرج المطلوب بتلك المسألة، فيخرج



د ه، فنزيده على المطلوب الأول، فما حصل فهو الضلع المطلوب.

وإن كان المطلوب الذي يخرج بتلك المسألة مثلَ فضل جذر عدد الجذور على المطلوب الأول، فالمطلوب ‹ الأعظم › مثل جذر عدد الجذور.

وإن كان أعظم منه مثل د ز، فلأن العدد / الأعظم / هو فضل مجسّمي ب – ٢٥ – ظ
ل – ١٧٥ – ظ

2 ب د: ب ج [ب، ل] – 3 شيئا: شيء [ب، ل] – 7 الأشياء: ممحوة [ب] – 10 تعدل: يعدل [ب، ل]

الجذور والأموال اللذين مع ضلع ب د على مكعبه، فإذا زيد على المجسّمين زيادة، وعلى المكعب أكثر، حتى حصل مكعب ضلع ب ز ومجسّميه، فالعدد الذي يكون مع ضلع ب ز أقلّ من العدد الأعظم بمقدار فضل الزيادة التي زدناها على المكعب على الزيادة التي زدناها على المجسّمين. فلأن مجسّم جذور د ب هو د ب في مربع ا ب، فإذا زدنا عليه ز د في مربع ا ب، يصير ز ب في مربع ا ب وهو مجسّم جذور ز ب؛ ومجسّم أموال د ب هو مربع د ب في ب ج، فإذا زدنا عليه ز ب ب د في ز د، وهو العلم المضروب في ب ج، يحصل المجسّم الذي يكون من ضرب مربع ز ب في ب ج، وهو أموالُ ضلع ب ز. فقد صار فضلُ مجسّميْ ضلع ب ز على مجسّميْ ضلع ب د هو ضربَ ز د في مربع ا ب وز ب ب د في ز د، وهو العلم المضروبُ في ب ج. أما زيادة مكعب ب ز على مكعب ب د فهو مربع ز ب في ز د وعلم ز ب ب د في ز د مضروباً في ب د. فحاصل زيادة المكعب مربع ز ب في ز د، والعلم في ب د. وزيادةُ المجسّمين مربعُ ا ب في ز د، والعلم في ب ج. فإذا ألقينا من الجانبين العلم في ب ج / يبقى بقيةُ زيادةِ المكعب مربع ز ب في ز د، ل – ١٧٦ – و والعلم في ج د، وبقيةُ زيادةِ المجسّمين: مربعُ ا ب في ز د. وإذا ألقينا مربع ا ب في ز د من الجانبين لا يبقى من زيادة المجسمين شيء، ويبقى فضلُ زيادة المكعب على زيادة المجسّمين هو ز ب ب ا في ز ا، وهو العلم، مضروباً في د ز، والعلمُ الآخر وهو علم ز ب ب د في ز د مضروباً في ج د. ومجموعُ هذين العلمين مثل عدد التفاوت، فنجعل ز د شيئاً، فعلَم ز ب ب ا في ز ا هو من ضرب عددي ا ب ب د وشيء

3 وبجسميه: وبجسمه [ب، ل] – 12 فهو: هو [ب، ل] – 15 ز ب: د ب [ب، ل] – 19 علم ز ب ب د: علم ا ب ب د [ب، ل] / ز د: ا د [ب، ل]

في الشيء إلّا عددَ د ا. فيكون أشياءَ بعدّة ضعف ب د ومالاً إلّا عدداً مثلَ ضرب ا ب ب د مضروباً في ا د، ومضروبُها في ز د الشيء يكون أموالاً بعدّة ضعف ب د وكعباً إلّا أشياء بعدّة ضرب ا ب ب د في ا د. وأما العلم الآخر وهو علم ز ب ب د في ز د، فهو ضعف ب د وشيءٌ في الشيء، فيكون أشياءَ بعدّة ضعف ب د ومالاً، ومضروبُها في عدد د جـ يصير أشياءَ بعدّة ضعف ب د في جـ د وأموالاً بعدّة جـ د. فإذا جمعنا هذا الحاصلَ مع حاصل العلَم الأول، تذهب الأشياءُ الزائدةُ بالناقصةِ لتساويها، ويحصل أموالٌ بعدّة ضعف ب د وزيادةُ د جـ، ومكعبٌ، يعدل عدد التفاوت بين المسؤول / والأعظم. فيُستخرج المطلوب بمسألة: ل - ١٧٦ - ظ مكعب وأموال يعدل عدداً، فيخرج ز د الشيء، فنزيده على ب د فيحصل المطلوب ‹ الأعظم ›.

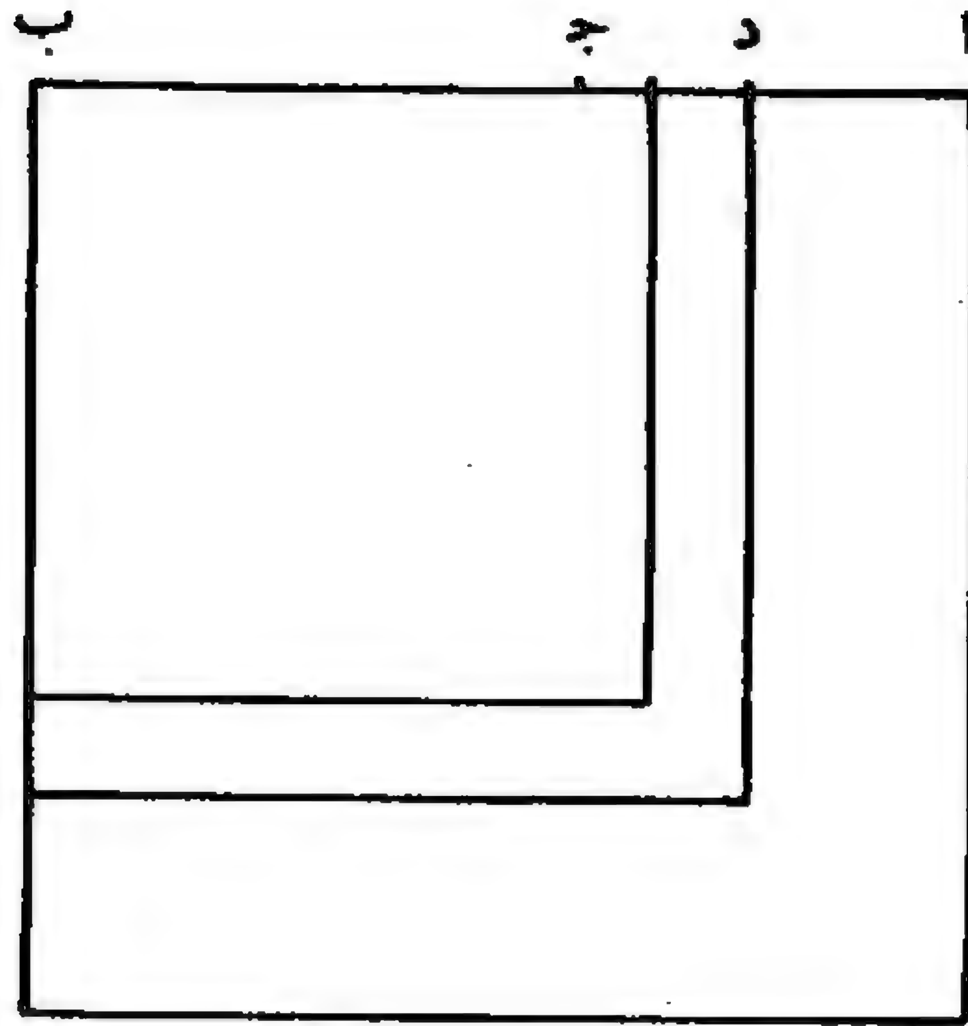
ب جـ د ا ز

وأما استخراج المطلوب الأصغر: فنجعل عددَ التفاوت بين العدد الأعظم والمسؤول عدداً، ‹ ونزيد فضل ب د على ب جـ على ضعف ب د › ونجعل المبلغَ عدد أموالٍ، ونستخرج المطلوب بمسألة: مكعب وعدد يعدل أموالاً. فإن كان المطلوب الذي يخرج بتلك المسألة أصغر من فضل المطلوب الأول على عدد الأموال مثل د ك، فلأن جذور ضلع ك ب هو ضربُ ك ب في مربع ا ب، وأموالُه هو مربع ك ب في ب جـ، والجذورُ أعظم من المكعب بمقدار العلم الكبير، وهو مجموع العلمين في ك ب، فيكون العددُ أعظمَ من الأموال بمثل ذلك. فيكون العدد مساوياً لمربع ك ب في ب جـ وهو الأموال ‹ وب ك › في مجموع العلمين؛ والعدد

4 ز د: الزاي مطموسة [ب، ل]

الأعظم هو مربع د ب في ب ج، وضرب د ب في العلم الخارج. أما مربع د ب في ب ج، فهو مربع ك ب في ب ج، والعلم الداخل في ب ج. أما د ب في العلم الخارج، فهو ك ب في العلم الخارج، وك د في العلم الخارج. فقد انقسم العدد الأعظم إلى أربعة أقسام. أما ك ب / في العلم الخارج، ل - ١٧٧ - و
ومربعُ ك ب في ب ج، فمشتركان في الجانبين. فإذا ألقيناهما، فيبقى في جانب العدد الأعظم العلمُ الداخل في ب ج، وك د في العلم الخارج، وفي جانب العدد المسؤول ضرب ك ب في العلم الداخل. فإذا ألقينا ب ج في العلم الداخل، تبقى خاصّةُ العدد المسؤولِ ج ك في العلم الداخل، وخاصّةُ العددِ الأعظم ك د في العلم الخارج. فخاصّةُ العدد المسؤولِ مع عدد التفاوت يعدل خاصّةَ العدد الأعظم. فنجعل د ك شيئاً، فتكون خاصّة العدد الأعظم أشياءَ بعدّة ا ب ب د في ا د العلم. وأما خاصةُ العددِ المسؤول، فالعلم من ضعف د ب إلّا شيئاً في شيء؛ فيكون أشياءَ بعدّة ضعف د ب إلّا مالاً، ومضروبها في ج ك – وهو عدد ج د إلا شيئاً – يصير أشياءَ بعِدّة ضعف د ب في ج د وكعباً إلا أموالاً عِدّتُها ضعفُ د ب وزيادةُ ج د؛ وهو مع عدد التفاوت يعدل أشياءَ بعِدّة ا ب ب د في ا د العلم. فبعد الجبر والمقابلة وإلقاء الأشياء من الجانبين لتساويهما؛ يكون كعباً وعدد التفاوت يعدل أموالاً عدّتها ضعفُ د ب وزيادةُ ج د. فيستخرج / المطلوبُ بمسألة: مكعب وعدد يعدل أموالاً، ل - ١٧٧ - ظ
فيخرج د ك فننقصه من ب د فيبقى المطلوب.

2 فهو: هو [ب، ل] – 3 فهو: هو [ب، ل] – 7 المسؤول: هكذا، والمقصود العدد الذي مع ك ب – 9 فخاصة العدد: ممحوة [ب] – 12 شيئا: شيء [ب، ل] – 14 شيئا: شيء [ب، ل]



وإن كان المطلوب الذي يخرج بتلك المسألة مثلَ فضل المطلوب الأول على عدد الأموال؛ / فالمطلوب ‹الأصغر› مثلُ عدد الأموال. ب – ٢٦ – و

وإن كان أعظمَ منه مثلَ د هـ: فلأنه إذا نقص من مجسمِ جذورِ ب د، أعني من ضرب ب د في مربع ا ب – ضربُ د هـ في مربع ا ب، يكون الباقي ضربَ ب هـ في مربع ا ب، وهو مجسمُ جذورِ ب هـ. وإذا نقص من مجسمِ أموالِ د ب – وهو مربع د ب في ج ب – ضربُ د ب ب هـ في د هـ، وهو العلم المضروب في ب ج؛ يكون الباقي مجسمَ أموالِ ضلعِ ب هـ، وهو مربّع ب هـ في ب ج. ففضْل مجسّميْ ضلع ب د على مجسّميْ ضلع ب هـ هو ضرب د هـ في مربع ا ب، والعلم المذكور في ب ج. وفضل مكعب ب د على مكعب ب هـ هو مربع ب د في د هـ، وعلم د ب ب هـ في د هـ مضروباً في ب هـ. ولأن فضل مجسّميْ ب هـ على مكعبه هو العددُ المسؤول الذي مع ضلع ب هـ؛ فيكون فضلُ العدد الأعظم على المسؤول كفضل النقصان الذي وقع بمجسّميْ ب هـ عن مجسّميْ ب د على النقصان الذي وقع في مكعبه

4 مربع ا ب: كرر ناسخ [ل] «د هـ في مربع ا ب» وهي كلمات من الجملة التي تلي الموضع المشار إليه – 14 مكعبه: المقصود مكعب ب هـ

/ عن مكعب ب د. ونقصانُ المكعب مربعُ ب د في د هـ، والعلمُ في ب هـ. ونقصانُ المجسّمين مربعُ ا ب في د هـ، والعلمُ في ب جـ. فإذا ألقينا من كلا الجانبين العلم في ب هـ، يبقى في كلّ واحدٍ منهما بقيةٌ. أما بقية نقصان المكعب، ‹ فهي › مربع ب د في د هـ، وبقيةُ نقصان المجسّمين مربعُ ا ب في د هـ، والعلمُ في جـ هـ. فإذا ألقينا من الجانبين مربع ب د في د هـ، لايبقى من جانب نقصان المكعب شيء، ويبقى فضل نقصان المجسّمين على نقصان المكعب علم ا ب ب د في ا د مضروباً في د هـ، وعلم د ب ب هـ في د هـ مضروباً في جـ هـ، ومجموعها مثل عدد التفاوت بين الأعظم والمسؤول. فنجعل د هـ شيئاً، فعلم ا ب ب د في ا د عدد معلوم، ومضروبه في د هـ يكون أشياء بعدّة ذلك العلم؛ وعلم د ب ب هـ في د هـ – وهو ضعف د ب إلا شيئاً في د هـ الشيء – يكون أشياء بعدّة ضعف د ب إلا مالاً؛ ومضروبُه في جـ هـ، وهو شيء إلا عدد جـ د، يكون أموالاً بعدّةِ ضعف د ب وزيادة جـ د، إلا أشياءَ بعدّة ضعف د ب في جـ د، وإلا كعباً. فإذا جمعنا هذا الحاصل مع حاصل العلم الآخر وهو أشياء بعِدّة علم ا ب ب د / في ا د، فالأشياء الزائدة تذهب بالأشياء الناقصة لتساويها، ويصير أموالاً بضعف د ب وزيادةِ جـ د، إلّا كعباً، يعدل عدد التفاوت. فبعد الجبر والمقابلة يكون أموالاً بعدّة ضعف د ب وزيادةِ جـ د يعدل عدد التفاوت وكعباً. فقد تأدّى إلى مسألة: كعب وعدد يعدل أموالاً. فيستخرج المطلوب بتلك المسألة، فيخرج د هـ الشيء، فننقصه من المطلوب الأول؛ فما بقي فهو الضلع المطلوب.

ل – ١٧٨ – و

ل – ١٧٨ – ظ

8 جـ هـ: جـ د [ب، ل] – 11 شيئا: شيء [ب، ل] / يكون: فيكون [ب، ل]

ا د ج ه ب

فحاصل الكلام في هذا القسم: أن نجعل ثلث عدد الجذور عدداً، وثلثي عدد الأموال عدد جذور، فنستخرج المطلوب على مسألة: جذور وعدد يعدل مالاً، فما خرج فهو المطلوب الأول؛ فنزيد عليه جذر عدد الجذور، ونضرب المبلغ في فضل جذرِ عدد الجذور على المطلوب الأول، ونضرب المبلغ في المطلوب، فما حصل فهو المجسّم، ونضرب مربع المطلوب الأوّل في عدد الأموال، ونزيد المبلغ على المجسّم، فما حصل فهو العدد الأعظم. فإن كان العددُ المسؤول أكثرَ من العدد الأعظم فالمسألة مستحيلة؛ وإن كان / مساوياً له فهي ممكنة، ولها جواب واحد وهو المطلوب الأول؛ وإن كان أقلّ فهي ممكنة، ولها جوابان: أحدهما أعظم من المطلوب الأول، والآخر أصغر منه. فننقص العدد المسؤول من العدد الأعظم، ونجعل الباقي عدداً، ونأخذ ضعف المطلوب الأول، ونزيد عليه فضْل المطلوبِ الأول على عدد الأموال، ونجعل المبلغ عددَ أموالٍ. فإن استخرجنا المطلوب بمسألة: مكعب وأموال يعدل عدداً، فنزيد المطلوب الذي يخرج على المطلوب الأول، فما حصل فهو الجواب الأعظم. وإن استخرجنا المطلوب بمسألة: مكعب وعدد يعدل أموالاً، فينقص المطلوب الذي يخرج من المطلوب الأول، فما بقي فهو الجواب الأصغر. وذلك ما أردنا بيانه.

ل – ١٧٩ – و

2 عدد جذور: أموالاً [ب، ل]

تمّ الكتاب الموسوم
بالمعادلات
بحمد الله وحسن توفيقه
في السابع من شهر
الله المعظم رمضان
سنة ست وتسعين وستمائة

قوبل وصحح بقدر الوسع

1-7 ناقصة [ل]

في الخطين اللذين يقربان ولا يلتقيان

٧١ - و

بسم الله الرحمن الرحيم

ومنه العون

رسالة لشرف الدين الطوسي في الخطين اللذين يقربان ولايلتقيان

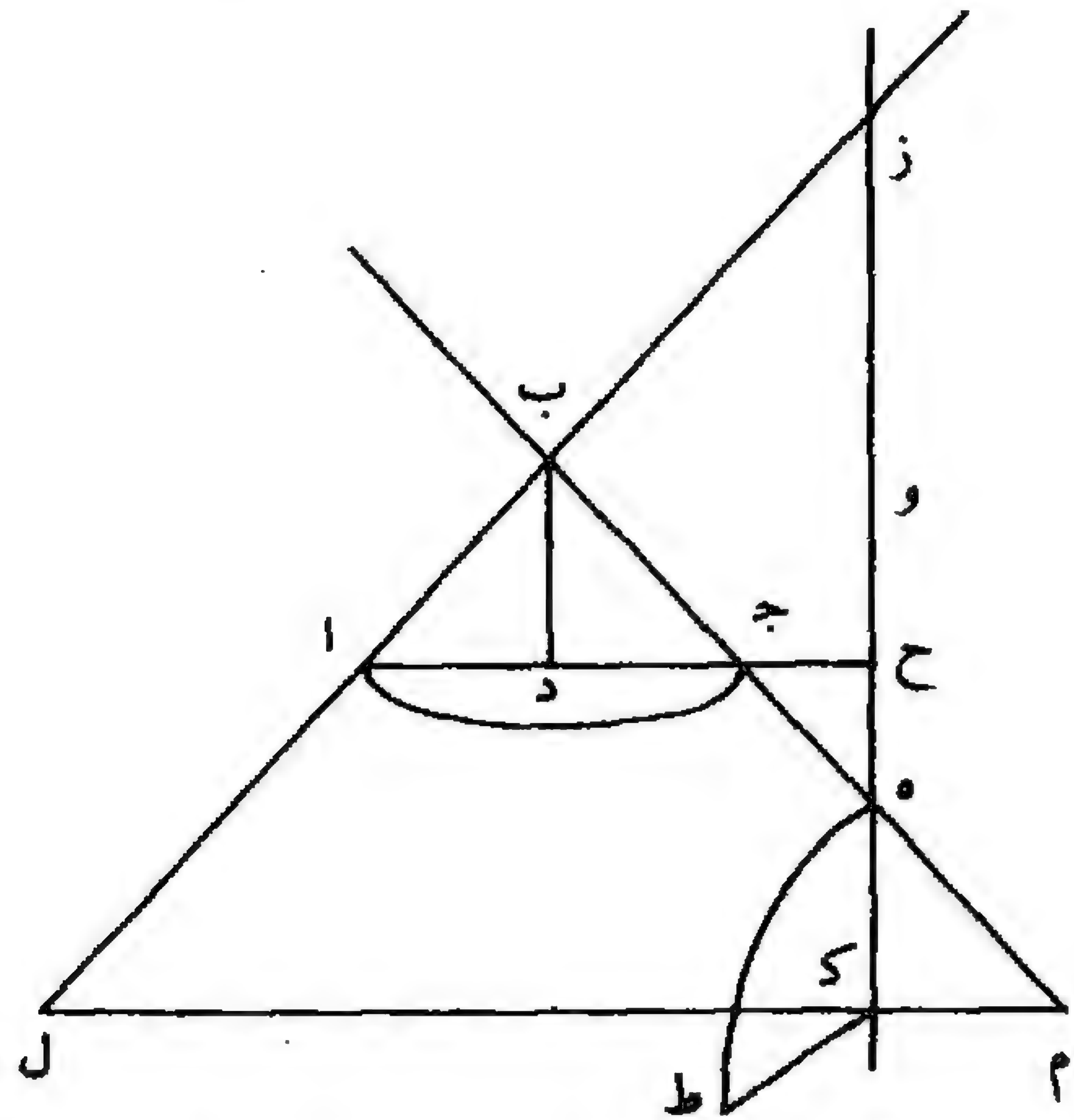
مقدمة:

إذا كان مثلث قائم الزاوية متساوي الساقين كمثلث ا ب ج زاويته القائمة ب وأخرج من نقطة ب عمود إلى ا ج وليكن ب د، وبيّن أنه يقسم ا ج بنصفين، وتوهمنا حركة مثلث ب د ج مع ثبوت ب د حتى يطابق مثلث ا د ب، فإنه يرسم بحركته نصف مخروط، وخط د ج يرسم بحركته نصف دائرة، وكذلك كلُّ خطٍ موازٍ له يرسم نصف دائرة. لأن ب د عمود على د ج، فـ د ج عمود عليه ويَرسم بحركته خطوطاً هي أعمدة على ‹ب د في› ذلك السطح، أبعادها عن نقطة د متساوية؛ فهي دائرة سطحها قائم على سطح المثلث على زوايا قائمة لأن د ج – الذي رسمها – عمود على ‹ب د الذي في› ذلك السطح؛ وهي قاعدة المخروط ومركزها د.

ثم إذا أخرج ب ج على استقامته إلى ه وأُخرج من ه خط مواز لـ ب د، يلقى ا ب ‹على استقامته› لأن ا ب قطع أحد المتوازيين، فهو يقطع الآخر؛ وليقطعه على ز، وليقطع ا ج ‹ه ز› على ح. وتوهمنا سطحاً يمرّ بخط ه ز ح ويقوم على سطح المثلث ‹على› زوايا قائمة، فهو

3 اللذين: الذين – 5 ا ب ج: كتب الناسخ الباء فاء والجيم حاء، ولقد أعدناها هنا وفيا يلي من النص للالتزام بالأبجدية، ولم نثبتها – 10 خطوطا: خطوط – 13 عمود: عمودا – 15 خط مواز: خطا موازيا – 17 ا ج: ب ج

لامحالة يقطع بسيط المخروط على خط منحنٍ هو الفصل المشترك بينهما، فيسمى هذا القِطع الحادث في السطح القائم في بسيط المخروط قِطعاً زائداً، وتسمى نقطة ه رأسَ القِطع، وخطُّ ه ز مُجانِبَه، ومنتصفُ المجانبِ ‹ على نقطة و › مركزَ القِطع، وز ح قُطر القِطع، وأيّ خط يخرج من محيط القِطع إلى قطره على زوايا قائمة، فيسمى خطّ الترتيب. وما يفصله خط الترتيب من قطرٍ ما يلي رأس القِطع يُسمّى سهم القِطع.



فنقول: إن ضرب المُجانب والسهم، جميعاً، في السهم أبداً، مثلُ مربع خط الترتيب.

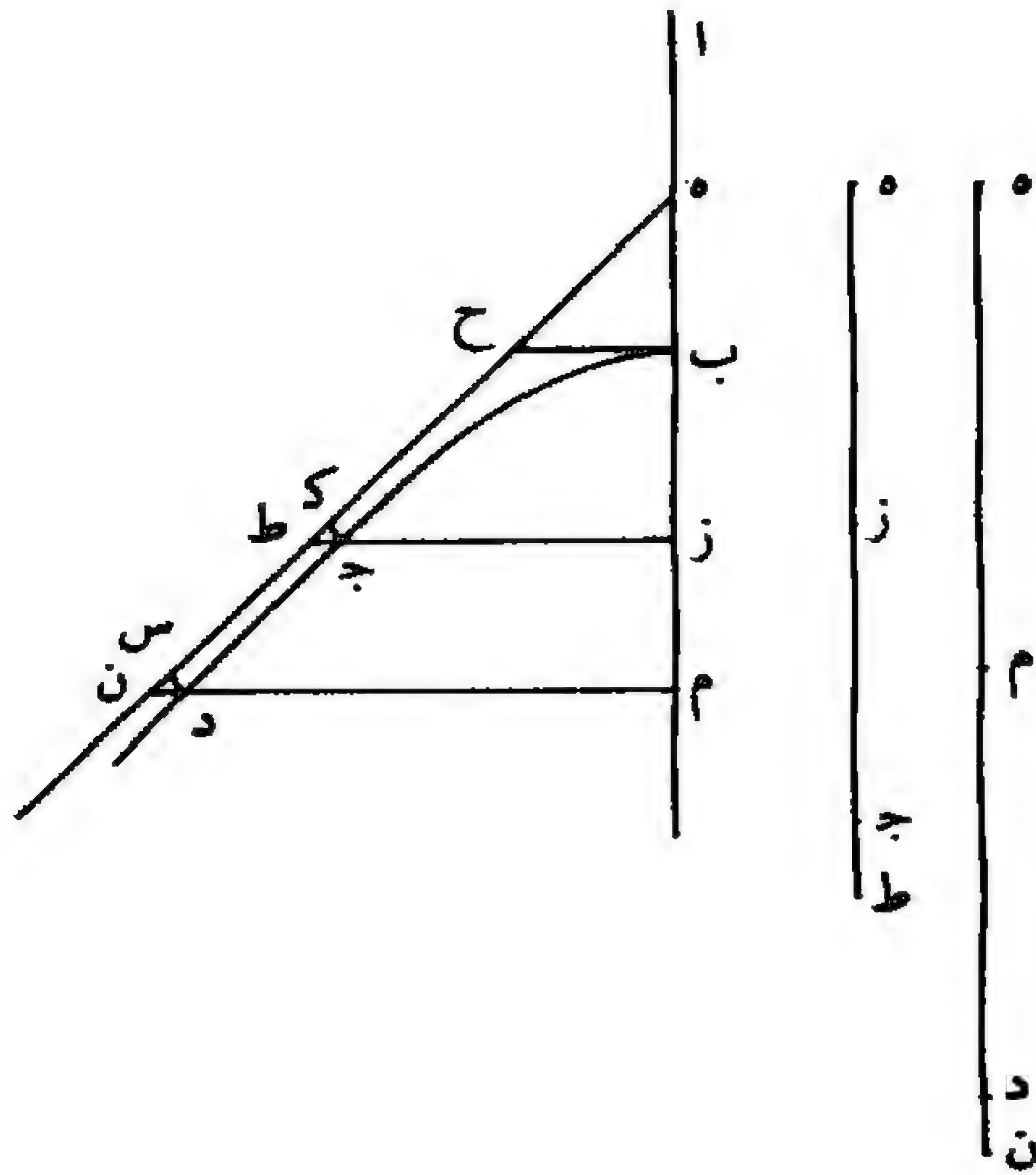
برهانه: أنا نخرج من محيط القطع من نقطة ط خطَّ ترتيبٍ إلى قطر القِطع، وليكن خط ط ك، ونُخرج من موقعه ‹ من نقطة ك › خطاً موازياً لخط ا ج وهو ل ن م، ونتوهم سطحاً يمر بخط ل ن م، ويقوم على سطح المثلث على زوايا قائمة. فهذا السطحُ يُحدث في بسيط المخروط دائرةً، وذلك أن خط ن م عمود على ب د، وقد بيّنا أن د ج يرسم بحركته نصف دائرة، وكلّ خط موازٍ له يرسم نصف دائرة. ولأن زاوية

3 ه: ز – 11 ا ج: ا ح / ويقوم: وويقوم – 13 دائرة: دايراة / د ج: د ح

ز ك م قائمة وزاوية ك م ه نصف قائمة، تبقى زاوية ك ه م نصف قائمة، فخط ه ك مثل خط ك م. وزاوية ز ك ل قائمة، ولأن زاوية ز ك ل قائمة وزاوية ك ل ز نصف قائمة، تبقى زاوية ل ز ك نصف قائمة، فخط ز ك مثل خط ك ل. ولأن ضرب م ك ‹في ك ل› مثل مربع ك ط لكونه عموداً في نصف دائرة، وك م مثل ك ه، ول ك مثل ز ك، فضرب ه ك في ك ز مثل مربع ك ط، وهو المراد.

مقدمة أخرى:

إذا توهمنا القطع مسطوحاً على سطح مستوٍ، وليكن قطع ب ج د، والمجانب ا ب، ومركز القِطع – وهو منتصف المجانب – ه، وأُخرج من ب، وهي رأس القطع، عمود على ا ب، وفصلنا ضلعاً مثل ب ه وليكن ب ح، ووصلنا ه ح، وأخرجناه على استقامته إلى غير نهاية، وأخرجنا محيط القطع إلى غير نهاية.



3 ك ل ز: ل ك ز – 8 مسطوحا: سطوحا / مستو: مستوي / ب ج د: ب ح د – 10 عمود: عمودا / وفصلنا ضلعا: وضلعاه

أقول: إن هذا الخط المستقيم يقرب أبداً من محيط القِطع ولايلقاه.

برهانه: أنا نتعلم على محيط القِطع نقطة جـ، ونُخرج منها خطًّ ترتيبٍ وليكن جـ ز، ونخرجه على استقامته حتى يلقى الخط المستقيم على ط، ونخرج من نقطة جـ عموداً على الخط المستقيم وهو جـ ك، وهذا يسمى بُعد النقطة، ويسمى ما بين العمود ومركز القِطع من الخط المستقيم ضلعَ النقطة، ونخرج من نقطة ب أيضاً عموداً على الخط المستقيم وهو ب ل. فلأن زاوية ز ه ل نصف قائمة، وزاوية ه ز ط قائمة، تبقى زاوية ز ط ه نصف قائمة، فخطا ز ط ز ه متساويان. فخط ه ز ط إذا قُدّر مستقيماً فقد قُسم بقسمين متساويين على نقطة ز، وبقسمين مختلفين على جـ، فسطح ه ز ط في جـ ط مع مربع جـ ز مثل مربع ز ط. لكن ا ب قد قُسم بنصفين على ه، وزيد فيه خطّ ب ز، فسطح ا ز ‹في› ب ز مع مربع ب ه مثل مربع ه ز. وقد كان ه ز جـ في جـ ط مع مربع ز جـ مثل مربع ه ز، فسطح ا ز في ب ز مع مربع ه ب مثل سطح ه ز جـ في جـ ط مع مربع ز جـ. لكن سطح ا ز في ب ز مثلُ مربع ز جـ كما قد تبيّن، يبقى مربع ه ب مثل سطح ه ز جـ في جـ ط. فنسبة ه ز جـ إلى ه ب كنسبة ه ب إلى جـ ط /، وه ز جـ أعظم من ه ب، فيكون ٧١ – ظ ه ب أعظم من جـ ط. ولأن زاوية ه نصف قائمة، وزاوية ه ل ب قائمة، تبقى ‹زاوية› ه ب ل نصف قائمة. فخطّا ه ل ب ل متساويان، فمربع ه ب مساوٍ لضعف مربع ب ل. ولأن زاوية ط نصف قائمة وزاوية جـ ك ط قائمة، تبقى زاوية ط جـ ك نصف قائمة، فخطّا جـ ك ط ك متساويان؛ فمربع جـ ط مساوٍ لضعف مربع ك جـ؛ فضعف مربع ب ل

2 جـ: ح. من هنا وبعد ذلك تُكتب الجيم حاءً – 3 ونخرجه: كتبها «ونخرج» ثم صححها عليها – 10 ه ز ط: ه ز ح – 11 ا ز ‹في› ب ز: ا ر ح بر – 16 جـ ط: ه ط – 21 فضعف... أعظم من: كرر الناسخ العبارة هكذا «ضعف مربع ب ل أعظم من»

أعظم من ضعف مربع جـ ك؛ فنصفه، وهو مربع ب ل، أعظم من نصف ذلك وهو مربع جـ ك، فخط ب ل أعظم من خط جـ ك.

وكذلك لو تعلمنا على محيط القِطع نقطة د، وأخرجنا منها خط ترتيب كخط د م، وأخرجناه على استقامته حتى لقي الخط المستقيم على ن، وأخرجنا من د عموداً على الخط المستقيم كعمود د س، فلأن زاوية ه نصف قائمة وزاوية م قائمة، تبقى زاوية ن نصف قائمة، فخطا م ه م ن متساويان. ولأن خط ه م ن إذا قُدّر مستقيماً فقد قُسم بقسمين متساويين على م وقسمين مختلفين على د، فسطح ه م د في د ن مع مربع م د مساوٍ لمربع م ن، أعني مربع ه م. وخط ا ب قد قُسم بنصفين على نقطة ه، وزيد فيه خط ب م، فسطح ا م في م ب مع مربع ه ب مثل مربع ه م. وقد كان سطح ه م ن مع مربع م د مثل مربع ه ب، فسطح ا م في م ب مع مربع ه ب مثل سطح ه م د في د ن مع مربع م د. لكن سطح ا م في م ب مثل مربع م د، يبقى مربع ه ب مثل سطح ه م د في د ن. وقد كان مربع ه ب مثل سطح ه ز جـ في جـ ط، فسطح ه ز جـ في جـ ط مثل سطح ه م د في د ن فهذه السطوح جميعها متساوية، ويسمى كل سطح منها سطحَ النقطة. ونسبة ه م د إلى ه ز جـ كنسبة جـ ط إلى د ن، وه م د أعظم من ه ز جـ، فخط جـ ط أعظم من د ن، ومربع جـ ط كما بيناه مساوٍ لضعف مربع جـ ك، ومربع د ن مساوٍ لضعف مربع د س، فنصفه وهو مربع جـ ك أعظم من نصفه وهو مربع د س، فخط جـ ك أعظم من خط د س، فقد بان أن الخطين يتقاربان أبداً.

1 جـ ك: د ك / ب ل: د ب – 3 وكذلك: ولذلك – 10 فسطح ا م في م ب: مكررة – 14 فسطح: سطح.

فأقول: إنهما لايلتقيان.

برهانه: أنهما إنْ التقيا، فلْيلتقِيا على نقطة ص، ونخرج منها خطّ ترتيبٍ كخط ص ع. فلأن ص ع مساوٍ لخط ع ه - لكن سطح ع ا في ع ب مثل مربع ص ع، أعني مربع ع ه، لكن مربع ع ه مساوٍ لسطح ا ع في ع ب مع مربع ه ب - فسطح ا ع في ع ب مع مربع ه ب مثل سطح ا ع في ع ب، هذا خلف.

وأقول أيضاً: إن السطوح الكائنة من أبعاد النقط وأضلاعها متساوية.

برهانه: أن مربع ه م ن - إذا قُدّر خطاً مستقيماً - مساوٍ لضعف مربع ه ن، ومربع د ن ضعف مربع س ن، فنسبة مربع ه م ن إلى مربع ن ه كنسبة مربع د ن إلى مربع س ن، فنسبة خط ‹ه م ن إلى خط› ه ن كنسبة خط د ن إلى خط س ن. فنسبة الباقي وهو ه م د إلى الباقي وهو ه س كنسبة الكل إلى الكل، أعني كنسبة د س ن إلى د ن؛ فسطح ه م د في د ن مثل سطح س ه في د س ن. لكن سطح ه م د في د ن مثل مربع ه ب؛ فسطح س ه في د س ن مثل مربع ه ب؛ فسطح ه س في نصف ذلك، وهو د س، مثلُ نصف مربع ه ب، أعني نصف ذلك السطح. لكن مربع ه ب مساوٍ لتلك السطوح، وهي سطوح النقط. فالسطوح الحادثة من أبعاد النقط وأضلاعِها متساويةٌ لأن أضعافها متساوية، وهو المراد.

والله أعلم بالصواب، وإليه المرجع والمآب.

تمت الرسالة بعون الله العزيز الوهاب.

3 ع ا: ع ه - 6 هذا خلف: كتبها بالاختصار المعروف - 12 ه س: ه س ن - 17 وهي: وهو

⟨رسالة في عمل مسألة هندسية⟩

٢٩

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلوة والسلام على رسوله محمد وآله أجمعين. مسألة سألها شمس الدين أمير الأمراء النظامية عن الإمام الأجل الأوحد العالم شرف الدين بهاء الإسلام حجة الزمان مظفر بن محمد المظفر الطوسي أدام الله توفيقه ببلد همذان سنة ‹ ... › وخمسمائة هجرية.

عن مربع متساوي الأضلاع، كلّ ضلع منه معلوم، وأردنا أن نقسمه إلى أربعة سطوح أحدها سطح متوازي الأضلاع مستطيل، في الوسط، وثلاثة منحرفات تحيط به من ثلاثة جوانب على هذا المثال ‹ فيه › على وجه تكون السطوح الأربعة بعضها إلى بعض ‹ على › نسبة مفروضة معلومة، وقد عُيِّن ضلع المربع ونسبة السطوح: يقال كل ضلع من أضلاع المربع عشرة، والمطلوب أن يكون السطح المتوازي الأضلاع الذي في الوسط نصف المنحرف الذي على أحد جانبيه، والمنحرف الذي فوقه ثلاثة أمثاله، والمنحرف الذي على الجانب الآخر منه خمسة أمثاله.

مثال ذلك: مربع ا ب ج د متساوي الأضلاع، وضلع ا ب عشرة، وأردنا العمل المذكور، فنخرج ضلع ‹ ا ب › على استقامته، ويتعلم عليه نقطة ه كيفما اتفقت، ونزيد على خط ب ه تسعة أمثاله، فيكون خط ب ط عشرة أمثال خط ب ه، ونصل ط د، ونخرج من نقطة ه خط ه و يوازي ط د، ثم يتعلم نقطة ظ على خط ب ه، نقطة ظ كيفما وقعت. ونجعل ظ ز ٤ ٥ مثل ب ظ وخط ز ح ٥ ٤ مثل ب ظ،

3 شمس الدين: من الواضح أن هذا لقب، ولم نهتد إلى معرفة صاحبه من المصادر والدراسات التي رجعنا إليها – 4 حجة: حجب – 5 ‹...›: نسي الناسخ كتابة الآحاد والعقود ولم يثبت إلا القرن؛ ولقد أخطأ ناسخ مخطوطة ليدن عند نقله للمخطوطة كما بينا في المقدمة – 7 أربعة: اربع – 8 به: بها – 19 ب ظ: ب ط / ز ح: ز خ

ونصل ز و / ونخرج من نقطة ح خطاً يوازي خط ز و، وهو خط ٣٠ ح ي، ثم نخرج من نقطة ي خط ي س يوازي ا ب، ونخرج خط س ي على استقامته إلى نقطة ل حتى يكون خط ي ل مثل ب و وثلاثة أرباعه، ونجعل ي م مثلي ب و، ثم يتعلم نقطة جب، ونجعل خط جب بج ٣٠٢٤ مثل خط ي جب، ثم نجعل خط بج يد ٧٢٥ أمثالاً لخط ي جب، ونصل خط بج م، ونخرج خط يد ن موازياً له، وندير على قطر ن ل نصف دائرة، ثم نجعل خط س ع خمسة أمثال وخمسة أجزاء من أحد عشر جزءاً من خط ب و. ولأن قطر س ع أعظم من قطر ن ل، فلنا أن نخرج من نقطة س في دائرة س ع وتراً مساوياً لضعف ك ي وهو س ف. ونقسم قوس س ف بنصفين على ص، ونخرج من نقطة ص عمود ص ق، ثم نعلّم نقطة ش على ص ق كيف ‹ما› وقعت، ونجعل ش ت مثل وثلث ق ش، ونصل خط ت س، ونخرج من ش خط ش ر موازياً له، ونجعل س خ مثل س ر، ونخرج خ كب يوازي ا ب، ثم نجعل د لب مثلي ونصف ب كب، ونخرج لب لج يوازي ا ب، ونجعل ا ض مثل ونصف ب ي مزيداً عليه ثلاثة أمثال ونصف ي كب، ونخرج ض لا، ثم نخرج ا ذ جـ غ.

فأقول: إن المربع قد انقسم على الجهة المطلوبة، وهي أن منحرف ا ب ذ كب ضعف سطح ذ غ لب كب، ومنحرف ا ذ غ جـ خمسة أمثاله، ومنحرف جـ د لب غ ثلاثة أمثاله.

1 ح: خ – 2 ح ي: خ ي – 7 أمثال: أمثاله – 11 ونجعل: ونزيد عليه – 12 ت س: ث س – 13 س خ: س ح – 16 ا ذ: ا ظ – 18 ا ب ذ كب: ا ب ظ كب / ذ غ لب كب: ظ ن غ لب كب / ا ذ غ جـ: ا ظ ع جـ / خمسة: ثلثة – 19 جـ د لب غ: جـ د لب ع / ثلاثة: خمسة / أمثاله: أي أمثال المستطيل

برهان ذلك: لأن ب ط عشرة أمثال ب ه، ونسبة د ب إلى ب و كنسبة ط ب إلى ب ه، فيكون د ب عشرة أمثال ب و، ونسميه الواحد. ولأن ز ب ه ه أمثال ب ظ / وز ح ه ٤ مثلاً له، يكون ٣١ نسبة ز ب إلى ز ح كنسبة ه ه إلى ه ٤، ونسبة ب و إلى و ي كنسبة ه ه إلى ه ٤، فيكون و ي تسعة أجزاء على أن و ب الواحد أحد عشر جزءاً.

ولأن م ي ضعف و ب وبجـ ي ه ٢ ٠ ٣ أمثال ي جب ويد بجـ ه ٢ ٧ أمثاله، ونسبة ن م إلى م ي كنسبة يد بجـ إلى بجـ ي، فيكون ن م ه ٢ ٧ جزءاً بالمقدار الذي ‹به› يكون م ي ه ٢ ٠ ٣، وهو ضعف و ب، وبالمقدار الذي ‹به› يكون و ب ه ٢ ٠ ٣ فيكون ن م ٠ ه ٤ ١.

وقد ذكرنا أن ي ل مثل وثلاثة أرباع ب و الواحد، فسطح ي ن ‹في ي ل هو سطح م ي› – الذي هو اثنان – وم ن – وهو ٠ ه ٤ ١ من ه ٢ ٠ ٣ من الواحد – في ي ل الذي هو واحد وثلاثة أرباع، فيكون تكسيره أربعة ‹و› ه ٢ ٠ ١ من ه ٢ ٠ ٣ من واحد، وهو تكسير مربع ك ي، لأن ضرب ن ي في ي ل يساوي مربع ك ي. ولأن س ف ضعف ك ي وص ق نصف س ف، يكون ص ق يساوي ك ي، ومربعه مربعه، ومربع ص ق يساوي س ق في ق ع، فيكون تكسير سطح س ق في ق ع أربعة وه ٢ ٠ ١ من ه ٢ ٠ ٣ من واحد. ولأن ق ش ثلاثة بالمقدار الذي به يكون ش ت أربعة، ونسبة س ر إلى ر ق كذلك، فيكون ر ق ثلاثة أسباع ق س ور س أربعة

13 وم ن: وه / وهو: هو – 14 ١٤٥٠: ١٤٥ – 15 فيكون: يكون – 20 بالمقدار: المقدار / ش ت: ش ث

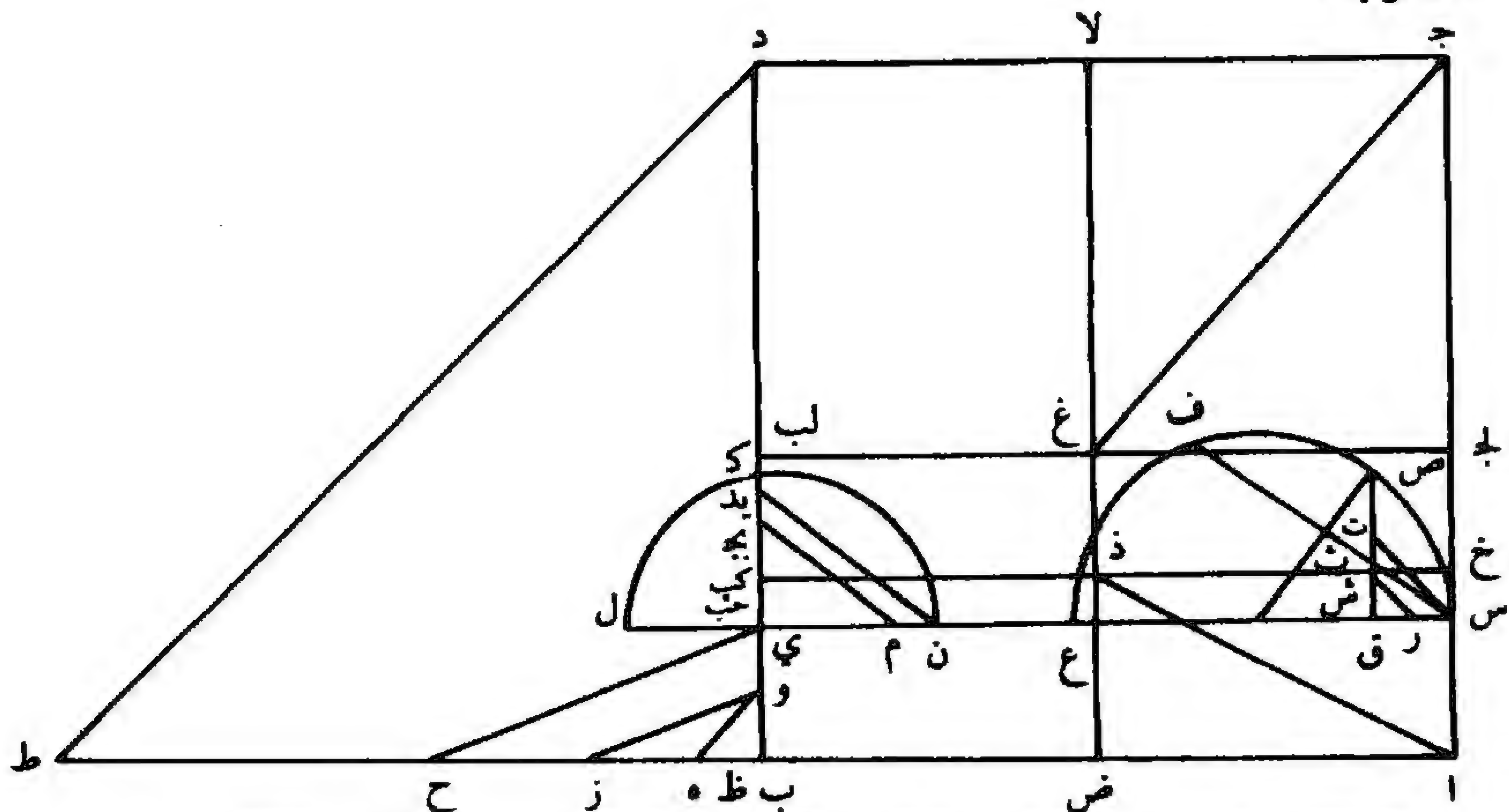
أسباعه، فيكون سطح ع ق في ر س أربعة أسباع ع ق في ق س المذكور تكسيره، وسطح ع ق في ر س هو سطح ع ث، لأن ق ث يساوي س خ وس خ مثل س ر، فسطح ع ث اثنان و ١٤٥٠ من ٥ ٢ ٠ ٣، وسطح ر خ مربع ر س، وسطح ر ث ثلاثة أرباع مربعه. ولأنا فصلنا س ع خمسة و٢٥ من ٥ ٥ / ‹من› واحد، يبقى ع ي ٣٢ ‹من› تمام العشرة أربعة و٣٠ من ٥ ٥ من واحد. فجميع سطح خ ي المستطيل يساوي مربع ر س – وهو سطح ر خ – وثلاثة أرباع مربعه – وهو سطح ر ث – وسطحاً تكسيره اثنان و١٤٥٠ من ٥ ٢ ٠ ٣ من واحد – وهو سطح ث ع – وسطحاً أحد ضلعيه ر س وضلعه الآخر أربعة و٣٠ من ٥ ٥ من الواحد، وهو سطح ع كب الباقي. ولأن سطح خ ض هو ضرب ا خ في ا ض، وا خ يساوي ب كب – وهو واحد وتسعة أجزاء من أحد عشر جزءاً من واحد مع زيادة خ س أي ر س – وضلع ا ض هو مثل ونصف ب ي مع ثلاثة أمثال ونصف ر س، فببرهان أشكال المقالة الثانية من أقليدس يكون ضرب ا خ في ا ض يساوي سطح ا ض في ا س وسطح ا ض في خ س. ولأن أحد قسمي ا ض مثل ونصف ا س، وقسمه الآخر ثلاثة أمثال ونصف س خ، فسطح ا ض في ا س يساوي مجموع سطحين، أحدهما ‹ثلاثة أنصاف مربع› ا س – وهو واحد وتسعة أجزاء من أحد عشر، فيكون تكسيره أربعة و٢٩٠ من ٥ ٢ ٠ ٣، والسطح الآخر هو ثلاثة أمثال ونصف ر س في ا س، وهو سطح يكون أحد ضلعيه ر س والآخر ستة و٥ ٢

2 هو: وهو – 3 س خ: س ح / وس خ: وس ح – 4 ر خ: ر ح – 6 خ ي: ح ي – 7 ر خ: ر ح – 11 خ ض: ح ص / هو: وهو / ا خ: ا ح / وا خ: وا ح – 12 خ س: ح س – 13 ا ض: ا ص / هو: وهو – 14 فببرهان: فبرهان / ا خ: ا ح – 15 سطح ا ض: سطح ا ص / خ س: ح س – 16 ا ض: ا ص / س خ: س ح – 17 ا ض: ا ص – 18 تكسيره: تكسير – 19 هو: وهو

من ٥ ٥. أما سطح ا ض في ر س فينحلّ أيضاً إلى ضرب جزأيْ ا ض في ر س، أي إلى ضرب اثنين وثمانية أجزاء من أحد عشر جزءاً من واحد في ر س – فيحصل سطحٌ أحد ضلعيه ر س والآخر اثنان وثمانية أجزاء من أحد عشر من واحد – وإلى سطح ر س في ثلاثة أمثاله ونصف، فيحصل ثلاثة مربعات / ر س ونصف مربعه. فحصل لنا ‹ من › جميع ٣٣
أجزاء خ ض سطح تكسيره أربعة و ٠ ٠ ٩ ٢ من ٥ ٢ ٠ ٣ من واحد، وسطحان آخران مجموعهما سطحٌ أحد ضلعيه ر س وضلعه الآخر ‹ ضعف › أربعة و ٠ ٣ من ٥ ٥ من واحد، وثلاثة مربعات ونصف مربع ر س. فإذا نصفنا الجميع يكون نصفها مساوياً لأجزاء سطح خ ي المستطيل. ولأن سطح خ ب إذا فصل منه مستطيل خ ي، يبقى مستطيل س ب، وإذا فصل منه مثلث ا خ ذ، يبقى منحرف اذكب ب، فيكون مستطيل س ب مساوياً لمنحرف ا ذ كب ب. ولأن ب ي واحد وتسعة أجزاء من أحد عشر جزءاً، ونصفه عشرة أجزاء من أحد عشر جزءاً من الواحد، وإذا قسمنا العشرة بأحد عشر قسماً، يكون كل قسم عشرة أجزاء من أحد عشر من الواحد، فخط ب ي جزآن من أحد عشر جزءاً من ب د العشرة، وسطح ب س من سطح ب ج يكون على هذه النسبة، فمنحرف اذكب ب جزآن من أحد عشر جزءاً من مربع ا ب ج د. ولأن نسبة منحرف اذكب ب إلى منحرف ج د لب غ كنسبة قاعدة ب كب إلى قاعدة لب د – وبالمقدار الذي به ب كب اثنان فـ لب د خمسة لأنه مثلاه ومثل نصفه – فيكون منحرف ج د لب غ

1 فينحل: ينحل – 2 أي إلى: أما – 3 فيحصل: يحصل – 6 خ ض: ح ض – 9 خ ي: ح ي – 10 خ ب: ح ب / خ ي: ح ي – 11 ا خ ذ: ا ح ظ – 12 ا ذ كب ب (الأولى والثانية): ا ظ كب ب – 17 ا ذ كب ب: ا ظ كب ب – 18 ا ذ كب ب: ا ظ كب ب – 20 لأنه مثلاه: لأن مثليه

خمسة أجزاء من أحد عشر جزءاً من المربع الكبير. ولأن نسبة مثلث
ا ض ذ المساوي لمستطيل خ ي إلى مثلث جـ غ لا كنسبة قاعدة ض ذ
إلى قاعدة غ لا، وهو مثلان ونصف، فيكون مثلث جـ غ لا / مثلي ٣٤
ونصف ا ض ذ، ومجموعهما ثلاثة أمثال ونصف مستطيل خ ي. ولأن
مستطيل ا لا مركب من ضرب ضلع المربع الكبير في جزأي ا ض –
وأحدهما مثل ونصف ب ي، والآخر ثلاثة أمثال ونصف خ س، وذلك
يساوي مجموع المثلثين ‹ ومنحرف جـ غ ذ ا › – فإذا فصلنا المثلثين من
سطح الا، فكأنا قد فصلنا منه سطح ضلع المربع الكبير في ثلاثة أمثال
ونصف خ س، فيكون منحرف جـ غ ذ ا مساوياً لضرب ضلع المربع
الكبير في مثل ونصف ب ي. فمنحرف جـ غ ذ ا مثل ونصف سطح
ب س أي منحرف ا ذ كب ب، فبالمقدار الذي به يكون منحرف
/ جـ د لب غ خمسة، يبقى سطح غ لب كب ذ واحداً، وهو واحد، وهو ٣٥
المطلوب.



2 ا ض ذ: ا ض ظ / خ ي: ح ي / جغ لا: وغ لا – 2 ض ذ: ض ط – 4 ونصف: أضافها الناسخ في الهامش مع بيان موضعها. / ا ض ذ: ا ض ظ / خ ي: ح ي – 6 وأحدهما: أحدهما / خ س: ح س – 9 خ س: ح س / جغ ذ ا: جغ ظ ا – 10 جغ ذ ا: جغ ظ ا – 11 ا ذ كب ب: اظ كب ب / يكون منحرف: يكون ومنحرف – 12 يبقى: ويبقى / غ لب كب ذ: غ لب كب ظ / واحداً: واحد

والمأمول من كرم المخدوم والمنعم، أدام الله علوّه، أن ينعم بالنظر والتأمل
في هذا الشكل، ويصفح عن السهو القليل إن وقع في بعض حسباناته
الجزئية فقط؛ وإن عثر على خطأ في بعض براهينه، فينبهنا عليه مفيداً
ادّعاءه؛ فقد عُمي علينا لكثرة المقدمات واختلاط الهندسية فيها بالحساب،
ولا ينكر كثرة التطويل في مقدماتها، فإن الوصول / إلى المطلوب البرهاني ٣٦
بكثرة المقدمات ‹و› بالمتوسطة مع العصمة من الغلط إن كانت، يكون
[إليه] بالدربة والارتياض، وأدل على ‹أن› الإصابة في المعقولات يكثر
بالضرورة مقدماتُ براهينها ومتوسطاتها، وأعظم فوائد العلوم الرياضية إنما
هو ذلك. ولقد تَحيّزت عن التطويل في مقدمات براهين هذا الشكل مع
كونها حقاً ضرورية في إفادة النتيجة المطلوبة، ثم إن أشار المخدوم المنعم،
فسأعرض سائر الطرق، على رأيه الناقد العالي إن شاء اللّه تعالى. والسلام.

1 بالنظر: كذا، والمعروف أن فعل «أنعم» يتعدى بنفسه، فيقال «أنعم النظر في كذا» – 2 وقع: وقعت / حسباناته: حسباناتها – 4 ادعاءه: لدعاه، والمقصود ما ذهب إليه. / فقد: وقد / الهندسية فيها: إما أنّ المقصود هو «البراهين الهندسية فيها»، وإما أنّ «فيها» تحريف «منها» – 9 ولقد: ولهذا – 10 ضرورية: ضروريا – 11 الطرق: الطرف

قائمة التعابير والمصطلحات التي استعملها الطوسي

لقد عمدنا، في مرحلة أولى، إلى القيام بجردة كاملة للتعابير التي استعملها الطوسي. لكن هذا العمل الذي يهم اللغوي، قد لا يهم المؤرّخ للرياضيات. لذلك اخترنا أن نترك جانباً التعابير الغريبة عن لغة الرياضيات بالذات.

ولم يكن ما يدعو للقيام بلائحة للأسماء الواردة في عمل الطوسي لأن الأسماء الوحيدة المذكورة هي أسماء شمس الدين (II - 137,3)، النظامية (II - 137,3)، همذان (II - 137,5) و«الكتاب الثاني» من **الأصول** لإقليدس (II - 140,4).

نشير إلى أنه عندما تتردد الكلمة غير مرة عبر النص، مع المحافظة على المعنى نفسه، فلن نذكر سوى موقع ورودها في المرة الأولى. كما نشير إلى أن الأرقام التي تقابل الكلمات تشير (من الشمال إلى اليمين) إلى رقم الصفحة ثم إلى رقم السطر في النص (العائد للطوسي)، ويشير الرقم الروماني II إلى القسم الثاني، وفي حالة عدم وجوده يكون المقصود هو القسم الأول. النقاط الثلاث المتتالية، «. . .» تشير إلى تردّد العبارة مرات عدّة في الصفحة بعد الموقع المذكور.

(**ملاحظة**: رأينا من الأفضل ذكر ما يقابل بعض التعابير باللغة الفرنسية، وذلك كما أوردها المؤلف الذي حقق النص ونقله إلى الفرنسية. (المترجم)).

أصل (أصل السؤال) 39,1.	**principe (de la question)**
ألف	
ـ مؤلّف من 25,8؛ 30,12.	**composé de**
بدل	
ـ بالتبديل 21,4.	**par permutation**
برهن	
ـ البرهان 2,8؛ II 131,9؛ 133,2؛ 135,8؛ 139,1؛ 140,14؛ 143,3,9.	**la démonstration**
ـ المطلوبُ البرهانيّ 146,5.	**objet d'une recherche démonstrative**
بسيط المخروط 2,13؛ 5,11؛ II 131,1.	**surface latérale du cône**

جمل

ـ الجملة 55,5. expression

somme II 88,8; 98,17; 99,4.

ـ جملة مال 72,20. le carré tout entier

ـ جملة الخطّ II 11,15. la ligne tout entière

ـ جملة الواجب II 16,15. tout ce qu'il fallait

جنب

ـ المجانب 3,8؛ 6,14؛ 7,1...؛ 11,8,19؛ 12,1؛ 13,4؛ 14,2,6؛ 47,8؛ 67,2؛ 87,7.... diamètre transverse

ـ الجانب 108,5,6. côté

membre 109,9...; 111,2; II 30,9,12; 31,18,20; 37,5...; 38,9; 43,7;... .

جهل

ـ مجهول 31,2,5؛ 85,4؛ II 16,9. inconnu

جواب 33,10؛ 34,1؛ 35,3؛ 38,15. solution

ـ الجواب الأعظم II 10,5؛ 48,10؛ 67,19؛ 70,11؛ 76,13؛ 104,13؛ 127,14. la plus grande solution

ـ الجواب الأصغر II 10,6؛ 46,14؛ 48,20؛ 70,13؛ 76,15؛ 104,15؛ 127,16. la plus petite solution

حدث

ـ حَدَث 2,12؛ 3,14؛ 5,9. se former

ـ أحدث 6,14؛ 7,6؛ 11,19؛ II 131,12. engendrer, former

ـ الحادث II 131,2؛ 135,17. produit (section, surface...)

حدد

ـ إلى حدّ II 34,16. à une limite

حذو

ـ بحذاء 26,15؛ 42,15؛ 50,14؛ 52,3؛ 58,17؛ 64,19؛ 78,18؛ 104,4؛ 112,12؛ 114,10؛ 115,16. parallèlement

ـ حاذى 34,6,9؛ 51,12؛ 52,8؛ 56,1...؛ 58,14؛ 59,6؛ 65,18؛ 70,2,19؛ 71,5. être parallèle

حرف

ـ المُنحرف II 137,8...؛ 138,17...؛ 141,11...؛ 142,9.... trapèze

حسب

ـ حسبانات II 143,2. calculs

ـ الحساب 2,6؛ II 143,4. calcul, arithmétique

فرد

- مفردة 16,15,16. — binômes
- مفرد 46,10,11. — tout seul

فرض

- فرضنا 8,4؛ 9,20؛ 40,6؛ 66,18؛ 94,19؛ 99,5؛ II 17,20؛ 23,11؛ 49,19؛ 50,3؛ ... — supposer
- مفروض 5,4,12؛ 11,8؛ 12,2؛ 14,4؛ 15,12؛ 22,4؛ 24,2؛ 57,15؛ 67,1؛ .... — donné

فصل

- فبالتفصيل 107,11. — par séparation

فضل

- الفضل 32,15؛ II 2,15؛ 5,14؛ 6,14؛ 8,11؛ 12,7؛ 16,8؛ 27,2؛ 29,6؛ 31,4؛ .... — l'excédent, la différence
- التفاضل II 53,11. — la différence

فوت

- التفاوت (عدد) II 8,11؛ 9,4؛ 12,5 ...؛ 15,2 ...؛ 18,11 ...؛ 29,2,8؛ 30,8؛ 31,1 ...؛ .... — le nombre de l'écart

قبل

- في (إلى) مقابلة 50,8؛ 51,15؛ 71,16؛ 101,20. — en face de
- المُقابِل 28,2؛ 29,12,16؛ 30,1؛ 35,8؛ 44,13؛ 51,10؛ 52,17؛ 53,6؛ 55,2؛ 56,1؛ .... — correspondant
- قابل أحدهما بالآخر II 9,8. — réduire l'un par l'autre

قدر

- القَدْر 28,12 ...؛ 42,12؛ 45,1,4؛ 59,18؛ 62,14,20؛ 78,7 ...؛ 80,3 ...؛ .... — la quantité, de combien
- بِقَدْر 19,3؛ 20,5 .... — de la grandeur de
- المقدار 83,11؛ II 36,10؛ 88,2؛ 97,4 ...؛ .... — grandeur
- بمقدار 36,3,7؛ 54,3؛ 69,9؛ 73,17؛ 74,6؛ II 34,7,8؛ 36,7 ...؛ 38,8؛ 44,15؛ .... — de la quantité de, égal

قرب

- قارب، تقارب 8,3؛ 10,3؛ 14,6؛ 15,8؛ 67,4,7؛ 86,11؛ 87,1؛ 97,9,16؛ 107,7؛ II 133,1؛ 134,21. — s'approcher (asymptote)
- أقْرَب إلى 14,5؛ 15,1؛ 67,1,4؛ 83,7؛ II 15,11,13. — plus proche de
- قريب من II 15,10. — voisin de (nombre)

قرن

- مقترنة 16,15؛ 24,13. — polynôme

المراجع

١ ـ العربية

كتب

ابن أبي أصيبعة، أبو العباس أحمد. **عيون الأنباء في طبقات الأطباء**. شرح وتحقيق نزار رضا. بيروت: دار مكتبة الحياة، ١٩٦٥.

ابن باجة، أبو بكر محمد بن يحيى. **رسائل فلسفية لأبي بكر بن باجة: نصوص فلسفية غير منشورة**. [تحقيق] جمال الدين العلوي. بيروت: دار الثقافة، ١٩٨٣.

ابن خلكان، شمس الدين أبو العباس أحمد. **وفيات الأعيان وأنباء أبناء الزمان**. حققه احسان عباس. بيروت: [د.ن]، ١٩٧٧. ٨ج.

ابن فارس، أبو الحسين أحمد بن زكريا. **معجم مقاييس اللغة**. بتحقيق وضبط عبد السلام محمد هارون. القاهرة: دار إحياء الكتب العربية، ١٣٦٦ ـ ١٣٧١هـ. ٦ج.

الإقليدسي، أبو الحسن أحمد بن إبراهيم. **الفصول في الحساب الهندي**. تحقيق أحمد سعيدان. [عمّان]: اللجنة الأردنية للتعريب والنشر والترجمة، ١٩٧٣. (تاريخ علم الحساب العربي؛ ج٢)

الخيّام، عمر. **رسائل الخيّام الجبرية**. حققها وترجمها وقدم لها رشدي راشد وأحمد جبّار. حلب: معهد التراث العلمي العربي، ١٩٨١. (مصادر ودراسات في تاريخ الرياضيات العربية؛ ٣)

راشد، رشدي. **تاريخ الرياضيات العربية: بين والجبر والحساب**. ترجمة حسين زين الدين. بيروت: مركز دراسات الوحدة العربية، ١٩٨٩. (سلسلة تاريخ العلوم عند العرب؛ ١)

السبكي، تاج الدين أبو النصر عبد الوهاب بن علي. **طبقات الشافعية الكبرى**. تحقيق محمود محمد الطناحي وعبد الفتاح محمد الحلو. القاهرة:[د.ن.، د.ت.].

السموأل بن يحيى بن عباس المغربي. **الباهر في الجبر**. تحقيق وتحليل صلاح أحمد ورشدي راشد. دمشق: جامعة دمشق، ١٩٧٢. (سلسلة الكتب العلمية؛ ١٠)

الصفدي، صلاح الدين خليل بن أيبك. **كتاب الوافي بالوفيات**. ڤيسبادن: فرانز شتاينر، ١٩٧٤. (النشرات الإسلامية؛ ج٦، ق١)

طاشكبري زاده، أبو الخير أحمد بن مصطفى. **مفتاح السعادة ومصباح السيادة في موضوعات العلوم**. تحقيق كامل بكري وعبد الوهاب أبو النور. القاهرة: [د.ن.]، ١٩٦٨.

القفطي، أبو الحسن علي بن يوسف. **تاريخ الحكماء، وهو مختصر الزوزني المسمى بالمنتخبات الملتقطات من كتاب اخبار العلماء بأخبار الحكماء**. تحقيق يوليوس ليبرت. ليبتزج: [ديتريخ]، ١٩٠٣.

الكاشي، غياث الدين جمشيد بن مسعود. **مفتاح الحساب**. تحقيق أحمد سعيد الدمرداش ومحمد حمدي الحفني الشيخ؛ مراجعة عبد الحميد لطفي. القاهرة: [د.ن.]، ١٩٦٧.

مخطوطات

ابن أسلم، أبو كامل شجاع (نسبت خطأ). **رسالة في الجبر والمقابلة**. مخطوطة آستان، قدس، مشهد، ٥٣٢٥.

ابن الهائم، أبو العباس شهاب الدين أحمد. **الممتع في شرح المقنع في علم الجبر والمقابلة**. استنبول: مخطوطة شهيد علي باشا، رقم ٢٠٧٦.

أبولونيوس. **المخروطات**. استنبول: مخطوطة آياصوفيا، ٢٧٦٢.

الأصفهاني، ميرزا علي محمد. **تكملة العيون**. مخطوطة جامعة طهران، رقم ٣٥٥٢.

إقليدس. **الأصول**.

ـــــ. ترجمة حنين بن اسحق. هانت ٤٣٥، مكتبة بودلين.

بطلميوس. **المجسطي**. ترجمة الحجاج. مخطوطة ليدن، شرقيات ٦٨٠.

ـــــ. ـــــ. ترجمة حنين بن اسحق؛ تنقيح ثابت بن قرّة. تونس: ٥٧١١٦.

الخلاطي. **نور الدلالة في علم الجبر والمقابلة**. مخطوطة دنشكاه، جامعة طهران، رقم ٤٤٠٩.

الرازي، فخر الدين. **مناظرات العالم الرازي**. حيدر آباد، أوك ١٣٦، سلارجانك.

السُلمي، أبو الحسن علي أبو المسلّم بن محمد بن الفتح. **المقدمة الكافية في حساب الجبر والمقابلة وما يُعرف قياسه من الأمثلة**. الفاتيكان: مخطوطة سباط، رقم ٥.

السموأل بن يحيى بن عباس المغربي. **القوامي في الحساب الهندي**. Mss. Medicea Laurenziana, Orient, 238.

الفارسي، كمال الدين أبو الحسن. **أساس القواعد في أصول الفوائد**. استنبول: مخطوطة شهيد علي باشا، ١٩٧٢.

الكاشي، يحيى بن أحمد. **إيضاح المقاصد في شرح أساس الفوائد**. استنبول، جار الله، ١٤٩٤.

ـــــ . **إيضاح المقاصد لفرائد الفوائد**. استنبول: مخطوطة جارالله، ١٤٨٤.

المارديني، شمس الدين. **نصاب الحَبر في حساب الجبر**. استنبول: مخطوطة فيض الله، ١٣٦٦.

اليزدي، محمد بن باقر. **عيون الحساب**. استنبول: مخطوطة هازيناسي، ١٩٩٣.

٢ ـ الأجنبية

Books

Archimède. *Commentaires d'Eutocius, fragments*. éd. Ch. Mugler. Paris: Les Belles lettres, 1972.

Becker, Oskar. *Das Mathematische Denken der Antike*. Gọttingen: Vandenhoeck V. Ruprecht, 1966. (Studienhefte zur Altertumswissenschaft; Heft 3)

Brockelmann, Carl. *Geschichte der Arabischen Literatur*. Leiden: E.J. Brill, 1937.

Clagett, Marshall (ed.). *Archimedes in the Middle Ages*. Madison, WI: University of Wisconsin Press, 1964 - 1980.

Diophante. *Les Arithmétiques*. Etabli et traduit par R. Rashed. Paris: Les Belles lettres, 1984.

Fermat, Pierre de. *Œuvres de Fermat*. Publiées par les soins de mm. Paul Tannery et Charles Henry, sous les auspices du ministère de l'instruction publique. Paris: Gauthier - Villars et fils, 1891 - 1896.

Folkerts and Lindgren. *Festschift für Helmuth Gericke*. Stuttgart: [n.pb.], 1985. (Reiche «Boethius»; Bd. 12)

Girard, A. *L'Arithmétique de Simon Stevin de Bruges*. Leiden: [s.n.], 1625.

Heath, Th. *Euclid's Elements*. Dover: [n. pb.], 1956.

——. *A History of Greek Mathematics*. Oxford: [n. pb.], 1921.

Itard, J. *Essais d'histoire des mathématiques*. Réunis et introduits par R. Rashed. Paris: Blanchard, 1984.

Montucla, Jean Etienne. *Histoire des mathématiques*. Nouyel tirage augmenté d'un avant-propos par Ch. Naux. Paris: A. Blanchard, 1960.

Rashed, Roshdi. Entre *arithmétique et algèbre, recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*. Paris: Les Belles lettres, 1984. (Collection sciences et philosophie arabes)

Schoy, Carl. *Die Gnomonik der Araber*. Berlin: W. de Gruyter, 1923. (Die Geschichte der Zeitmessung under der Uhren; Bd. 1, Lfg. F)

Suter, Heinrich. *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und Ihre Werke*. Leipzig: B.G. Teubner, 1900.
(Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften Mit Einschlass Ihrer Anwendungen; 10. hft)

Volume of Bīrūni International Congress in Tehran. Tehran: [n. pb.], 1976.

Woepcke, Franz. *L'Algèbre d'Omar AlKhayyâmî*. Paris: [s.n.], 1851.

Youschkevitch, A.P. *Les Mathématiques arabes (VIII^e - XV^e s.)*. Paris: [s.n.], 1976.

Periodicals

Arabic Sciences and Philosophy: vol. 5, no. 2, September 1995.

Anbouba, Adel. «Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī .» *Dictionary of Scientific Biography:* 1976.

Bachmakova, I. G. «Les Méthodes différentielles d'Archimède.» *Archive for History of Exact Sciences:* vol. 2, no. 2.

Rashed, Roshdi. «L'Extraction de la racine numérique et l'invention des fractions décimales (XI^e - XII^e siècles).» *Archive for History of Exact Sciences:* vol. 18, no. 3, 1978.

——. «L'Idée de l'algèbre chez al-Khwārizmi.» *Fundamenta Scientae:* vol. 4, no. 1, 1983.

——. «Résolution des équations numériques et algèbre: Sharaf Al dīn al Ṭūsī - Viète.» *Archive for History of Exact Sciences:* vol. 12, no. 3, 1974.

——. «Un problème arithmético - géométrique de Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī .» *Journal for the History of Arabic Science:* vol. 3, no. 2, Alep 1978.

فهـرس

- و -

- ي -